ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Основные понятия

Числовым рядом (или просто *рядом*) называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{59.1}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — действительные или комплексные числа, называемые ***членами ряда***, u_n ***общим членом*** ряда.

Другими словами,
числовым рядом называется сумма членов числовой последовательности,
членами ряда называют его слагаемые,
общим членом ряда называют общий член числовой последовательности, из членов которой состоит ряд.

Ряд (59.1) считается заданным, если известен общий член ряда u_n, выраженный как функция его номера n: $u_n = f(n)$.

Сумма первых n членов ряда (59.1) называется n-й ***частичной суммой*** ряда и обозначается через S_n, т. е. $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (59.1), то этот предел называют ***суммой ряда*** (59.1) и говорят, что ряд ***сходится***. Записывают: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд (59.1) называют ***расходящимся***. Такой ряд суммы не имеет.

Рассмотрим примеры.

1. Ряд $2 + 17 - 3\frac{1}{4} + 196 + \ldots$ нельзя считать заданным, а ряд $2+5+8+\ldots$ — можно: его общий член задается формулой $u_n = 3n-1$.

2. Ряд $0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$ сходится, его сумма равна 0.

3. Ряд $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ расходится, $S_n = n \to \infty$ при $n \to \infty$.

4. Ряд $1-1+1-1+1-1+\ldots$ расходится, так как последовательность частичных сумм $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ $(S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \ldots)$ не имеет предела.

5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Действительно,

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

т. е. ряд сходится, его сумма равна 1.

Свойство 1. Если ряд (59.1) сходится и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots, \tag{59.2}$$

где c — произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд (59.1) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (59.2) расходится.

Свойство 2. Если сходится ряд (59.1) и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \tag{59.3}$$

а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n), \tag{59.4}$$

причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

Из свойства 2 вытекает, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

Свойство 3. Если к ряду (59.1) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (59.1) сходятся или расходятся одновременно.

Ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{59.5}$$

называется n-м *остатком ряда* (59.1). Он получается из ряда (59.1) отбрасыванием n первых его членов.

Ряд геометрической прогрессии

Исследуем сходимость ряда

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0), \tag{59.6}$$

который называется *рядом геометрической прогрессии*. Ряд (59.6) часто используется при исследовании рядов на сходимость.

Как известно, сумма первых n членов прогрессии находится по формуле $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}$$

Рассмотрим следующие случаи в зависимости от величины q:

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, ряд (59.6) сходится, его сумма равна $\dfrac{a}{1-q}$;

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд (59.6) расходится;

3. Если $|q| = 1$, то при $q = 1$ ряд (59.6) принимает вид $a + a + a + \dots + a + \dots$, для него $S_n = n \cdot a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (59.6) расходится; при $q = -1$ ряд (59 6) принимает вид $a - a + a - a + \ldots$ — в этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, ряд (59.6) расходится.

Итак, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

Пример 59.1. Показать, что ряд $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}} + \ldots$ сходится.

Пример 59.1. Показать, что ряд $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}} + \ldots$ сходится.

Решение: Данный ряд можно переписать так:

$$2^3 \cdot 1 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \quad \frac{1}{2^2} + \ldots + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Как видно, он представляет собой ряд геометрической прогрессии с $a = 2^3$ и $q = \frac{1}{2} < 1$. Этот ряд сходится согласно свойству 1 числовых рядов.