Сложные проценты

Сложные проценты

применяются в средне- и долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга.

Капитализация процентов – присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления.

Формула наращения

$$S = P\boxed{(1+i)^n}$$

множитель наращения

P – первоначальный размер долга (ссуды, кредита, капитала и т.д.)

S – наращенная сумма на конец срока ссуды

n – срок, число лет наращения

i – уровень годовой ставки процентов, в виде десятичной дроби

Проценты за период:

$$I = S - P = P[(1+i)^n - 1]$$

Наращение по сложной ставке

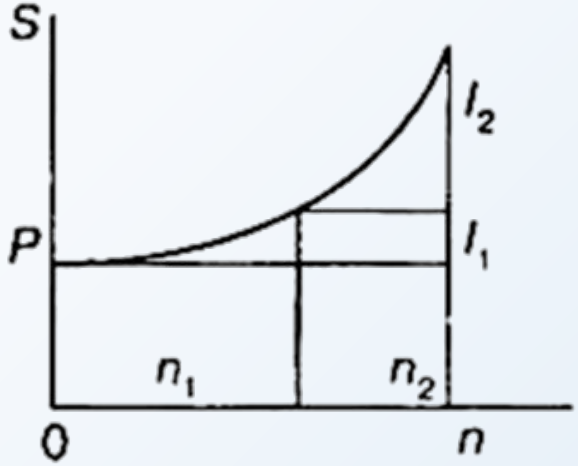
Пусть проценты на основной долг начисляются по ставке i, а проценты на проценты – по ставке $r \neq i$. В этом случае

$$S = P + Pi\left[1 + (1 + r) + (1 + r)^2 + \cdots + (1 + r)^{n-1}\right].$$

В итоге имеем

$$S = P\left(1 + i\frac{(1 + r)^n - 1}{r}\right)$$

Начисление процентов
в смежных календарных периодах



$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = P[(1+i)^{n_1} - 1];$$

$$I_2 = P(1+i)^{n_1}[(1+i)^{n_2} - 1] = \\ = P[(1+i)^n - (1+i)^{n_1}]$$

Переменные ставки

Как пример – применение ***плавающих ставок***.

$$S = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k}$$

где $i_1, i_1, \dots, i_k$ – последовательные значения ставок;

$n_1, n_2, \dots, n_k$ – периоды, в течение которых "работают" соответствующие ставки.

Начисление процентов при дробном числе лет

- "общий" метод – расчет непосредственно по формуле наращения сложных процентов
- "смешанный" метод – начисление процентов за целое число лет по формуле сложных процентов и за дробную часть срока по формуле простых процентов:

$$S = P(1 + i)^a(1 + bi)$$

где $n = a + b$ – срок ссуды;

a – целое число лет;

b – дробная часть года.

Сравнение роста по сложным и простым процентам

- для срока ***меньше года простые проценты больше*** сложных:

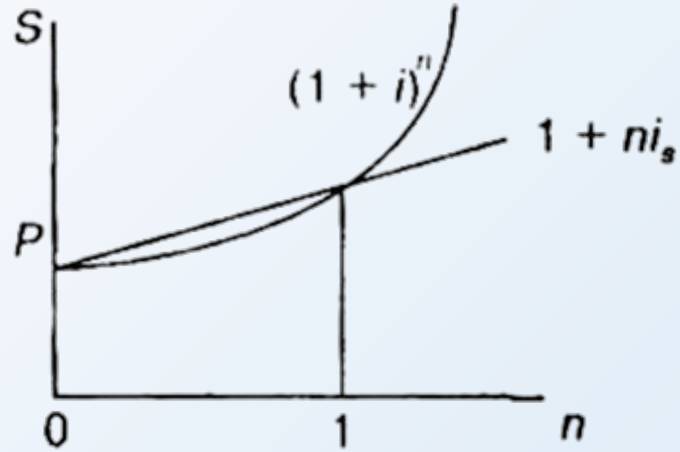
$$(1 + ni_s) > (1 + i)^n,$$

- для срока ***больше года сложные проценты больше*** простых:

$$(1 + ni_s) < (1 + i)^n,$$

- для срока, ***равного году***, множители наращения ***равны*** друг другу.

Сравнение роста по сложным и простым процентам



Множители наращения	Срок ссуды					
	30 дн.	180 дн.	1 год	5 лет	10 лет	100 лет
	1,01644	1,05918	1,12	1,6	2,2	13
	1,00936	1,05748	1,12	1,76234	3,10584	83522,3

Формулы удвоения

- удвоение по простым процентам:

$$n = \frac{1}{i_s},$$

- удвоение по сложным процентам:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} = \frac{0{,}69315}{\ln(1+i)}.$$

Номинальная ставка

Пусть годовая ставка равна j, число периодов начисления в году – m. Каждый раз проценты начисляются по ставке j/m. Ставку j называют ***номинальной (nominal rate)***.

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^N$$

где N – общее количество периодов начисления.

Эффективная ставка

- ***Действительная***, или ***эффективная ставка процента (effective rate)*** – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m-разовое начисление процентов по ставке j/m.

$$(1+i)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}$$

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1$$

Обе ставки ***эквивалентны*** в финансовом отношении

Эквивалентная замена ставок

- $$\left(1+\frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1}=\left(1+\frac{j_2^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2}$$

$$j_2^{(m_2)}=m_2\left[\left(1+\frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}}-1\right]$$

$$j=m\left(\sqrt[m]{1+i}-1\right)$$

Дисконтирование по сложной ставке

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = Sv^n$$

$$v^n = (1+i)^{-n} = \frac{1}{q^n}$$

v – **дисконтный, учетный,** или ***дисконтирующий, множитель*** (*compound discount factor*)

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = Sv^{mn}$$

$$v^{mn} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}$$

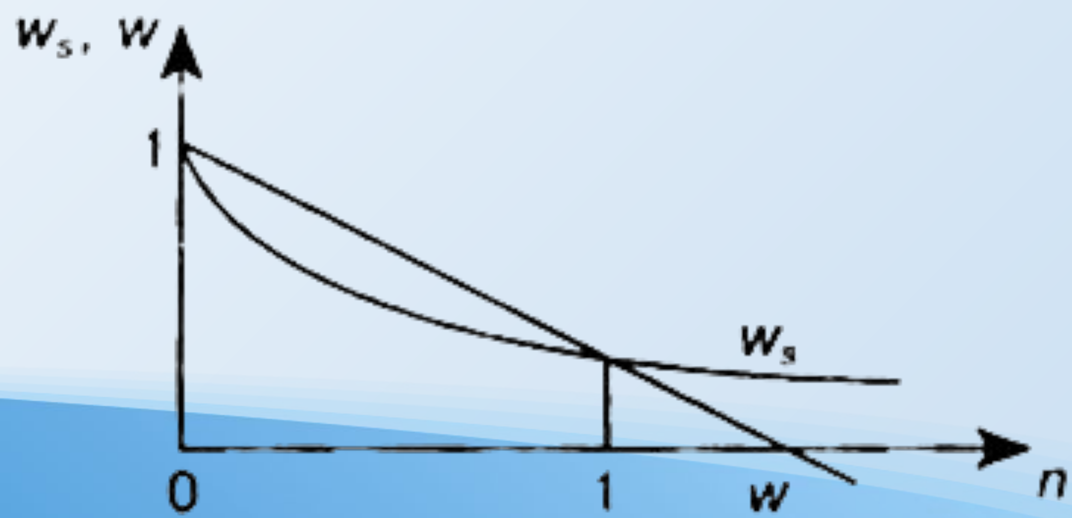
Учет по сложной учетной ставке (*compound discount rate*)

- $$P = S(1-d)^n$$

где d – сложная годовая учетная ставка.

$$w_s = (1 - nd_s) \quad \text{и} \quad w = (1-d)^n,$$

где d_s, d – простая и сложная учетные ставки соответственно.



Номинальная и эффективная учетные ставки

Дисконтирование производится не один, а m раз в году, т.е. каждый раз учет производится по ставке f/m:

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$$

где f – номинальная годовая учетная ставка.

***Эффективная учетная ставка* (*d*)**

$$(1 - d)^n = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$$

Наращение по сложной учетной ставке

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}$$

$$S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}$$

Процессы наращения и дисконтирования по разным видам ставок

- **Множители наращения** соотносятся между собой следующим образом:

$$(1+i)^n < 1 + ni_s < \frac{1}{1 - nd_s} < \frac{1}{(1-d)^n} \quad \text{при } 0 < n < 1,$$

$$1 + i = 1 + i_s < \frac{1}{1 - d_s} = \frac{1}{1 - d} \quad \text{при } n = 1,$$

$$1 + ni_s < (1+i)^n < \frac{1}{(1-d)^n} < \frac{1}{1 - nd_s} \quad \text{при } n > 1.$$

Процессы наращения и дисконтирования по разным видам ставок

- ***Дисконтные множители*** соотносятся между собой следующим образом:

$$(1-d)^n < 1 - nd_s < \frac{1}{1+ni_s} < \frac{1}{(1+i)^n} \quad \text{при } 0 < n < 1,$$

$$1 - d = 1 - d_s < \frac{1}{1+i_s} = \frac{1}{1+i} \quad \text{при } n = 1,$$

$$1 - nd_s < (1-d)^n < \frac{1}{(1+i)^n} < \frac{1}{1+ni_s} \quad \text{при } n > 1.$$

Определение срока ссуды

При наращении:

$$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log(S/P)}{m \cdot \log\left(1 + \frac{j}{m}\right)}$$

При дисконтировании:

$$n = \frac{\log(P/S)}{\log(1-d)}$$

$$n = \frac{\log(S/P)}{m \cdot \log\left(1 - \frac{f}{m}\right)}$$

Величина процентной ставки

При наращении:

$$i = \sqrt[n]{S/P} - 1$$

$$j = m\left(\sqrt[mn]{S/P} - 1\right)$$

При дисконтировании:

$$d = 1 - \sqrt[n]{P/S}$$

$$f = m\left(1 - \sqrt[mn]{P/S}\right)$$

Непрерывное наращение и дисконтирование

– наращение (или дисконтирование) за бесконечно малые отрезки времени.

Сила роста (force of interest) – особый вид процентной ставки, характеризующий относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени.

Постоянная сила роста

Изначально:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$$

В пределе при $m \to \infty$ получаем

$$S = P \lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = Pe^{jn}$$

где e – основание натуральных логарифмов.

Обозначим силу роста как δ:

$$S = Pe^{\delta n}$$

Взаимосвязь ставок и дисконтирование по силе роста

Из равенства множителей наращения

$$(1 + i)^n = e^{\delta n}$$

получаем

$$\delta = \ln(1 + i)$$

$$i = e^{\delta} - 1$$

Дисконтирование:

$$P = Se^{-\delta n}$$

Переменная сила роста

- Пусть сила роста изменяется во времени, следуя некоторому закону, представленному в виде непрерывной функции времени: $\delta_t = f(t)$.

Тогда:

$$S = Pe^{\int_0^n \delta_t}; \quad P = Se^{-\int_0^n \delta_t}$$

Линейная функция времени

- $$\delta_t = \delta + at$$

где δ – начальное значение силы роста;

a – прирост силы роста в единицу времени.

$$\int_0^n \delta_t dt = \int_0^n (\delta + at)dt = \delta n + \frac{an^2}{2}$$

Таким образом, множитель наращения:

$$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}}$$

Экспоненциальная функция времени

- $$\delta_t = \delta a^t,$$

где δ – начальное значение силы роста;

a – постоянный темп роста.

Степень множителя равна

$$\int_0^n \delta_t dt = \frac{\delta}{\ln a}(a^n - 1),$$

а сам множитель:

$$q = e^{\frac{\delta}{\ln a}(a^n - 1)}$$

Срок ссуды

Срок ссуды при постоянной силе роста:

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\delta}$$

При наращении с изменяющейся силой роста (с постоянным темпом роста a):

$$n = \frac{\ln \left[1 + \frac{\ln a \cdot \ln(S/P)}{\delta} \right]}{\ln a}$$

Размер силы роста

- При наращении с постоянной силой роста

$$\delta = \frac{\ln(S/P)}{n}$$

При наращении с изменяющейся с постоянным темпом силой роста

$$\delta = \frac{\ln a \cdot \ln(S/P)}{a^n - 1}$$

Спасибо за внимание!