Преподаватель – Усманова Анжелика Рашитовна.
Кафедра ВМиК 6-411
kfmn2004@mail.ru

Курс «Математическая логика» - зачет

Требования к зачету:

1) выполнение всех контрольных работ и тестов на положительные оценки

2) баллы за посещение практических занятий, работу у доски и выполнение самостоятельных заданий. Набор не менее 50% от максимального числа баллов в группе

3) при отсутствии достаточного числа баллов – зачет по билетам

Литература:

1.В.И. Игошин. Математическая логика и теория алгоритмов. Уч.пособие. «Академия», 2008. – 448 с.

2..В.И. Игошин. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. Уч.пособие. «Академия», 2007. – 304 с.

3. Орехов Ю.В., Орехов Э.Ю. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. Пособие / Уфимск. гос. авиац. техн ун-т. – Уфа, УГАТУ, 2013. – 243 с.

Структура курса

- Алгебра высказываний

  1й тест, 1я контрольная
- Исчисление высказываний (аксиоматическая теория)

  2й тест
- Алгебра предикатов
- Теория алгоритмов

  2я контрольная (АП и ТА)

Лекция 1. Логика и математическая логика. История логики. Алгебра высказываний.

1.1 Логика и математическая логика

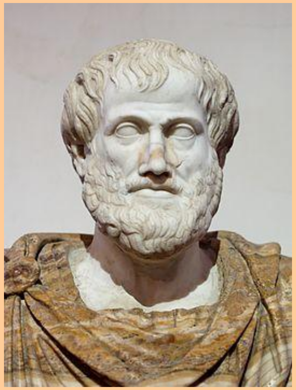
Логика (традиционная или формальная логика) – наука о способах мышления, изучает способы и методы рассуждений, доказательств, выводов. Греческое λογος(логос) означает «слово», «понятие», «смысл».

Математическая логика (символическая или теоретическая логика) - изучает процесс доказательства математических теорем и сами математические теории

Применение математической логики в информатике

- Теория булевых функций: релейно-контактные схемы
- Использование нормальных форм: упрощение элементных схем
- Исчисление высказываний: автоматическое доказательство теорем
- Логика предикатов: язык Пролог и родственные ему
- Теория формальных языков и грамматик: построение компиляторов
- Теория алгоритмов

История логики



Теория дедукции (теория логического вывода)
Понятия индукции, дедукции, силлогизма.
Логические законы – тождества, противоречия, исключенного третьего.

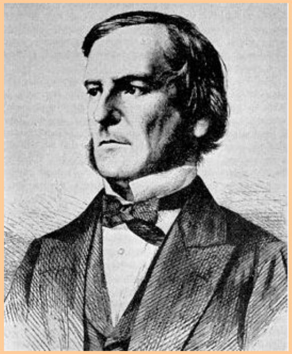
Аристотель (384-322 гг.до н.э.)

Разработка аксиоматической теории.

Евклид (330-275 гг.до н. э.)

Законы тождества и противоречия.
Силлогизмы.
Понятие «модель».
Использование двоичной системы в математике.

Г.В.Лейбниц (1646-1716

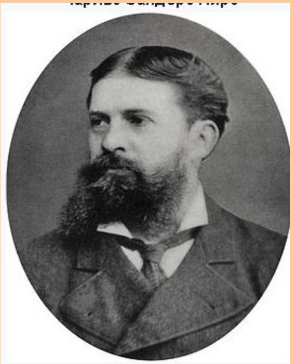


Алгебра логики (булева алгебра)

Дж.Буль (1815-1864

Логика высказываний.
Законы де Моргана.

О. де Морган (1806-1871)



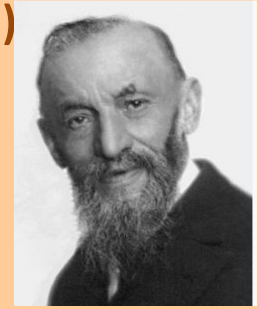
Кванторы.
Логика предикатов.
Функция «стрелка Пирса».

Ч.Пирс (1839-1914)

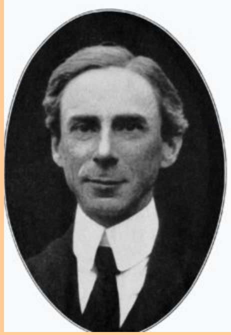
Алгебра Поста.
Классы Поста.
Машина Поста.

ТЗ (теоретическое задание)
Какие русские и советские математики внесли свой вклад в развитие математической логики?

Э.Л.Пост (1897-1954)



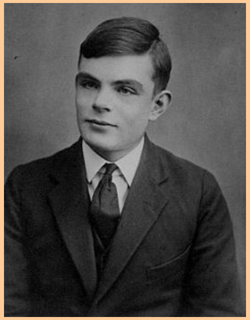
Дж. Пеано



Б. Рассел

Д. Гильберт

К. Гёдель



А. Тьюринг

А. Чёрч

Глава 1. Логика высказываний

Изучение математической логики мы начнем с наиболее простой ее части – логики высказываний.

§1. Высказывания и операции над ними

Высказывание – это повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно. Рассмотрим следующие предложения.

A = “Число $\sqrt{2}$ является иррациональным”.

B = “Неверно, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным”.

C = “Число $\sqrt{2}+1$ является иррациональным”.

D = “Если число $\sqrt{2}$ является иррациональным, то число $\sqrt{2}+1$ также является иррациональным”.

E = “Число x является иррациональным”.

F = “Который час?”

G = “Идите решать задачу к доске!”

Первые четыре предложения являются высказываниями, последние три – нет. Предложения F и G не являются повествовательными, а значение истинности повествовательного предложения E зависит от того, какие значения получит переменная x (во второй главе подобные предложения будут названы предикатами). Высказывания A, C и D истинны, высказывание B – ложно. Более точно, *значение истинности* высказываний A, C и D *есть истина*, а *значение истинности* высказывания B *есть ложь*. **В дальнейшем истину будем обозначать символом *1*, а ложь – символом *0*.**

Проанализируем высказывания A – D с точки зрения их "внутреннего строения". Высказывания A и C можно назвать простыми, высказывания B и D – составными, полученными из простых высказываний A и C. Этот пример показывает, что в языке (в данном случае, в русском языке) существуют способы построения одних высказываний из других, которые мы будем называть *операциями*. В естественных языках существует много таких операций. Мы выделим в качестве основных пять операций.

Определение. Пусть X и Y – некоторые высказывания. Тогда высказывание

1) "X и Y" называется *конъюнкцией* высказываний X и Y;
2) "X или Y" называется *дизъюнкцией* высказываний X и Y;
3) "не X" называется *отрицанием* высказывания X;
4) "если X, то Y" называется *импликацией* высказываний X и Y;
5) "X тогда и только тогда, когда Y" называется *эквиваленцией* высказываний X и Y.

Зависимость значения истинности новых высказываний от значений истинности исходных высказываний определяется *таблицей истинности связок* (см. таблицу 1.1). Напомним, что единица означает, что высказывание истинно, а ноль – ложно.

Таблица 1.1

X	Y	$X\&Y$	$X\vee Y$	$\neg X$	$X\to Y$	$X\leftrightarrow Y$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1

Можно сказать, что таблица 1.1 содержит пять таблиц истинности, по одной для каждой из связок. Эти пять таблиц для удобства объединены в одну.

Прокомментируем таблицы истинности дизъюнкции и импликации. В русском языке союз "или" понимается в двух смыслах: *разделительном* – или то, или другое, но не оба, и *соединительном* – или то, или другое, или оба. Как видно из таблицы 1.1, союз "или" мы будем понимать в соединительном смысле. Перейдем к импликации. Если дана импликация $X \rightarrow Y$, то высказывание X называется *посылкой* импликации, а Y – *заключением*. Если посылка X импликации ложна, то вся импликация $X \rightarrow Y$ истинна (см. третью и

четвертую строки таблицы 1.1). Это свойство импликации часто формулируют в виде следующего принципа: "из ложного утверждения(имеется в виду X) следует все что угодно (имеется в виду Y)". В силу этого следующее высказывание "если $2 \cdot 2 = 5$, то π – иррациональное число" является истинным, поскольку оно представляет собой импликацию, посылка которой ложна. Подчеркнем, что при этом не надо искать доказательство или опровержение того, что π – иррациональное число. Аналогично, первая и третья строки таблицы 1.1 показывают нам, что если заключение Y импликации истинно, то вся импликация $X \rightarrow Y$ также истинна. Это свойство импликации тоже формулируют в виде принципа: "истинное утверждение (имеется в виду Y) следует из чего угодно (имеется в виду X)". Из этого принципа сразу следует истинность высказывания "если π – ирррациональное число, то $2 \cdot 2 = 4$", поскольку оно представляет собой

§2. Формулы логики высказываний, интерпретация

В первом параграфе высказывания были введены как повествовательные предложения естественного языка, т.е. как лингвистические объекты. Для изучения этих объектов математическими средствами используется понятие формулы логики высказываний. Дадим соответствующие определения.

Определение. *Атомарными формулами логики высказываний* называются выбранные буквы латинского алфавита с индексами и без них.

В качестве выбранных букв мы будем использовать U, V, W, X, Y, Z.

Приведем пример. Буквы X,Y,Z – атомарные формулы. В силу первого пункта определения эти буквы являются формулами логики высказываний, а в силу второго формулами являются выражения $(X)\&(Y)$, $((X)\&(Y)) \to (Z)$. Мы видим, что если строго следовать определению, в формуле надо писать много скобок. Это неудобно для восприятия формулы. Чтобы уменьшить количество скобок условимся, во-первых, атомарные формулы в скобки не заключать, во-вторых, ввести приоритет (силу связывания) для связок. Будем считать, что $\neg$ имеет наивысший приоритет, & и $\vee$ имеют одинаковый приоритет, который выше, чем y $\to$ и $\leftrightarrow$. Последние две связки имеют одинаковый приоритет. Используя эти соглашения, формулу $((X)\&(Y)) \to (Z)$ можно записать так: $X\&Y \to Z$. Отметим, что поскольку мы не упорядочили & и $\vee$ по силе связывания, то выражение $X\&Y\vee Z$ не является формулой. Надо в этом выражении поставить скобки, определяющие порядок выполнения операций. Получатся две формулы $(X\&Y) \vee Z$ и $X \& (Y\vee Z)$.

В дальнейшем нам понадобится понятие подформулы. Попросту говоря, подформула формулы F – это “слитная” часть, которая сама является формулой. На строгом уровне это понятие вводится следующим образом.

Определение. *Подформулой* атомарной формулы является она сама. *Подформулами* формулы $\neg F$ являются формула $\neg F$ и все ее подформулы. Подформулами формул $F\&G$, $F \vee G$, $F \to G$, $F \leftrightarrow G$ являются они сами и все подформулы формул F и G.

Например, формула $F = X\&Y \to X \vee Z$ имеет шесть подформул: X, Y, Z, $X\&Y$, $X \vee Z$, $X\&Y \to X \vee Z$.

Теперь необходимо соотнести понятие высказывания и формулы. На самом простом уровне формула – это *форма* для получения высказываний. Пусть, например, дана формула $F = X\&Y \to Z$. Поставим вместо X, Y и Z соответственно высказывания A_1 = “четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом”, A_2 = “в четырехугольнике $ABCD$ смежные стороны равны”, A_3 = “в четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны”, то получим высказывание A_4 = “если четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом и его смежные стороны равны, то диагонали перпендикулярны”. Это высказывание получилось “по форме” F. Если вместо X, Y и Z подставить другие высказывания, то получим новое высказывание, имеющее ту же “форму”.

На строгом уровне сказанное в предыдущем абзаце оформляется в виде понятия интерпретации.

Обозначим через $\boldsymbol{A}$ множество атомарных, а через $\boldsymbol{F}$ – множество всех формул логики высказываний. Зафиксируем некоторую совокупность высказываний P, удовлетворяющую следующим условиям:

1) какие бы два высказывания из P мы ни взяли, P содержит их конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и эквиваленцию,

2) P содержит отрицание каждого из высказываний, принадлежащих P.

Интерпретацией в широком смысле мы будем называть произвольную функцию

$$\varphi : \boldsymbol{A} \to P.$$

Такая функция, определенная на множестве атомарных формул, естественным образом распространяется на множество всех формул. Выше был приведен пример интерпретации в широком смысле. В этом примере совокупность P содержала высказывания $A_1 - A_4$, а интерпретация φ на атомарных формулах X, Y, Z действовала так: $\varphi(X) = A_1$, $\varphi(Y) = A_2$, $\varphi(Z) = A_3$. Естественное расширение φ на множество всех формул будем обозначать той же буквой. Тогда $\varphi(F) = A_4$.

В дальнейшем от высказываний $\varphi(F)$ нам на самом деле будут нужны только их истинностные значения *1* и *0*. Введем поэтому более узкое понятие интерпретации.

Определение. *Интерпретацией в узком смысле* (или просто *интерпретацией*) называется функция

$$\varphi\colon \mathbf{A} \to \{0, 1\}.$$

Используя таблицы истинности связок, интерпретацию можно расширить на множество всех формул. Приведем пример. Пусть $\varphi(X) = 1$, $\varphi(Y) = 0$, $\varphi(Z) = 1$, $F = X \vee Y \to Z$, $G = X \& Y \leftrightarrow X \& Z$. Тогда $\varphi(F) = 1$, $\varphi(G) = 0$.

Составление таблиц истинности

Пример 2.3 $F(X,Y) = (X \to Y) \vee (Y \to X)$

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(X \to Y)$	$\lambda(Y \to X)$	$\lambda((X \to Y) \vee (Y \to X))$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Пример 2.4 $F(P,Q,R)=(P\wedge Q)\to(P\leftrightarrow\neg R)$

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(R)$	$\lambda(P\wedge Q)$	$\lambda(\neg R)$	$\lambda(P\leftrightarrow\neg R)$	$\lambda(F)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Сокращенная таблица истинности

$(X$	$\wedge$	$\neg Y)$	$\leftrightarrow$	$(\neg X$	$\vee$	$Y)$
0	0	1	**0**	1	1	0
0	0	0	**0**	1	1	1
1	1	1	**0**	0	0	0
1	0	0	**0**	0	1	1