

Преподаватель – Усманова Анжелика Рашитовна.

Кафедра ВМиК 6-411

kfmn2004@mail.ru

Курс «Математическая логика» - зачет

Требования к зачету:

- 1) выполнение всех контрольных работ и тестов на положительные оценки
- 2) баллы за посещение практических занятий, работу у доски и выполнение самостоятельных заданий. Набор не менее 50% от максимального числа баллов в группе
- 3) при отсутствии достаточного числа баллов – зачет по билетам

Литература:

1. В.И. Игошин. Математическая логика и теория алгоритмов. Уч.пособие. «Академия», 2008. – 448 с.

2. В.И. Игошин. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. Уч.пособие. «Академия», 2007. – 304 с.

3. Орехов Ю.В., Орехов Э.Ю. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. Пособие / Уфимск. гос. авиац. техн ун-т. – Уфа, УГАТУ, 2013. – 243 с.

Структура курса

- Алгебра высказываний
1й тест, 1я контрольная
- Исчисление высказываний (аксиоматическая теория)
2й тест
- Алгебра предикатов
- Теория алгоритмов
2я контрольная (АП и ТА)

Лекция 1. Логика и
математическая логика.
История логики. Алгебра
высказываний.

1.1 Логика и математическая ЛОГИКА

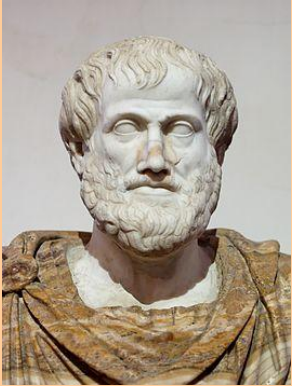
Логика (традиционная или формальная логика) – наука о способах мышления, изучает способы и методы рассуждений, доказательств, выводов. Греческое $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ (логос) означает «слово», «понятие», «СМЫСЛ».

Математическая логика (символическая или теоретическая логика) - изучает процесс доказательства математических теорем и сами математические теории

Применение математической логики в информатике

- Теория булевых функций: релейно-контактные схемы
- Использование нормальных форм: упрощение элементных схем
- Исчисление высказываний: автоматическое доказательство теорем
- Логика предикатов: язык Пролог и родственные ему
- Теория формальных языков и грамматик: построение компиляторов
- Теория алгоритмов

История логики



Теория дедукции (теория логического вывода)
Понятия индукции, дедукции, силлогизма.
Логические законы – тождества, противоречия, исключенного третьего.

**Аристотель (384-322 гг.до
н.э.)**



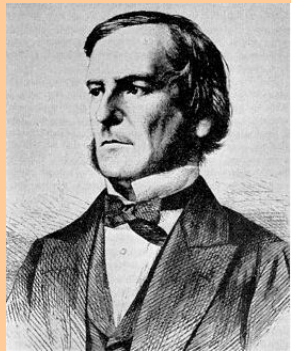
Разработка аксиоматической теории.

**Евклид (330-275 гг.до н.
э.)**



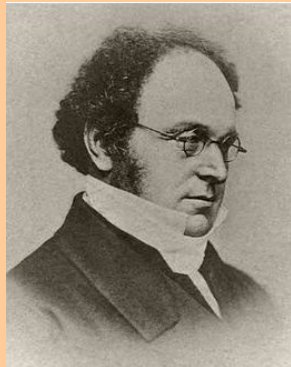
Законы тождества и противоречия.
Силлогизмы.
Понятие «модель».
Использование двоичной системы в математике.

Г.В.Лейбниц (1646-1716)



Алгебра логики (булева алгебра)

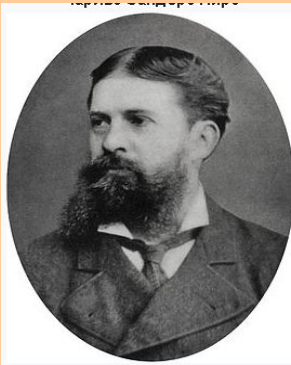
Дж.Буль (1815-1864)



Логика высказываний.
Законы де Моргана.

О. де Морган (1806-1871

)



Кванторы.
Логика предикатов.
Функция «стрелка Пирса».

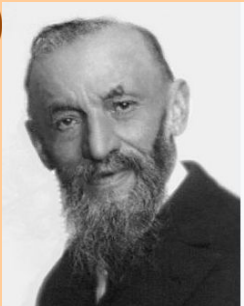
Ч.Пирс (1839-1914)



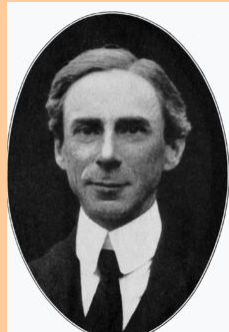
Алгебра Поста.
Классы Поста.
Машина Поста.

ТЗ (теоретическое задание)
Какие русские и советские математики внесли
свой вклад в развитие математической логики?

Э.Л.Пост (1897-1954)



Дж.
Пеано



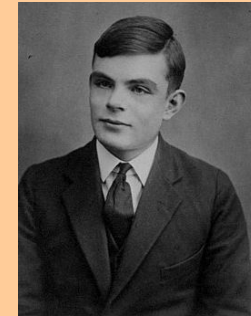
Б.
Рассел



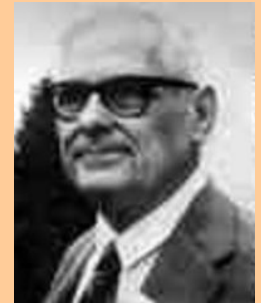
Д.
Гильберт



К.
Гёдель



А.
Тьюринг



А.
Чёрч

Глава 1. Логика высказываний

Изучение математической логики мы начнем с наиболее простой ее части – логики высказываний.

§1. Высказывания и операции над ними

Высказывание – это повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно. Рассмотрим следующие предложения.

A = “Число $\sqrt{2}$ является иррациональным”.

B = “Неверно, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным”.

C = “Число $\sqrt{2}+1$ является иррациональным”.

D = “Если число $\sqrt{2}$ является иррациональным, то число $\sqrt{2} + 1$ также является иррациональным”.

E = “Число x является иррациональным”.

F = “Который час?”

G = “Идите решать задачу к доске!”

Первые четыре предложения являются высказываниями, последние три – нет. Предложения F и G не являются повествовательными, а значение истинности повествовательного предложения E зависит от того, какие значения получит переменная x (во второй главе подобные предложения будут названы предикатами). Высказывания A , C и D истинны, высказывание B – ложно. Более точно, значение истинности высказываний A , C и D есть истина, а значение истинности высказывания B есть ложь. В дальнейшем истину будем обозначать символом 1 , а ложь – символом 0 .

Проанализируем высказывания $A - D$ с точки зрения их “внутреннего строения”. Высказывания A и C можно назвать простыми, высказывания B и D – составными, полученными из простых высказываний A и C . Этот пример показывает, что в языке (в данном случае, в русском языке) существуют способы построения одних высказываний из других, которые мы будем называть *операциями*. В естест-

венных языках существует много таких операций. Мы выделим в качестве основных пять операций.

Определение. Пусть X и Y – некоторые высказывания. Тогда высказывание

- 1) “ X и Y ” называется *конъюнкцией* высказываний X и Y ;
- 2) “ X или Y ” называется *дизъюнкцией* высказываний X и Y ;
- 3) “не X ” называется *отрицанием* высказывания X ;
- 4) “если X , то Y ” называется *импликацией* высказываний X и Y ;
- 5) “ X тогда и только тогда, когда Y ” называется *эквиваленцией* высказываний X и Y .

Зависимость значения истинности новых высказываний от значений истинности исходных высказываний определяется *таблицей истинности связок* (см. таблицу 1.1). Напомним, что единица означает, что высказывание истинно, а ноль – ложно.

Таблица 1.1

X	Y	$X \& Y$	$X \vee Y$	$\neg X$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1

Можно сказать, что таблица 1.1 содержит пять таблиц истинности, по одной для каждой из связок. Эти пять таблиц для удобства объединены в одну.

Прокомментируем таблицы истинности дизъюнкции и импликации. В русском языке союз “или” понимается в двух смыслах: *разделительном* – или то, или другое, но не оба, и *соединительном* – или то, или другое, или оба. Как видно из таблицы 1.1, союз “или” мы будем понимать в соединительном смысле. Перейдем к импликации. Если дана импликация $X \rightarrow Y$, то высказывание X называется *посылкой* импликации, а Y – *заключением*. Если посылка X импликации ложна, то вся импликация $X \rightarrow Y$ истинна (см. третью и

четвертую строки таблицы 1.1). Это свойство импликации часто формулируют в виде следующего принципа: “из ложного утверждения (имеется в виду X) следует все что угодно (имеется в виду Y)”. В силу этого следующее высказывание “если $2 \cdot 2 = 5$, то π – иррациональное число” является истинным, поскольку оно представляет собой импликацию, посылка которой ложна. Подчеркнем, что при этом не надо искать доказательство или опровержение того, что π – иррациональное число. Аналогично, первая и третья строки таблицы 1.1 показывают нам, что если заключение Y импликации истинно, то вся импликация $X \rightarrow Y$ также истинна. Это свойство импликации тоже формулируют в виде принципа: “истинное утверждение (имеется в виду Y) следует из чего угодно (имеется в виду X)”. Из этого принципа сразу следует истинность высказывания “если π – иррациональное число, то $2 \cdot 2 = 4$ ”, поскольку оно представляет собой

§2. Формулы логики высказываний, интерпретация

В первом параграфе высказывания были введены как повествовательные предложения естественного языка, т.е. как лингвистические объекты. Для изучения этих объектов математическими средствами используется понятие формулы логики высказываний. Дадим соответствующие определения.

Определение. *Атомарными формулами логики высказываний* называются выбранные буквы латинского алфавита с индексами и без них.

В качестве выбранных букв мы будем использовать U, V, W, X, Y, Z .

Приведем пример. Буквы X, Y, Z – атомарные формулы. В силу первого пункта определения эти буквы являются формулами логики высказываний, а в силу второго формулами являются выражения $(X) \& (Y)$, $((X) \& (Y)) \rightarrow (Z)$. Мы видим, что если строго следовать определению, в формуле надо писать много скобок. Это неудобно для восприятия формулы. Чтобы уменьшить количество скобок условимся, во-первых, атомарные формулы в скобки не заключать, во-вторых, ввести приоритет (силу связывания) для связок. Будем считать, что \neg имеет наивысший приоритет, $\&$ и \vee имеют одинаковый приоритет, который выше, чем у \rightarrow и \leftrightarrow . Последние две связки имеют одинаковый приоритет. Используя эти соглашения, формулу $((X) \& (Y)) \rightarrow (Z)$ можно записать так: $X \& Y \rightarrow Z$. Отметим, что поскольку мы не упорядочили $\&$ и \vee по силе связывания, то выражение $X \& Y \vee Z$ не является формулой. Надо в этом выражении поставить скобки, определяющие порядок выполнения операций. Получатся две формулы $(X \& Y) \vee Z$ и $X \& (Y \vee Z)$.

В дальнейшем нам понадобится понятие подформулы. Попросту говоря, подформула формулы F – это “слитная” часть, которая сама является формулой. На строгом уровне это понятие вводится следующим образом.

Определение. Подформулой атомарной формулы является она сама. Подформулами формулы $\neg F$ являются формула $\neg F$ и все ее подформулы. Подформулами формул $F \& G$, $F \vee G$, $F \rightarrow G$, $F \leftrightarrow G$ являются они сами и все подформулы формул F и G .

Например, формула $F = X \& Y \rightarrow X \vee Z$ имеет шесть подформул: X , Y , Z , $X \& Y$, $X \vee Z$, $X \& Y \rightarrow X \vee Z$.

Теперь необходимо соотнести понятие высказывания и формулы. На самом простом уровне формула – это *форма* для получения высказываний. Пусть, например, дана формула $F = X \& Y \rightarrow Z$. Поставим вместо X , Y и Z соответственно высказывания $A_1 =$ “четыреугольник $ABCD$ является параллелограммом”, $A_2 =$ “в четырехугольнике $ABCD$ смежные стороны равны”, $A_3 =$ “в четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны”, то получим высказывание $A_4 =$ “если четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом и его смежные стороны равны, то диагонали перпендикулярны”. Это высказывание получилось “по форме” F . Если вместо X , Y и Z подставить другие высказывания, то получим новое высказывание, имеющее ту же “форму”.

На строгом уровне сказанное в предыдущем абзаце оформляется в виде понятия интерпретации.

Обозначим через A множество атомарных, а через F – множество всех формул логики высказываний. Зафиксируем некоторую совокупность высказываний P , удовлетворяющую следующим условиям:

1) какие бы два высказывания из P мы ни взяли, P содержит их конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и эквиваленцию,

2) P содержит отрицание каждого из высказываний, принадлежащих P .

Интерпретацией в широком смысле мы будем называть произвольную функцию

$$\varphi: A \rightarrow P.$$

Такая функция, определенная на множестве атомарных формул, естественным образом распространяется на множество всех формул. Выше был приведен пример интерпретации в широком смысле. В этом примере совокупность P содержала высказывания $A_1 - A_4$, а интерпретация φ на атомарных формулах X, Y, Z действовала так: $\varphi(X) = A_1$, $\varphi(Y) = A_2$, $\varphi(Z) = A_3$. Естественное расширение φ на множество всех формул будем обозначать той же буквой. Тогда $\varphi(F) = A_4$.

В дальнейшем от высказываний $\varphi(F)$ нам на самом деле будут нужны только их истинностные значения 1 и 0 . Введем поэтому более узкое понятие интерпретации.

Определение. *Интерпретацией в узком смысле (или просто интерпретацией)* называется функция

$$\varphi: A \rightarrow \{0, 1\}.$$

Используя таблицы истинности связок, интерпретацию можно расширить на множество всех формул. Приведем пример. Пусть $\varphi(X) = 1$, $\varphi(Y) = 0$, $\varphi(Z) = 1$, $F = X \vee Y \rightarrow Z$, $G = X \& Y \leftrightarrow X \& Z$. Тогда $\varphi(F) = 1$, $\varphi(G) = 0$.

Составление таблиц ИСТИННОСТИ

Пример 2.3

$$F(X, Y) = (X \rightarrow Y) \vee (Y \rightarrow X)$$

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(X \rightarrow Y)$	$\lambda(Y \rightarrow X)$	$\lambda((X \rightarrow Y) \vee (Y \rightarrow X))$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Пример 2.4 $F(P, Q, R) = (P \wedge Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg R)$

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(R)$	$\lambda(P \wedge Q)$	$\lambda(\neg R)$	$\lambda(P \leftrightarrow \neg R)$	$\lambda(F)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Сокращенная таблица ИСТИННОСТИ

$$(X \wedge \neg Y) \leftrightarrow (\neg X \vee Y)$$

0 0 1 0 1 1 0

0 0 0 0 1 1 1

1 1 1 0 0 0 0

1 0 0 0 0 1 1