

3.5. СОВЕРШЕННАЯ ДИЗЬЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (СДНФ) И СОВЕРШЕННАЯ КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (СКНФ)

СДНФ и СКНФ — это два представления булевой функции. Конъюнкция или дизъюнкция называются элементарными, если каждая переменная встречается в них не более 1 раза. Количество переменных в них называется рангом.

СДНФ

Записывается на единичных наборах булевой функции.

Содержит элементарные конъюнкции, соединенные дизъюнкциями.

Каждая конъюнкция содержит все переменные по одному разу.

СКНФ

Записывается на нулевых наборах булевой функции.

Содержит элементарные дизъюнкции, соединенные конъюнкциями.

Каждая дизъюнкция содержит все переменные по одному разу.

Алгоритм построения:

СДНФ

Выделить в таблице истинности все строки, в которых функция равна 1.

Для каждого выбранного набора записать конъюнкции:

Если переменная равна 0, то записывается ее инверсия, а если она равна 1, то пишут без изменения.

Соединяют все конъюнкции знаком дизъюнкции.

СКНФ

Выделить в таблице истинности все строки, в которых функция равна 0.

Для каждого выбранного набора записать дизъюнкции:

Если переменная равна 0, то ее пишут без изменения, а если она равна 1, то пишут ее инверсию.

Соединяют все дизъюнкции знаком конъюнкции.

ПРИМЕР.

Записать СДНФ и СКНФ функции трёх переменных:

$$f = \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot (\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3})}$$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

СДНФ:

$$\begin{aligned} f &= \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot (\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3})} = \\ &= \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \vee} \\ &\quad \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \end{aligned}$$

СДНФ можно записывать не только на единичных, но и на нулевых значениях аргументов:

$$\begin{aligned} f &= \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot (\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3})} = \\ &= \overline{x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3} \end{aligned}$$

С помощью элементарных преобразований можно доказать равносильность функции на единичных и нулевых наборах:

$$f = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_2 = \bar{x}_1 \vee x_1 \cdot x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$$

$$f = \overline{x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3} = \overline{x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_3 \vee x_3)} = \overline{x_1 \cdot \bar{x}_2} = \bar{x}_1 \vee x_2$$