

## **Лекция 2.**

### **ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.**

**СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И**

**СМЕШАННОЕ**

**ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ**

## Скалярное произведение векторов.

**Определение.** Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется наименьший угол, на который надо повернуть вектор  $\vec{a}$  до совмещения с вектором  $\vec{b}$ .

Обозначение:  $(\vec{a}, \vec{b})$

**Определение.** Скалярным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

называется число, равное  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

Обозначение:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Определение.** Скалярным квадратом вектора  $\vec{a}$  называется  $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ .

**Свойства скалярного произведения:**

1). Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Доказательство.

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

2).  $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ , если  $\vec{a} \neq \vec{0}$  и

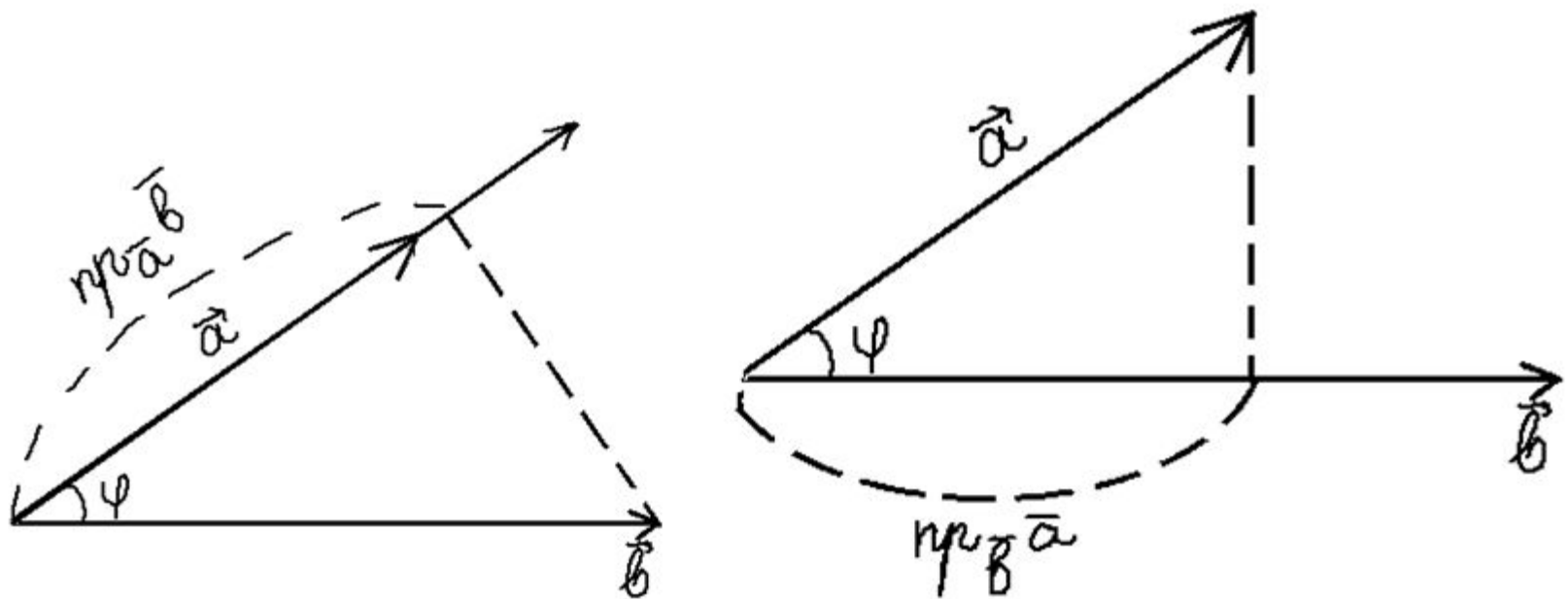
$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ , если  $\vec{a} = \vec{0}$ .

$$3). \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{np}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{np}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Доказательство.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \text{np}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \text{np}_{\vec{b}} \vec{a}.$$



4). Коммутативность:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \\ &= |\vec{b}| |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

5). Однородность:

$$(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) &= |\vec{a}| \operatorname{pr}_{\vec{a}}(\lambda \vec{b}) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$



6). Дистрибутивность скалярного произведения относительно сложения векторов:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Без док-ва.

7). Признак ортогональности векторов.

Ненулевые векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  взаимно перпендикулярны  $\vec{a} \perp \vec{b}$  тогда и только тогда, когда  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Теорема.** Если  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

в ОНБ, то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ .

*Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат.*

Доказательство:

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}; \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}) \cdot (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= x_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{k}) + \\
 &+ y_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{j}) + y_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{k}) + \\
 &+ z_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{i}) + z_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{k}) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0 = 1.$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$



## Приложения скалярного произведения.

Пусть  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

1) Проверка условия перпендикулярности векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

2) Вычисление длины вектора.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = x_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot y_1 + z_1 \cdot z_1 = \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \end{aligned}$$

3) Вычисление косинуса угла между векторами.

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

или в координатах

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

4) Нахождение проекции вектора на вектор.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \operatorname{np}_{\vec{a}} \vec{b} \Rightarrow$$

$$\operatorname{np}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

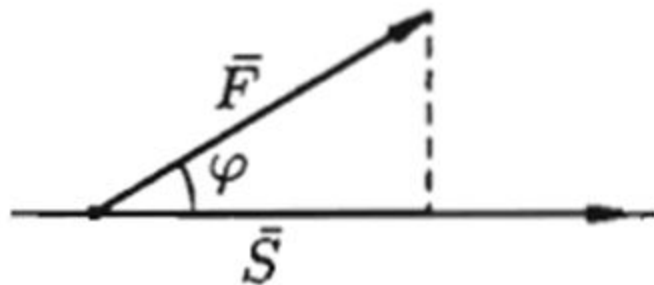
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \operatorname{np}_{\vec{b}} \vec{a} \Rightarrow$$

$$\operatorname{np}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

5) Вычисление работы  $A$  постоянной силы  $\vec{F}$  по перемещению  $\vec{S}$ .

Работа  $A$  постоянной силы  $\vec{F} = (x_1, y_1, z_1)$ , действующей на материальную точку и образующей угол  $\varphi$  с вектором перемещения  $\vec{S} = (x_2, y_2, z_2)$  равна

$$A = (\vec{F}, \vec{S}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \varphi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$



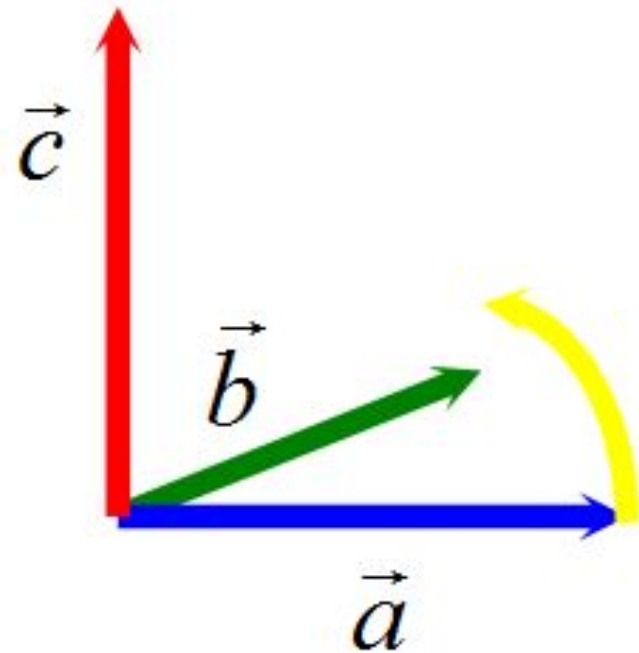
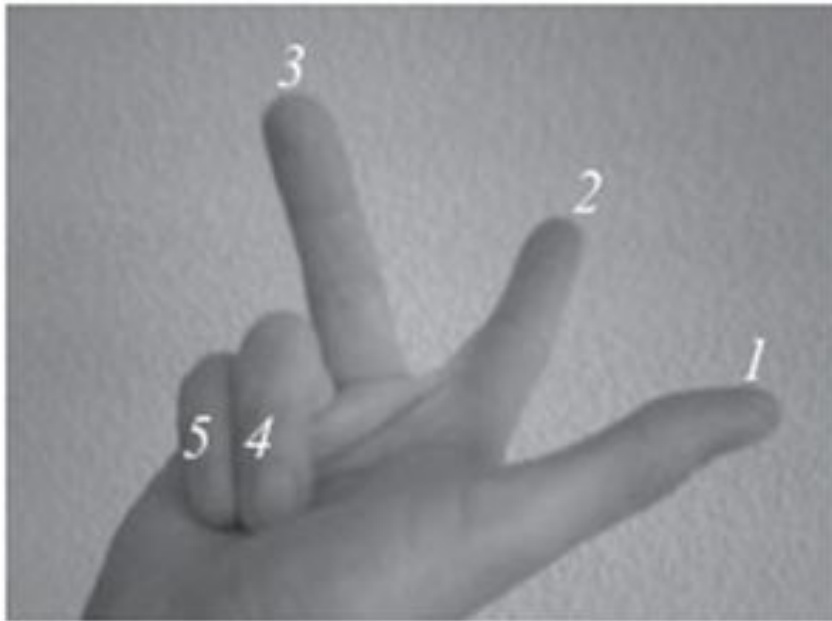


## Векторное произведение векторов.

**Определение.** Упорядоченная тройка векторов  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  называется **правой**, если переход от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  по наименьшему углу видится против часовой стрелки, когда векторы отложены от одной точки, и наблюдение ведется с конца вектора  $\vec{c}$ .

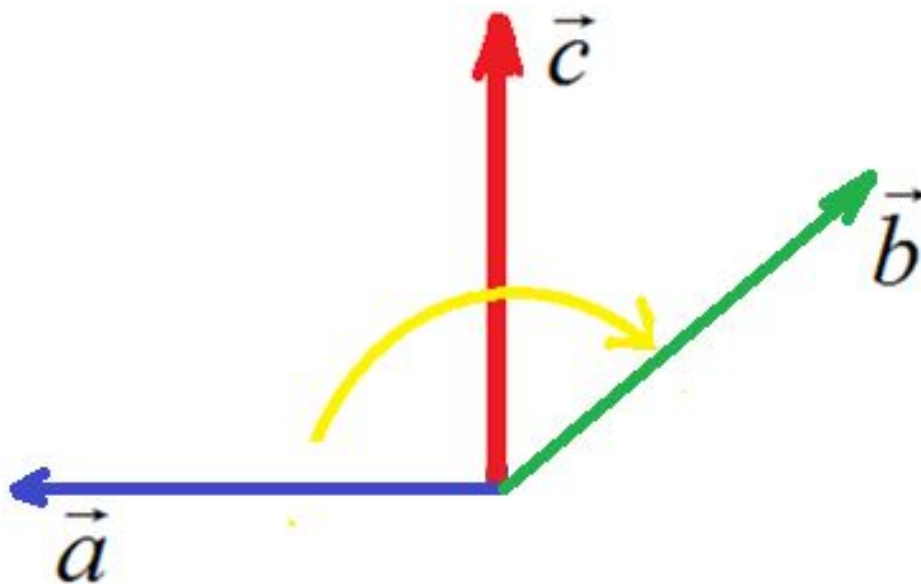
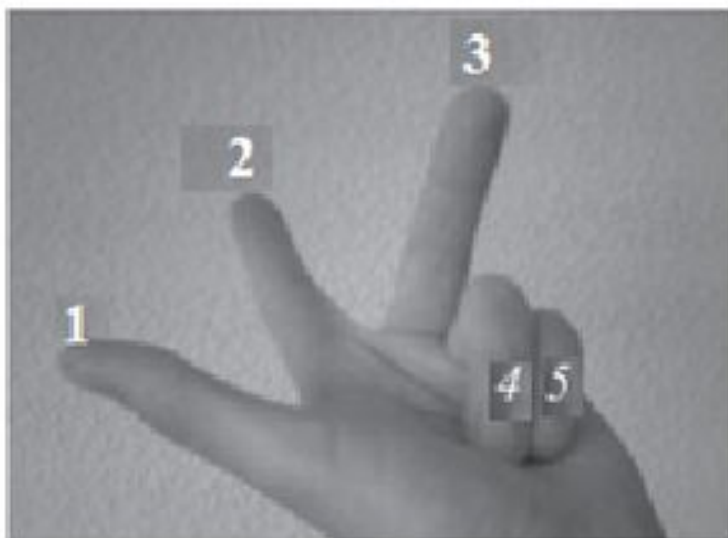
В противном случае, упорядоченная тройка векторов  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  называется **левой** (угол видится по часовой стрелке).





**ПРОТИВ ЧАСОВОЙ СТРЕЛКИ**

**ПРАВАЯ ТРОЙКА**



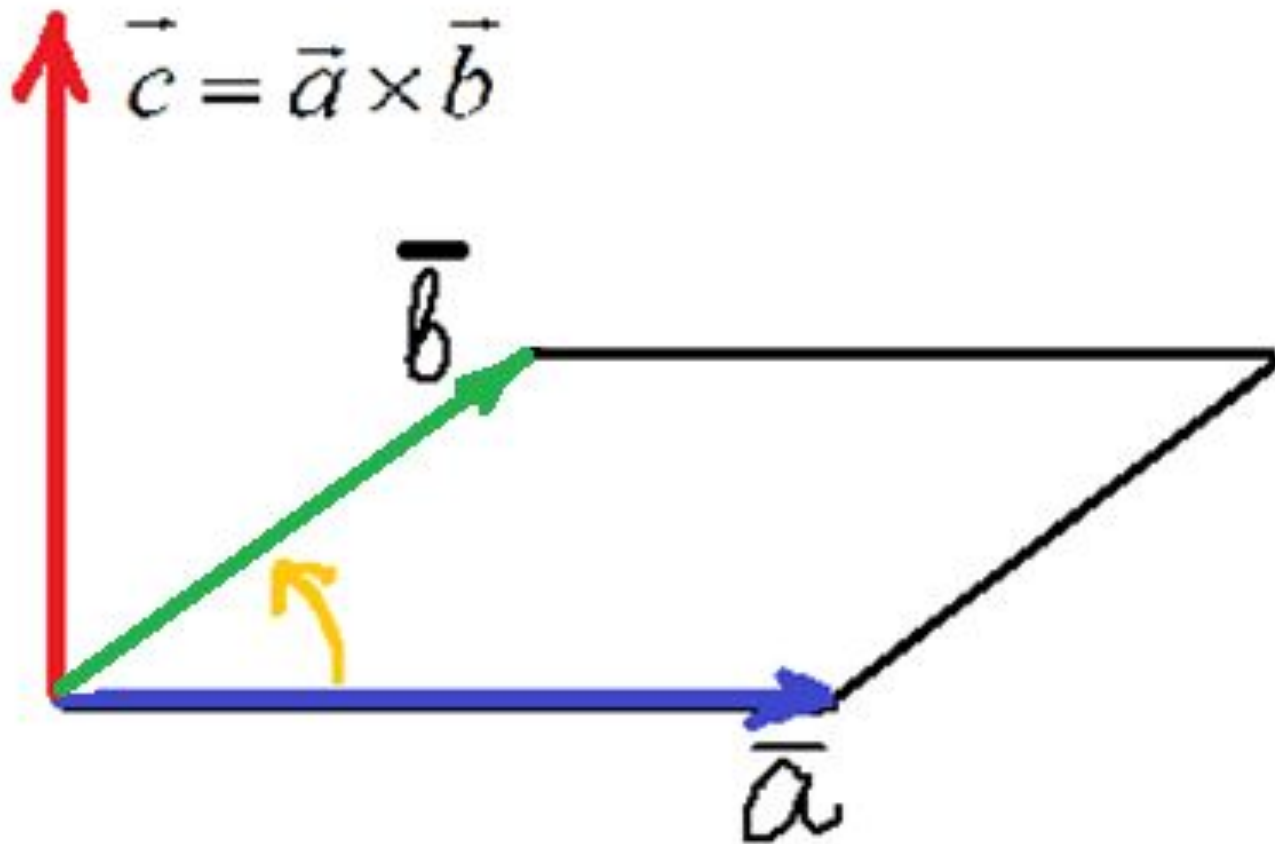
**по часовой стрелке**  
**левая тройка**

**Определение.** Векторным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$  такой, что:

$$1) |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}});$$

2)  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ , т.е.  $\vec{c}$  перпендикулярен плоскости векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;

3)  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  правая тройка.



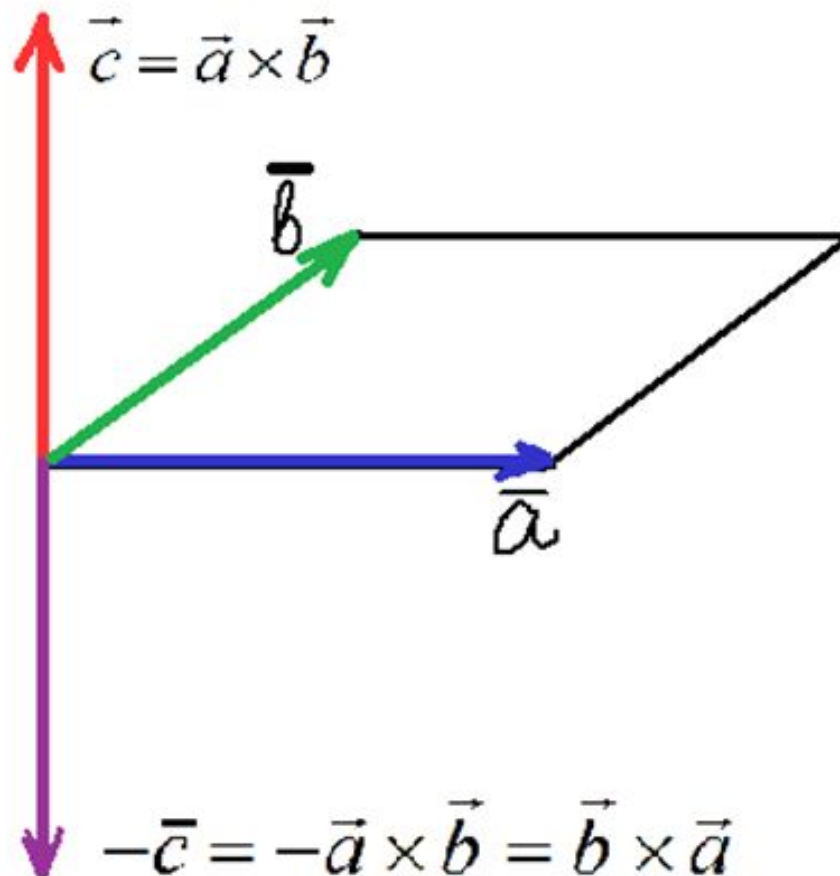
Обозначения векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b}, \quad [\vec{a}, \vec{b}].$$

Свойства.

1. Антикоммутативность:

$$\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}.$$





2. Дистрибутивность относительно сложения:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

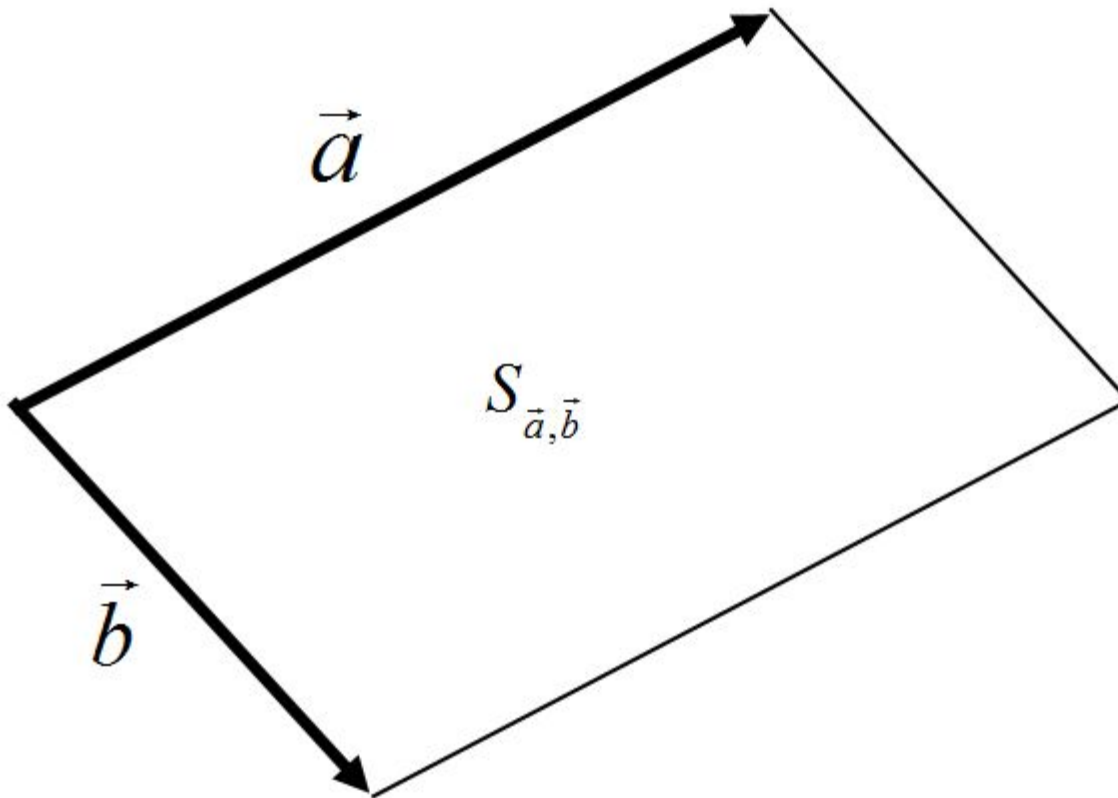
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

3. Однородность:

$$(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

4. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  :

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\vec{a}, \vec{b}}.$$



Вычислим векторное произведение базисных ортов  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$

$$|\vec{i} \times \vec{i}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0 = 0 \Rightarrow \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}.$$

Аналогично,  $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$ ,  $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ .

$$\vec{i} \times \vec{j} = ?$$

$$\vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  - правая тройка

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1 = |\vec{k}|$$

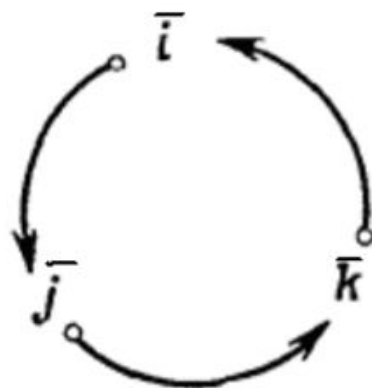
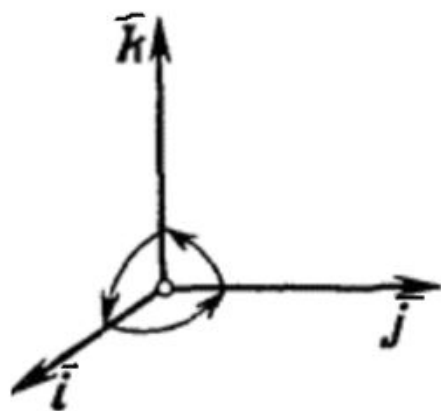
Значит,  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ .

## «Круговое правило»

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$



	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

**Теорема.** Если  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$   
в правом ОНБ, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \text{ ИЛИ}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left( \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$



Доказательство:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}) \times (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}) =$$

$$\begin{aligned} &= x_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + x_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + x_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ y_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + y_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + y_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ z_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + z_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + z_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x_1 \cdot y_2 \cdot \vec{k} - x_1 \cdot z_2 \cdot \vec{j} - y_1 \cdot x_2 \cdot \vec{k} + \\ &+ y_1 \cdot z_2 \cdot \vec{i} + z_1 \cdot x_2 \cdot \vec{j} - z_1 \cdot y_2 \cdot \vec{i} = \end{aligned}$$

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

$$= (y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2) \cdot \vec{i} - (x_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot x_2) \cdot \vec{j} + \\ + (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left( \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| \end{array} \right)$$

ИЛИ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Теорема доказана.

**Задача.** Упростите выражение:

$$\left[ \vec{i}, \vec{j} + \vec{k} \right] - \left[ \vec{j}, \vec{i} + \vec{k} \right] + \left[ \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right]$$

**Решение.**

$$\left[ \vec{i}, \vec{j} + \vec{k} \right] = \left[ \vec{i}, \vec{j} \right] + \left[ \vec{i}, \vec{k} \right] = \vec{k} + (-\vec{j}),$$

$$\left[ \vec{j}, \vec{i} + \vec{k} \right] = \left[ \vec{j}, \vec{i} \right] + \left[ \vec{j}, \vec{k} \right] = -\vec{k} + \vec{i},$$

$$\left[ \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right] = \left[ \vec{k}, \vec{i} \right] + \left[ \vec{k}, \vec{j} \right] = \vec{j} - \vec{k},$$

искомая сумма равна

$$\vec{k} - \vec{j} + \vec{k} - \vec{i} + \vec{j} - \vec{i} = 2\vec{k} - 2\vec{i} = 2(\vec{k} - \vec{i}).$$

## Задач

а. Найдите  $|\vec{b}| = |[2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2]|$ , если  $\vec{a}_1 = \{3, -1, 2\}$ ,  $\vec{a}_2 = \{1, 2, -1\}$ .

РЕШЕНИЕ:

$$\begin{aligned}\vec{b} &= 4[\vec{a}_1, \vec{a}_1] - [\vec{a}_2, \vec{a}_2] + 2[\vec{a}_1, \vec{a}_2] - 2[\vec{a}_2, \vec{a}_1] = 4[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \\ &= 4 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 4 \left( \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= \{-12, 20, 28\} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{(-12)^2 + (20)^2 + (28)^2} = \sqrt{1328} = 4\sqrt{83}.\end{aligned}$$

## Смешанное произведение векторов

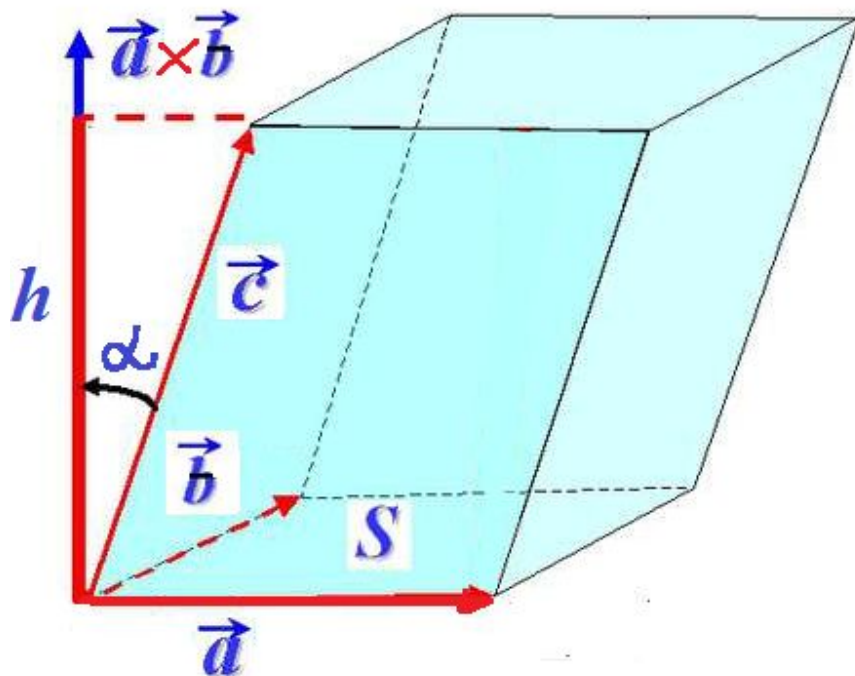
**Определение.** Смешанным произведением векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется число, равное  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ .

Обозначение:  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ .



Свойства смешанного произведения.

$$1. \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{cases} V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}, & \text{если } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ правая;} \\ -V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}, & \text{если } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ левая;} \\ 0, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны.} \end{cases}$$



Доказательство:

Случай 1.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  некопланарны.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}})$$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\vec{a}, \vec{b}}$  - площадь параллелограмма.

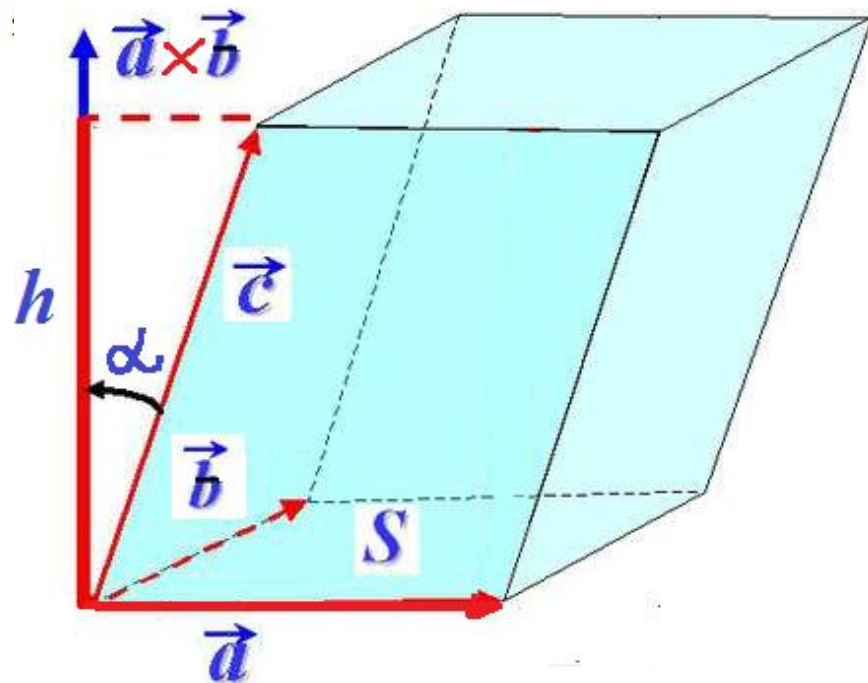
Обозначим  $\alpha = \widehat{(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})}$ :

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  - правая  $\Rightarrow$

$\alpha$  - острый угол;

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  - левая  $\Rightarrow$

$\alpha$  - тупой угол.



Тогда

$$|\vec{c}| \cdot \cos \alpha = \begin{cases} h, & \text{если } \alpha \text{ – острый угол;} \\ -h, & \text{если } \alpha \text{ – тупой угол.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}}) = \\ &= S_{\vec{a}, \vec{b}} \cdot (\pm h) = \pm V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}. \end{aligned}$$

Случай 2. Если  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны, то

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c} \implies (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$$

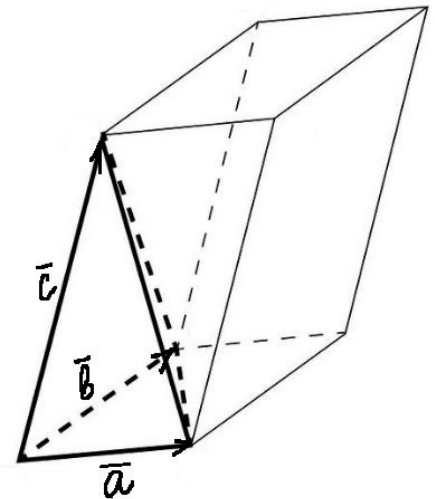
2. Объем параллелепипеда:  $V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$ .

3. Объем тетраэдра (треугольной пирамиды):

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$$

Доказательство. Пусть основание тетраэдра – треугольник, построенный на векторах  $\vec{a}, \vec{b}$ .

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\vec{a}, \vec{b}} h = \frac{1}{6} V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$$





4.  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ , если тройка векторов правая;

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ , если тройка векторов левая.

5.  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$ , т.е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов.

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{a}\vec{c}\vec{b} = \vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c} \quad (*)$$

Доказательство. Тройки  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ,  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$  и  $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$  одинаково ориентированы  $\Rightarrow$  знак перед объемом параллелепипеда совпадает.

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

Аналогично, доказываются другие равенства (\*).



$$6. (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Доказательство.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \pm V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$$

Знак берём один и тот же, так как тройки векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$  одинаково ориентированы.

Свойство позволяет записывать смешанное произведение в виде  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$  без указания знаков векторного и скалярного произведения.

## Теорема.

Пусть в правом ОНБ

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3).$$

Тогда  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Доказательство:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1);$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \left( \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right); \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие.

Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю определителя третьего порядка, построенного на этих векторах.