Лекция 2.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Скалярное произведение векторов.

Определение. Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол, на который надо повернуть вектор $\vec{a}$ до совмещения с вектором $\vec{b}$.

Обозначение: $(\vec{a} \,\widehat{\ }\, , \vec{b})$

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

называется число, равное $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \,\widehat{\ }\, , \vec{b})$.

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad (\vec{a}, \vec{b})$.

Определение. Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}.$

Свойства скалярного произведения:

1). Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Доказательство.

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

2). $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} > 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и

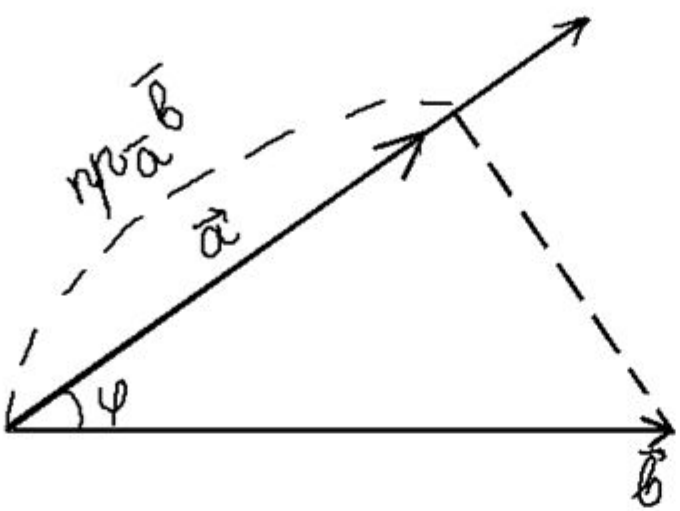
$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = 0$, если $\vec{a} = \vec{0}$.

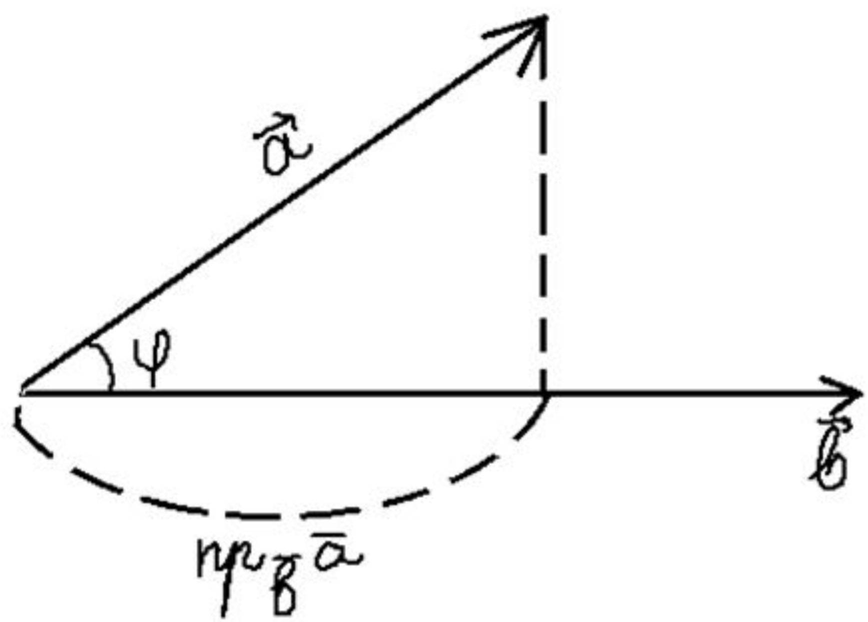
3). $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$

Доказательство.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}||\vec{a}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$





4). Коммутативность: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$

Доказательство.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{b}||\vec{a}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=$$

$$=|\vec{b}||\vec{a}|\cdot\cos\left(\vec{b},\vec{a}\right)=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

5). Однородность:

$$(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\cdot\vec{b})=\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Доказательство.

$$(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|np_{\vec{b}}\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot(\lambda\cdot\vec{b})=\left|\vec{a}\right|np_{\vec{a}}\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

6). Дистрибутивность скалярного произведения относительно сложения векторов:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Без док-ва.

7). Признак ортогональности векторов. Ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны $\vec{a}\perp\vec{b}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Теорема. Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ в ОНБ, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$.

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат.

Доказательство:

$$\vec{a}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k};$$

$$\vec{b}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k};\ \Rightarrow$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k})\cdot(x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k})=$$

$$= x_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{k}) +$$

$$+ y_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{j}) + y_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{k}) +$$

$$+ z_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{i}) + z_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{k}) \Rightarrow$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0 = 1.$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Приложения скалярного произведения.

Пусть $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

1) Проверка условия перпендикулярности векторов

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

2) Вычисление длины вектора.

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}$$

Доказательство.

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=x_1\cdot x_1+y_1\cdot y_1+z_1\cdot z_1=$$

$$=x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2$$

3) Вычисление косинуса угла между векторами.

$$\cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

или в координатах

$$\cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

4) Нахождение проекции вектора на вектор.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}\Rightarrow$$

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}}$$

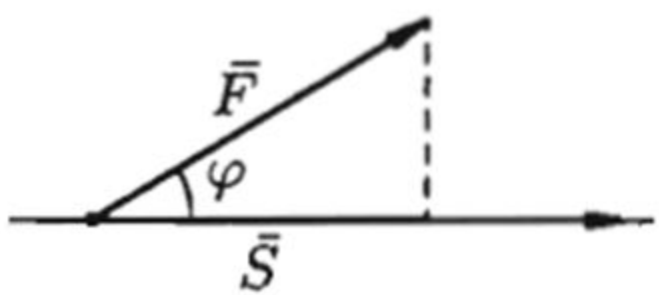
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}||\vec{a}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}\Rightarrow$$

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}+z_2^{\ 2}}}$$

5) Вычисление работы A постоянной силы $\vec{F}$ по перемещению $\vec{S}$.

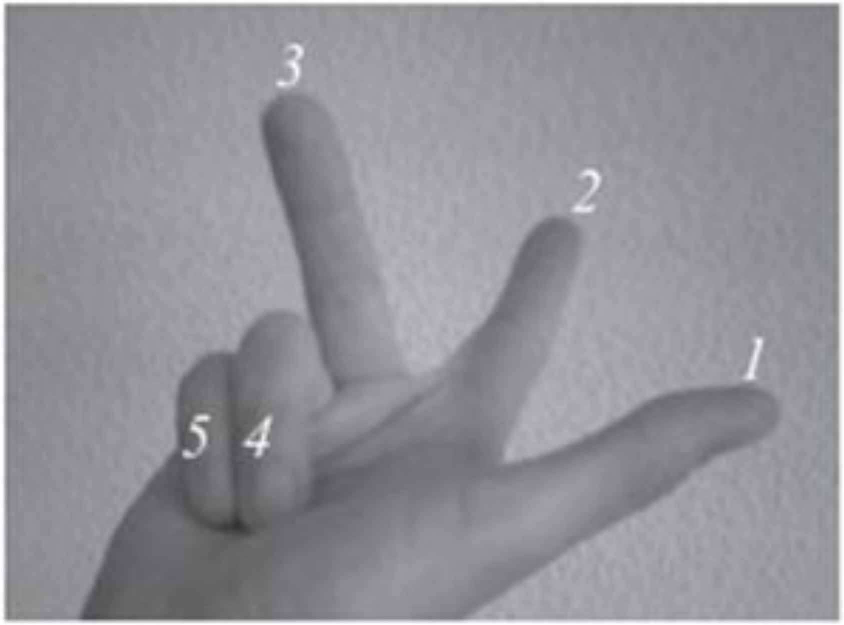
Работа A постоянной силы $\vec{F} = (x_1, y_1, z_1)$, действующей на материальную точку и образующей угол φ с вектором перемещения $\vec{S} = (x_2, y_2, z_2)$ равна

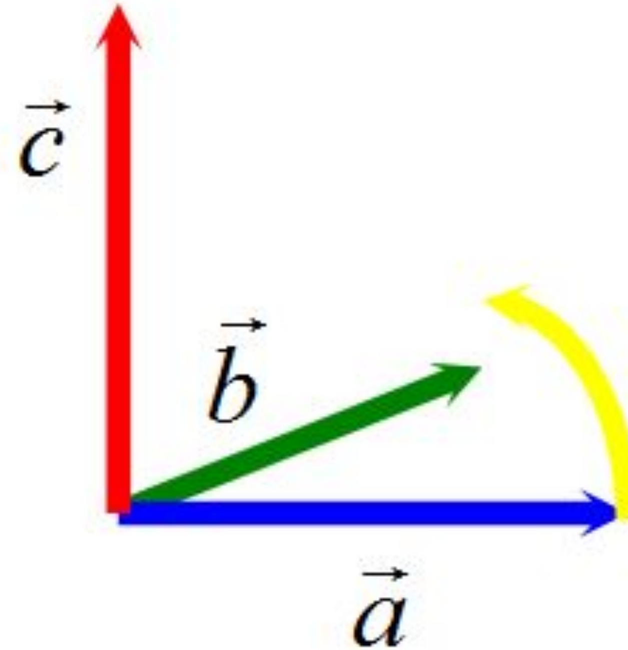
$$A = \left(\vec{F}, \quad \vec{S}\right) = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\varphi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$



Векторное произведение векторов.

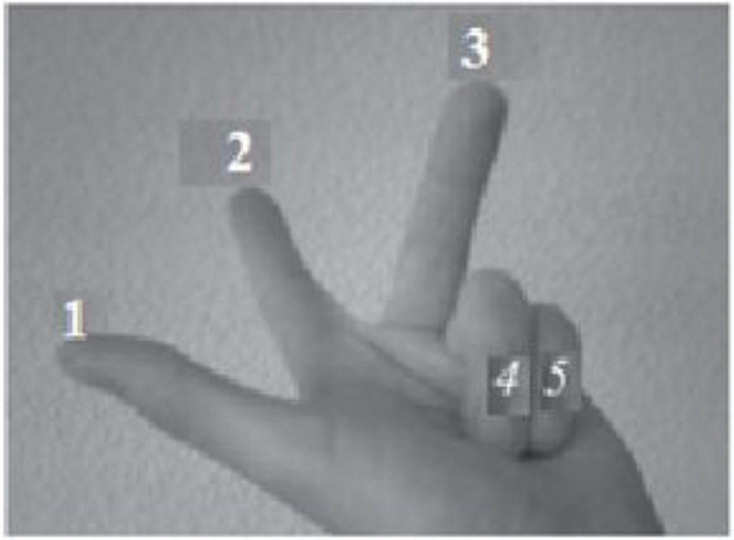
Определение. Упорядоченная тройка векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ называется **правой**, если переход от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ по наименьшему углу видится против часовой стрелки, когда векторы отложены от одной точки, и наблюдение ведется с конца вектора $\vec{c}$.
В противном случае, упорядоченная тройка векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ называется левой (угол видится по часовой стрелке).

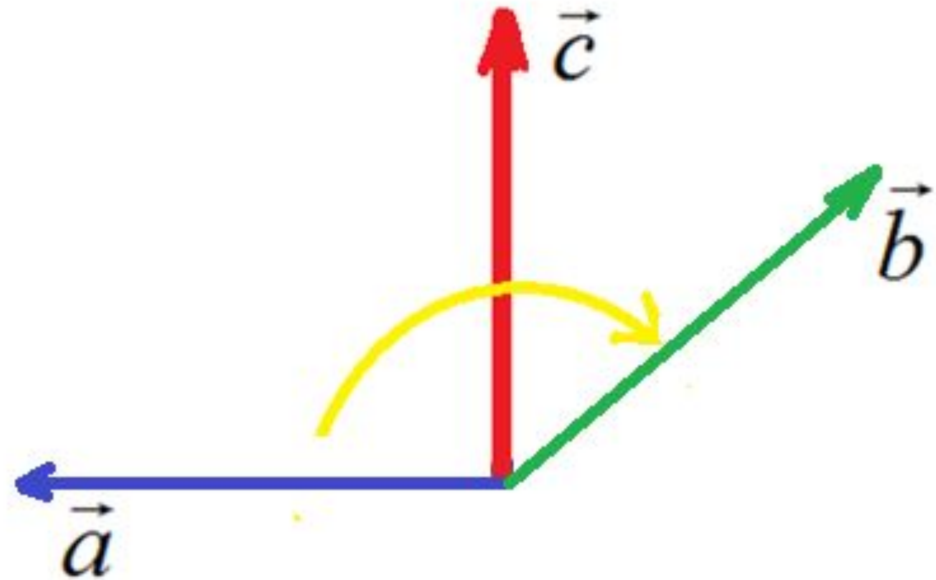




против часовой стрелки

правая тройка





по часовой стрелке

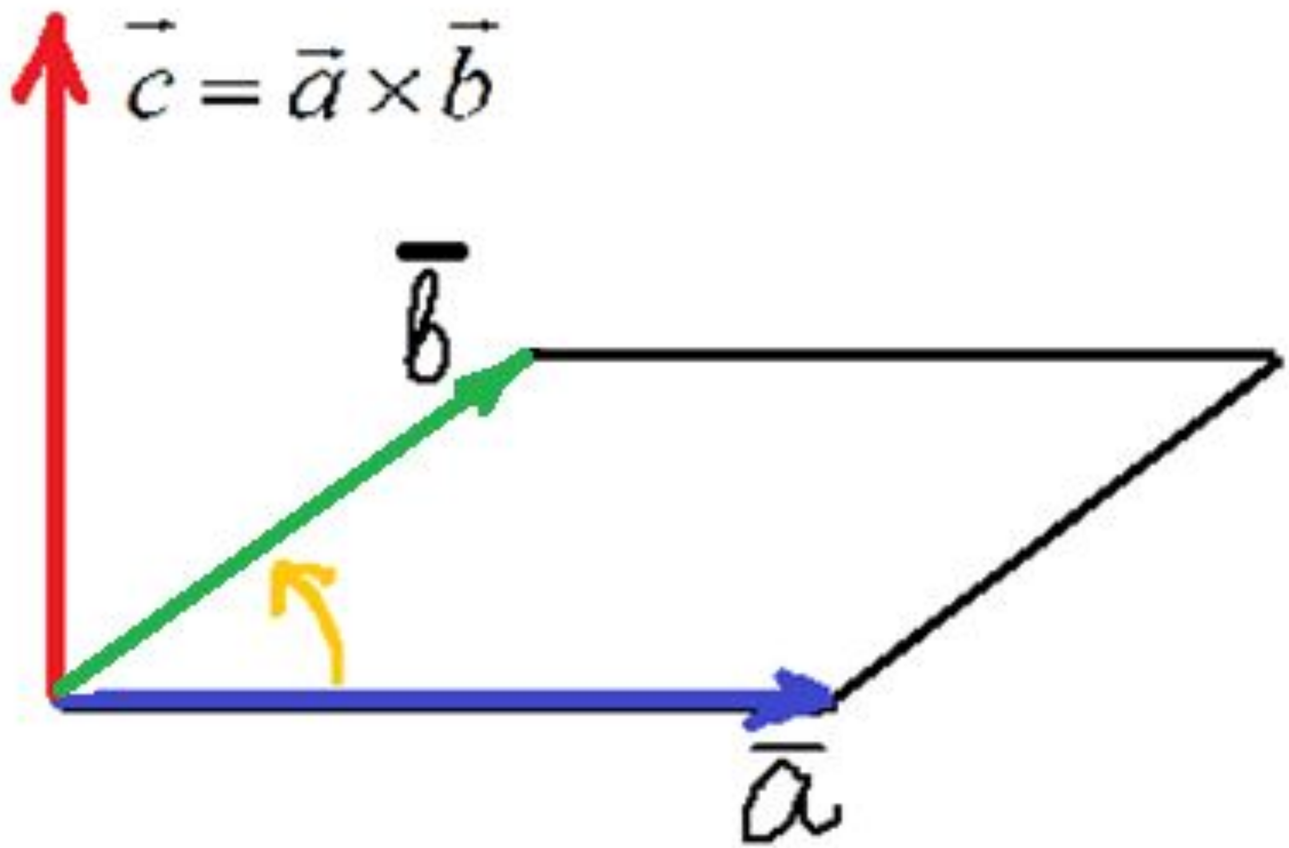
левая тройка

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется <u>вектор</u> $\vec{c}$ такой, что:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, т.е. $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая тройка.



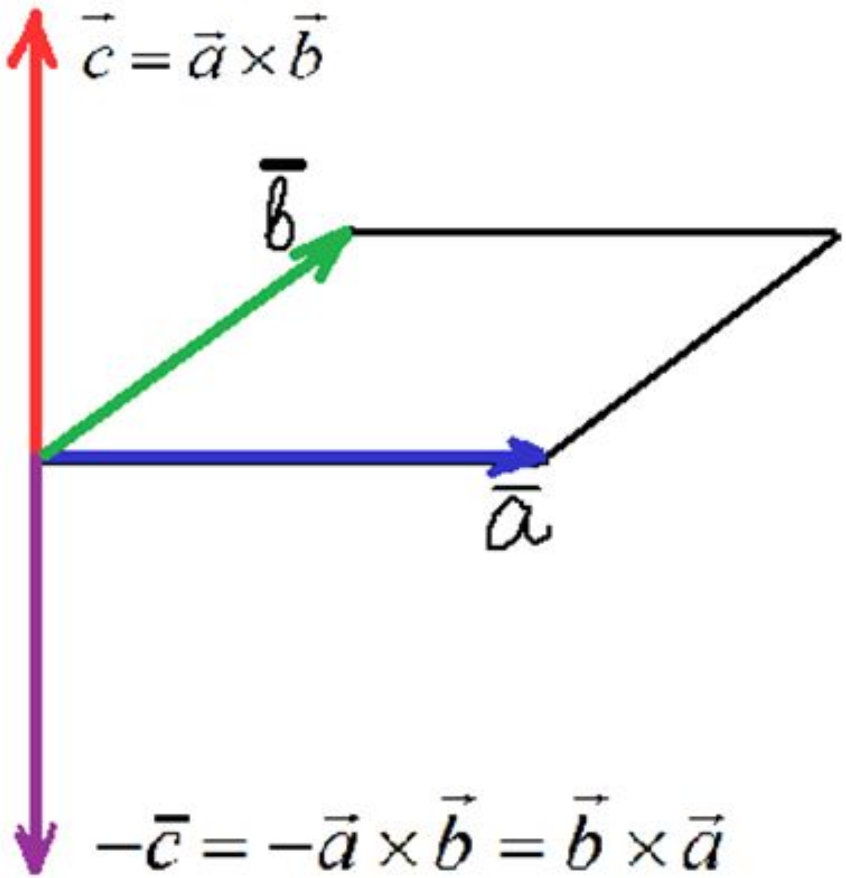
Обозначения векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b}, \quad [\vec{a}, \vec{b}].$$

Свойства.

1. Антикоммутативность:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\ \vec{b}\times\vec{a}.$$



2. Дистрибутивность относительно сложения:

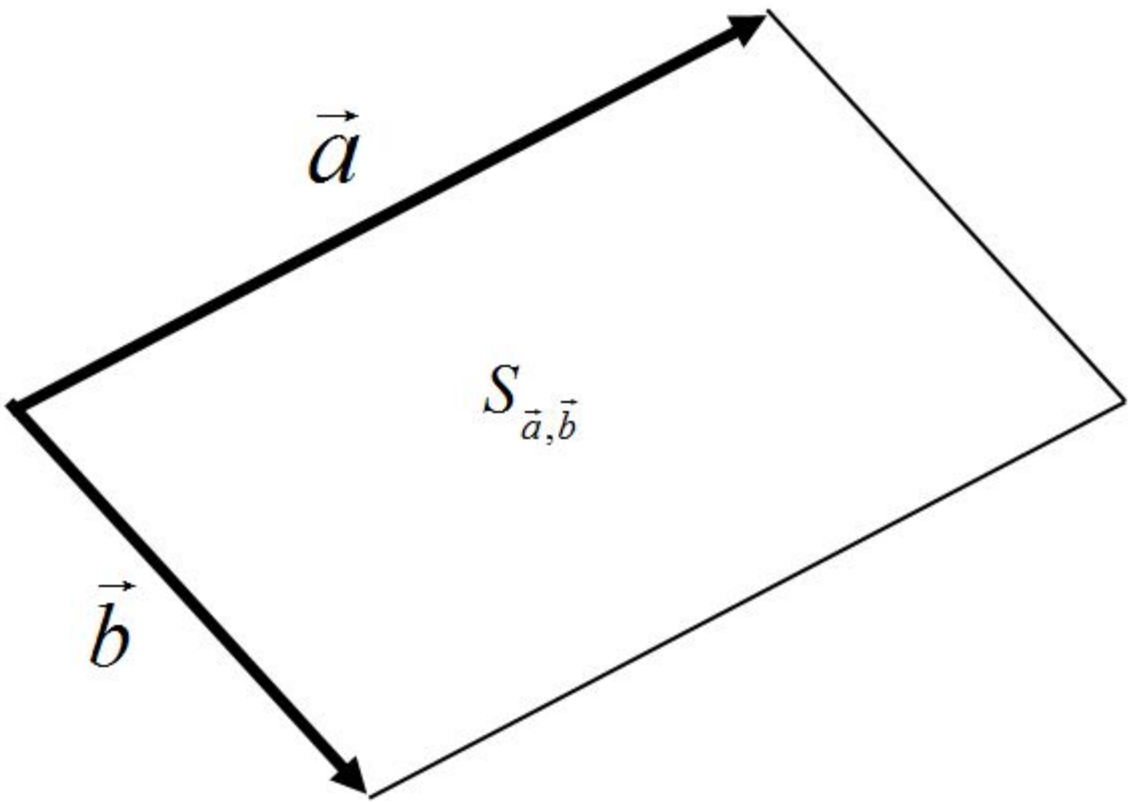
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c};$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$$

3. Однородность:

$$(\lambda\cdot\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\cdot\vec{b})=\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

4. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\quad |\vec{a}\times\vec{b}| = S_{\vec{a},\vec{b}}$.



Вычислим векторное произведение базисных ортов $\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k}$

$$|\vec{i} \times \vec{i}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0 = 0 \Rightarrow \vec{i} \times \vec{i} = \vec{o}.$$

Аналогично, $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{o}, \ \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}.$

$\vec{i} \times \vec{j} = ?$

$\vec{i} \perp \vec{k}, \ \vec{j} \perp \vec{k}$

$\left(\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k}\right)$ - правая тройка

$$\left|\vec{i} \times \vec{j}\right| = \left|\vec{i}\right| \cdot \left|\vec{j}\right| \cdot \sin 90° = 1 = \left|\vec{k}\right|,$$

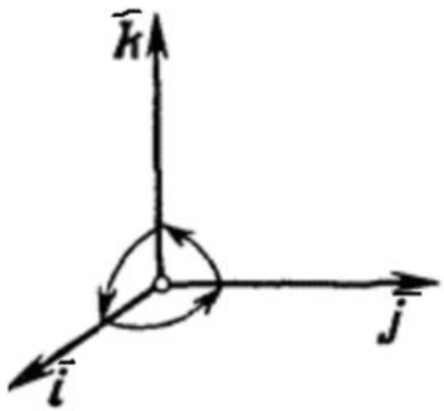
Значит, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

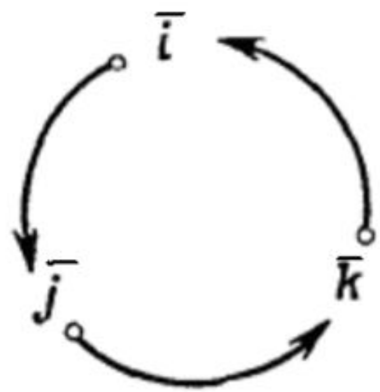
«Круговое правило»

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$





	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Теорема. Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ в правом ОНБ, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$ или

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right).$$

Доказательство:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k})\times(x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k})=$$

$$=x_1\cdot x_2\cdot(\vec{i}\times\vec{i})+x_1\cdot y_2\cdot(\vec{i}\times\vec{j})+x_1\cdot z_2\cdot(\vec{i}\times\vec{k})+$$
$$+y_1\cdot x_2\cdot(\vec{j}\times\vec{i})+y_1\cdot y_2\cdot(\vec{j}\times\vec{j})+y_1\cdot z_2\cdot(\vec{j}\times\vec{k})+$$
$$+z_1\cdot x_2\cdot(\vec{k}\times\vec{i})+z_1\cdot y_2\cdot(\vec{k}\times\vec{j})+z_1\cdot z_2\cdot(\vec{k}\times\vec{k})=$$

$$=x_1\cdot y_2\cdot\vec{k}-x_1\cdot z_2\cdot\vec{j}-y_1\cdot x_2\cdot\vec{k}+$$
$$+y_1\cdot z_2\cdot\vec{i}+z_1\cdot x_2\cdot\vec{j}-z_1\cdot y_2\cdot\vec{i}=$$

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

$$=(y_1\cdot z_2-z_1\cdot y_2)\cdot\vec{i}-(x_1\cdot z_2-z_1\cdot x_2)\cdot\vec{j}+$$

$$+(x_1\cdot y_2-y_1\cdot x_2)\cdot\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

или

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Теорема доказана.

Задача. Упростите выражение:

$$\left[\vec{i},\vec{j}+\vec{k}\right]-\left[\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]+\left[\vec{k},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right]$$

Решение.

$$\left[\vec{i},\vec{j}+\vec{k}\right]=\left[\vec{i},\vec{j}\right]+\left[\vec{i},\vec{k}\right]=\vec{k}+(-\vec{j}),$$

$$\left[\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]=\left[\vec{j},\vec{i}\right]+\left[\vec{j},\vec{k}\right]=-\vec{k}+\vec{i},$$

$$\left[\vec{k},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right]=\left[\vec{k},\vec{i}\right]+\left[\vec{k},\vec{j}\right]=\vec{j}-\vec{k},$$

искомая сумма равна

$$\vec{k}-\vec{j}+\vec{k}-\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}=2\vec{k}-2\vec{i}=2(\vec{k}-\vec{i}).$$

Задача. Найдите $|\vec{b}| = \left|\left[2\vec{a}_1 - \vec{a}_2,\ 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right]\right|$, если $\vec{a}_1 = \{3,\ -1,\ 2\}$, $\vec{a}_2 = \{1,\ 2, -1\}$.

РЕШЕНИЕ:

$$\vec{b} = 4[\vec{a}_1,\ \vec{a}_1] - [\vec{a}_2,\ \vec{a}_2] + 2[\vec{a}_1,\ \vec{a}_2] - 2[\vec{a}_2,\ \vec{a}_1] = 4[\vec{a}_1,\ \vec{a}_2] =$$

$$= 4\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\left(\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \{-12,\ 20,\ 28\}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-12)^2 + (20)^2 + (28)^2} = \sqrt{1328} = 4\sqrt{83}.$$

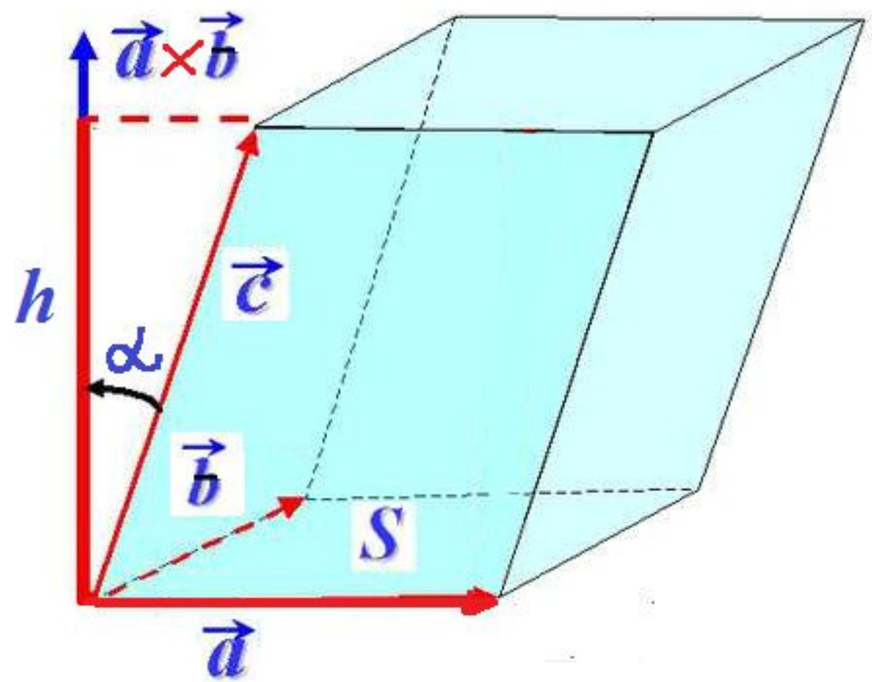
Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения.

1. $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{cases} V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}, & \text{если } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ правая;} \\ -V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}, & \text{если } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ левая;} \\ 0, & \text{если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ компланарны.} \end{cases}$$



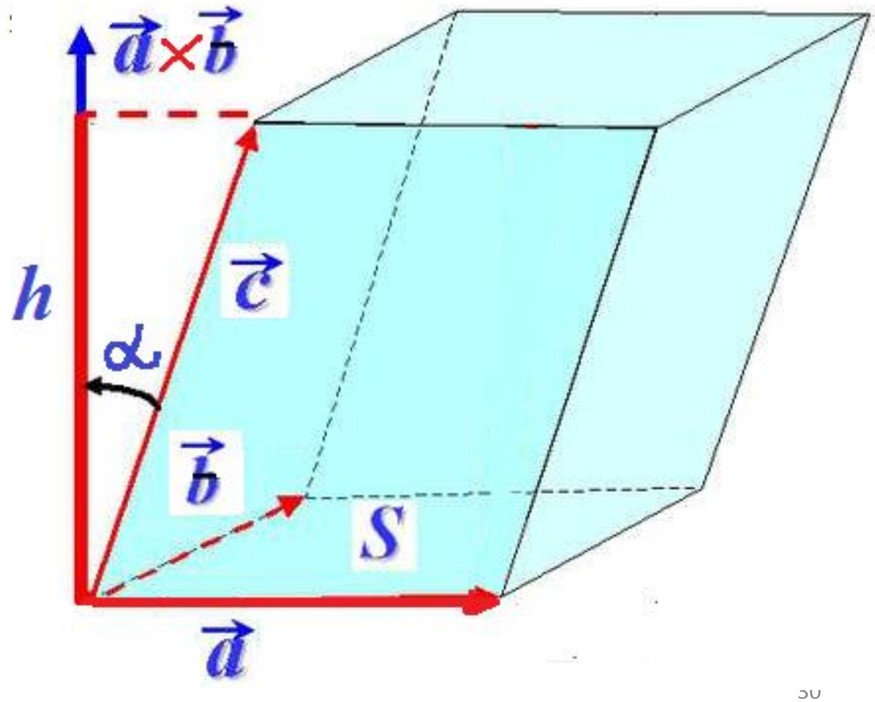
Доказательство:

Случай 1. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарны.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{c}})$$

$|\vec{a}\times\vec{b}|=S_{\vec{a},\vec{b}}$ - площадь параллелограмма.

Обозначим $\alpha=(\widehat{\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{c}})$;



$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – правая $\Rightarrow$

α – острый угол;

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ – левая $\Rightarrow$

α – тупой угол.

Тогда

$$|\vec{c}\,|\cdot\cos\alpha=\begin{cases} h, & \text{если } \alpha - \text{острый угол;}\\ -h, & \text{если } \alpha - \text{тупой угол.}\end{cases}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot|\vec{c}\,|\cdot\cos(\widehat{\vec{a}\times\vec{b}\,,\vec{c}})=$$

$$=S_{\vec{a},\vec{b}}\cdot(\pm h)=\pm V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}\,.$$

Случай 2. Если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, то

$$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{c}\;\Rightarrow\;(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0.$$

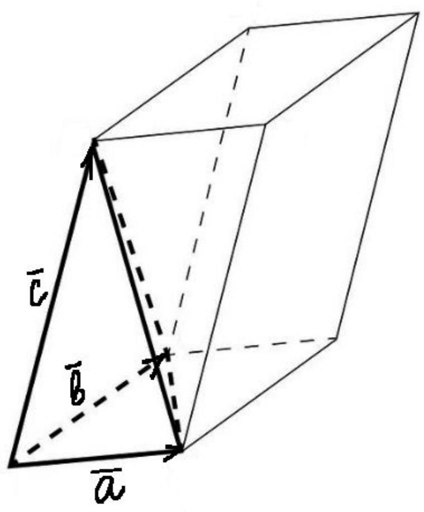
2. Объем параллелепипеда: $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

3. Объем тетраэдра (треугольной пирамиды):

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Доказательство. Пусть основание тетраэдра – треугольник, построенный на векторах $\vec{a},\vec{b}$.

$$V_{тетр.} = \frac{1}{3}S_{осн.}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{\vec{a},\vec{b}}h = \frac{1}{6}V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$



4. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$, если тройка векторов правая;
$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0$, если тройка векторов левая.

5. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$, т.е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов.

$$\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = \vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = -\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \qquad (*)$$

Доказательство. Тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ и $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ одинаково ориентированы $\Rightarrow$ знак перед объемом параллелепипеда совпадает.

$$\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{c} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = -\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$$

Аналогично, доказываются другие равенства (*).

6. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$

Доказательство. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\pm V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=\pm V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$$

Знак берём один и тот же, так как тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$ одинаково ориентированы.

Свойство позволяет записывать смешанное произведение в виде $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ без указания знаков векторного и скалярного произведения.

Теорема.

Пусть в правом ОНБ

$$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),$$

$$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2),$$

$$\vec{c}=(x_3,y_3,z_3).$$

Тогда $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Доказательство:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

$$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1);$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right); \Rightarrow$$

$$a\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=x_1\cdot\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-y_1\cdot\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+z_1\cdot\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие.

Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю определителя третьего порядка, построенного на этих векторах.