Моделирование

Моделирование

§ 6. Модели и моделирование

Модели и моделирование

Модель – это объект, который обладает существенными свойствами другого объекта, процесса или явления (*оригинала*) и используется вместо него.

Моделирование – это создание и исследование моделей с целью изучения оригиналов.

Задачи моделирования:

- **исследование** оригинала
- **анализ** («что будет, если …»)
- **синтез** («как сделать, чтобы …»)
- **оптимизация** («как сделать лучше всего …»)

Виды моделей (по природе)

- модели
  - материальные
  - информационные
    - знаковые
      - графические
      - табличные
      - математические
      - логические
      - специальные
    - вербальные

Виды моделей (по фактору времени)

- **статические** – описывают оригинал в заданный момент времени
  - силы, действующие на тело в состоянии покоя
  - результаты осмотра врача
  - фотография
- **динамические**
  - модель движения тела
  - явления природы (молния, землетрясение, цунами)
  - история болезни
  - видеозапись события
  - …

дискретные модели описывают поведение только в отдельные моменты времени

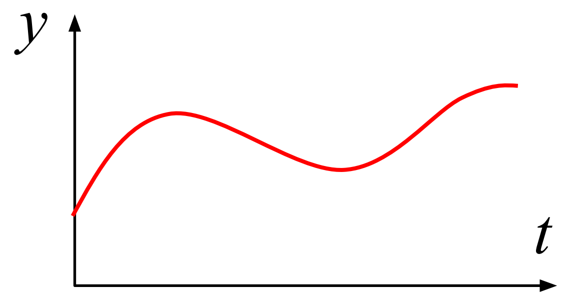
непрерывные модели – в любой момент времени

Виды моделей (по характеру связей)

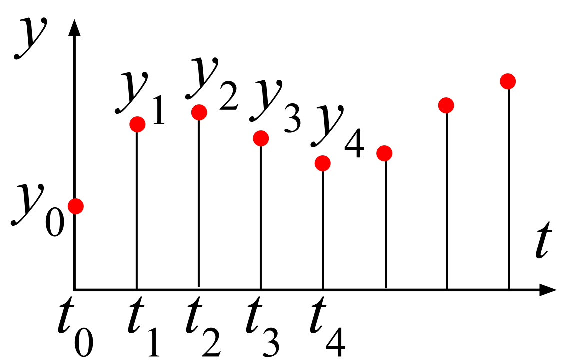
- **детерминированные** – при одинаковых исходных данных всегда получается тот же результат
  - расчёт по формулам
  - движение корабля на спокойной воде
  - …
- **вероятностные** – учитывают случайность событий
  - броуновское движение частиц
  - полета самолёта с учетом ветра
  - движения корабля на волнении
  - поведение человека
  - …

Виды динамических моделей

- **непрерывные** – описывают оригинал в любой момент времени на заданном интервале
  - $y = 2t + 5$



- **дискретные** – описывают оригинал только в отдельные моменты времени (через 1 сек, час, год, …)
  - $y_i = 2t_i + 5$
  - $y_i = 5y_{i-1} + 5$



Имитационные модели

- нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, но можно имитировать её реакцию на внешние воздействия
- максимальный учет всех факторов
- только численные результаты

! Задача – найти лучшее решение **методом проб и ошибок** (многократные эксперименты)!

Примеры:
- испытания лекарств на мышах, обезьянах, …
- математическое моделирование биологических систем
- модели систем массового обслуживания
- модели процесса обучения
- кросс-программирование
- …

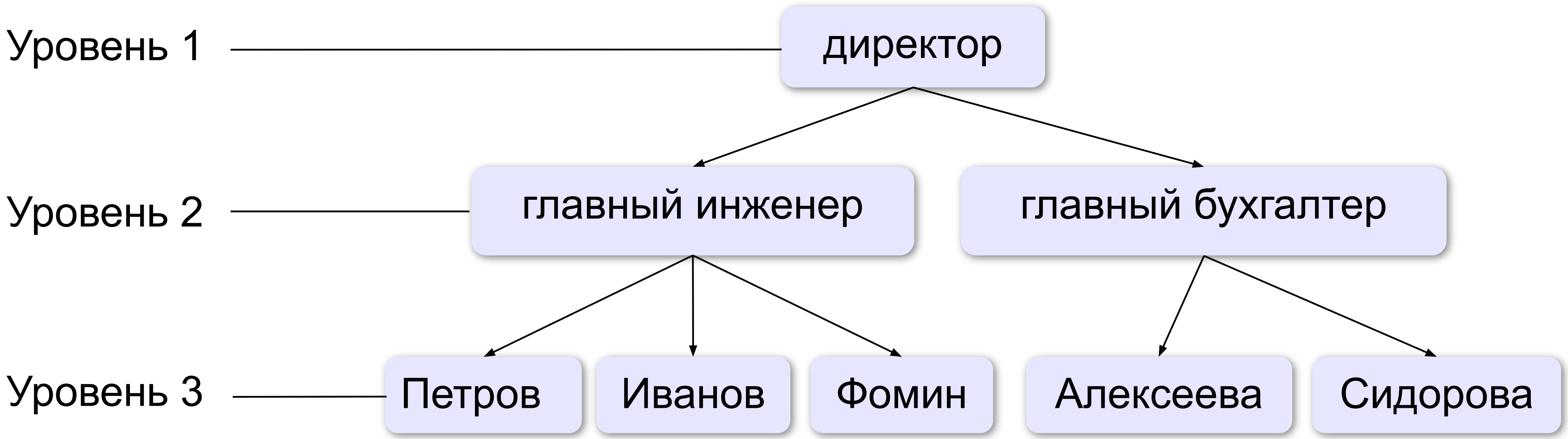
Игровые модели

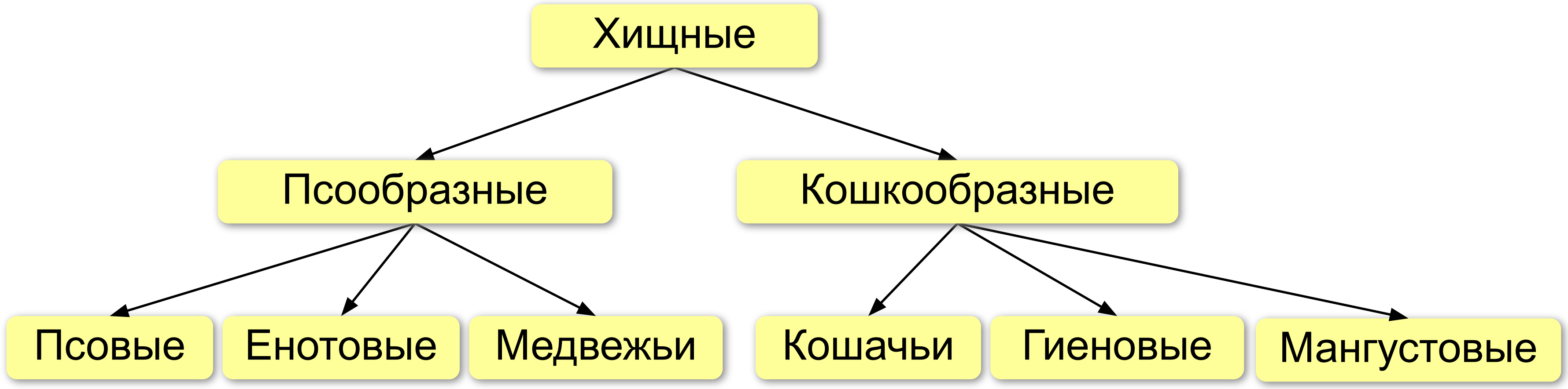
Игровые модели учитывают действия **противников**.

- экономические ситуации
- военные действия
- спортивные игры
- тренинги персонала

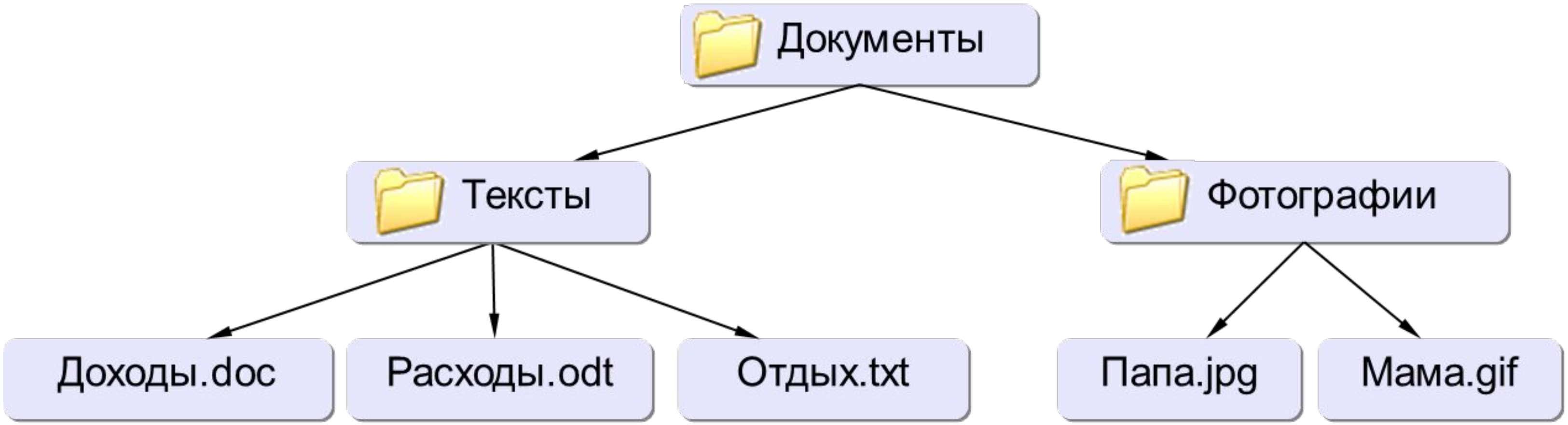
! Задача – найти **лучший вариант действий в самом худшем случае**!

Иерархические модели

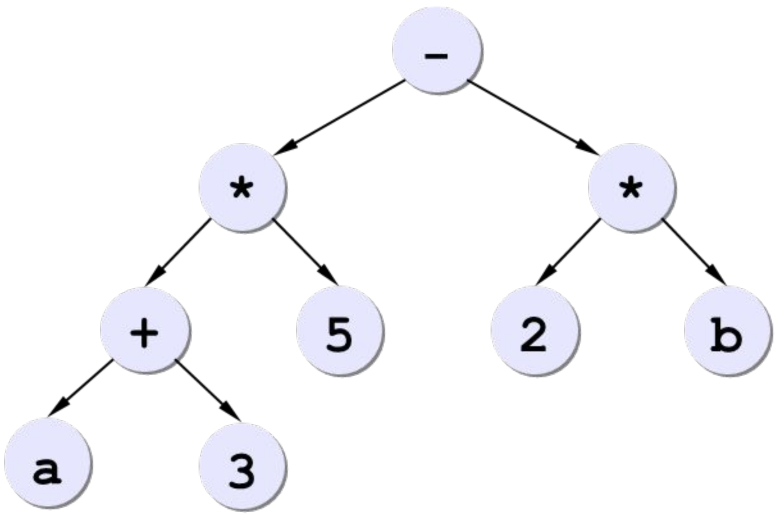




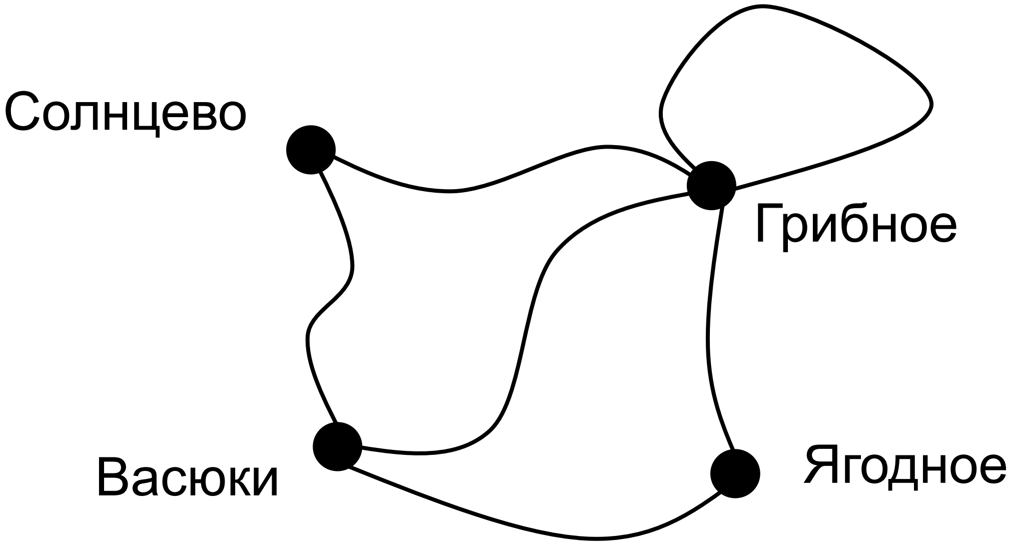
Иерархические модели

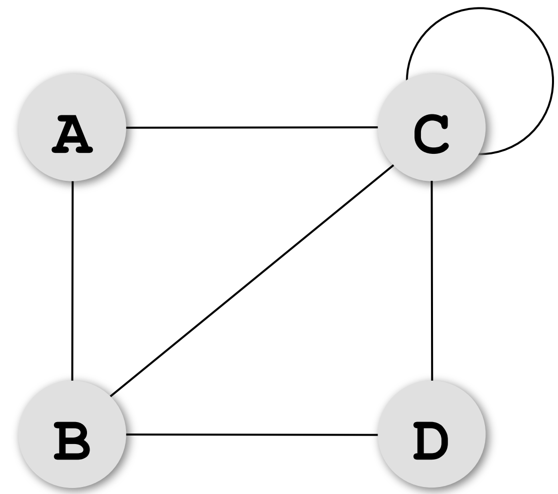


(a+3)*5-2*b



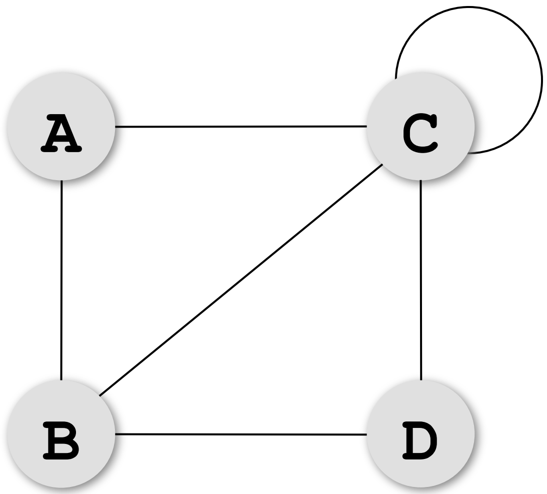
Графы





Граф – это набор вершин (узлов) и связей между ними (рёбер).

Матрица и список смежности



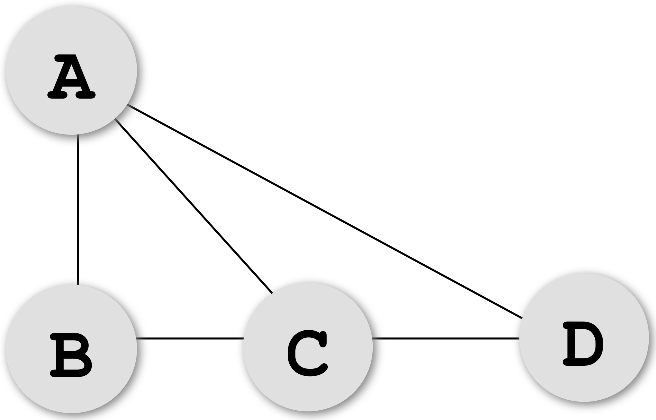
Матрица смежности

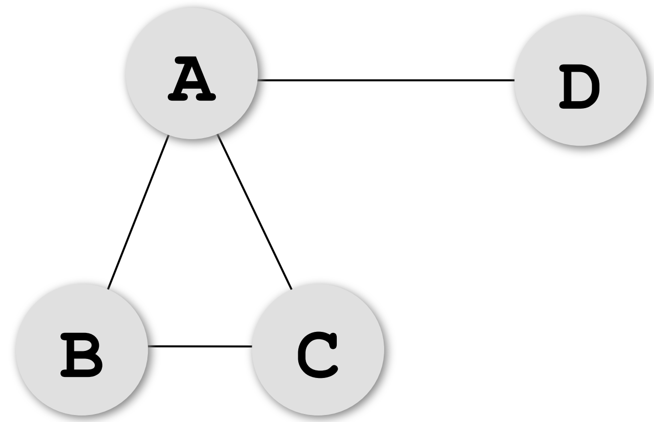
	A	B	C	D	
A	0	1	1	0	**2**
B	1	0	1	1	**3**
C	1	1	1	1	**5**
D	0	1	1	0	**2**

петля

Степень вершины – это количество связанных с ней рёбер (петля считается дважды!).

Постройте матрицу смежности





	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

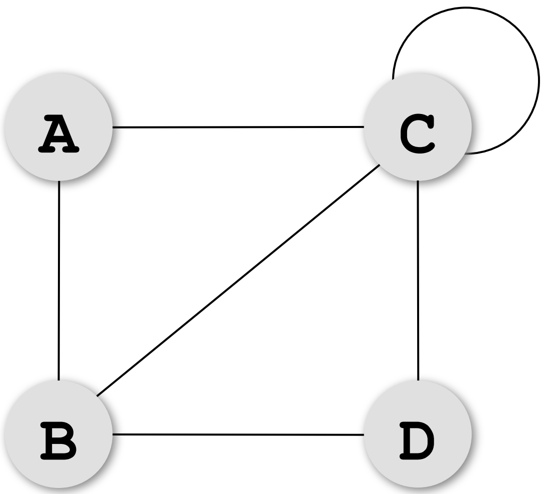
	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Нарисуйте граф

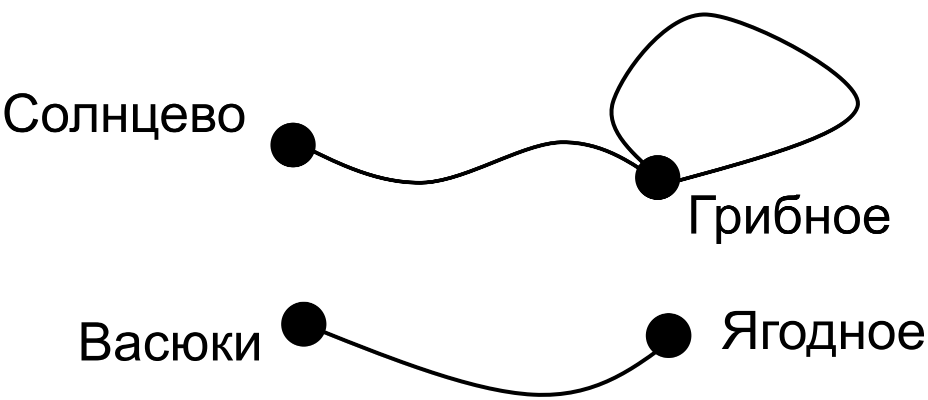
	A	B	C	D
A	0	0	1	1
B	0	0	1	0
C	1	1	0	0
D	1	0	0	0

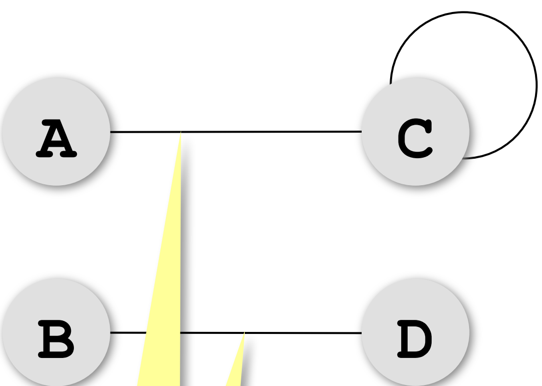
	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	1	0	1	0
C	0	1	0	1
D	1	0	1	0

Связность графа



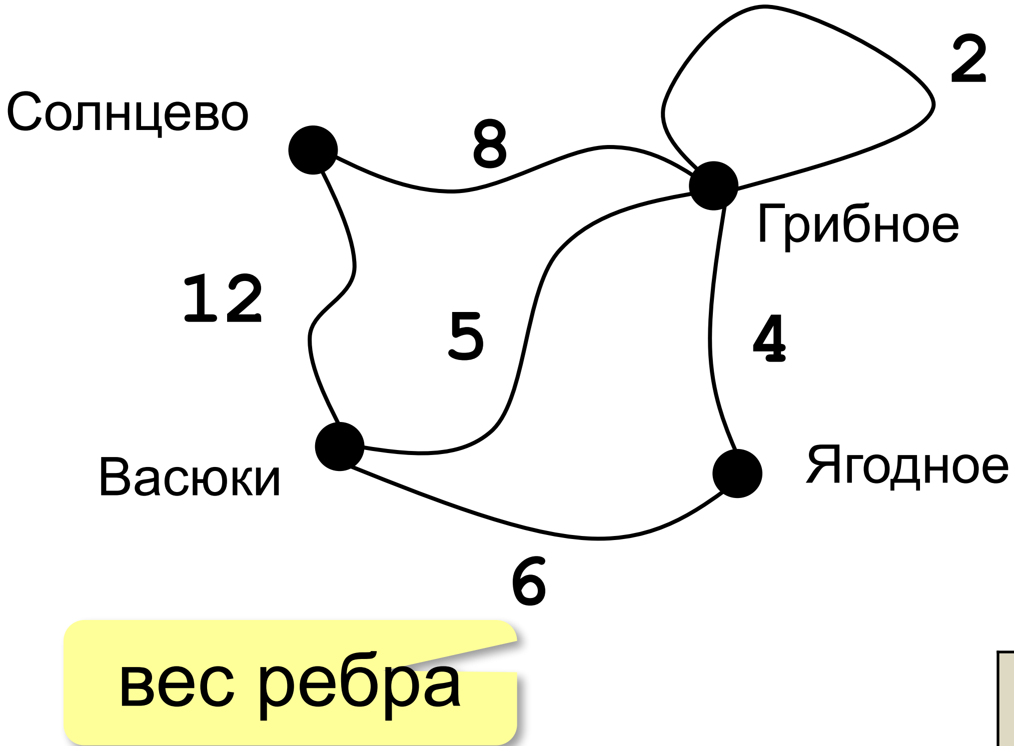
Связный граф – это граф, между любыми вершинами которого существует путь.

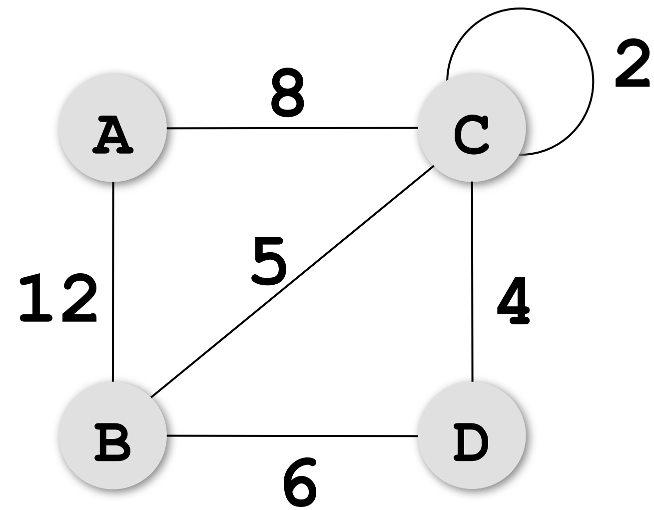




компоненты связности

Взвешенные графы

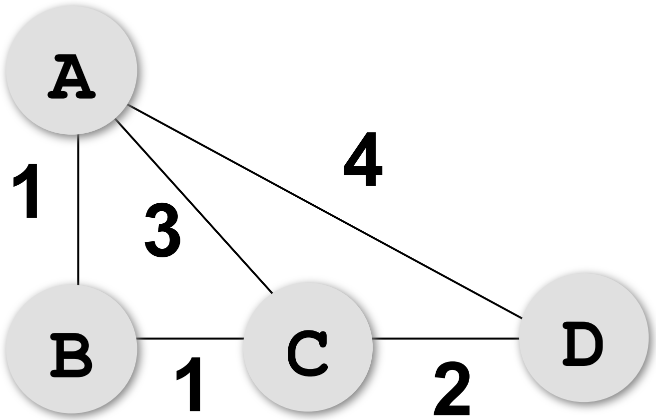


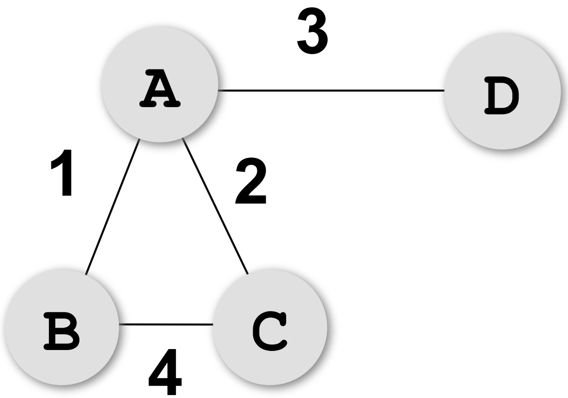


Весовая матрица:

	A	B	C	D
A		12	8	
B	12		5	6
C	8	5	2	4
D		6	4	

Постройте весовую матрицу



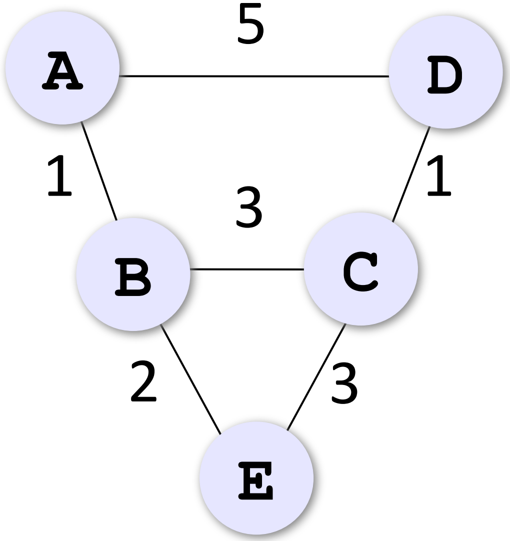


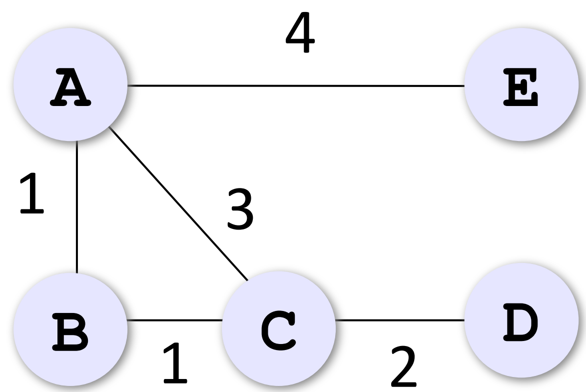
	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

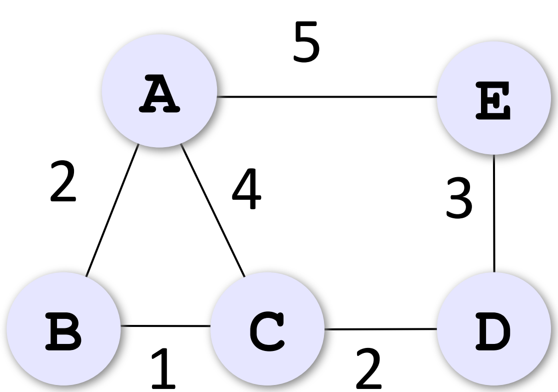
	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

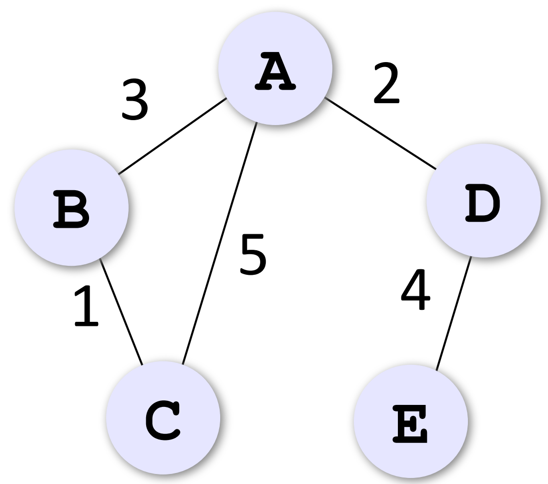
Задачи

Построить матрицы смежности и весовые матрицы.









Адекватность

Адекватность – это совпадение существенных свойств модели и оригинала в данной задаче.

- результаты моделирования согласуются с выводами теории (законы сохранения и т.п.)
- … подтверждаются экспериментом (±10%)

! Адекватность модели можно доказать только экспериментом!

Модель всегда отличается от оригинала

↓

! Любая модель адекватна только при определенных условиях!

Моделирование

§ 7. Игровые модели

Игровые стратегии

? Какая задача?

Задача: найти **стратегию** (алгоритм игры), который позволит получить лучший результат, если соперники играют безошибочно.

Игры с полной информацией: можно определить, кто должен выиграть, по начальной позиции.

Позиции:

- **проигрышные** – все возможные ходы ведут в выигрышные позиции
- **выигрышные** – хотя бы один ход ведёт в проигрышную позицию

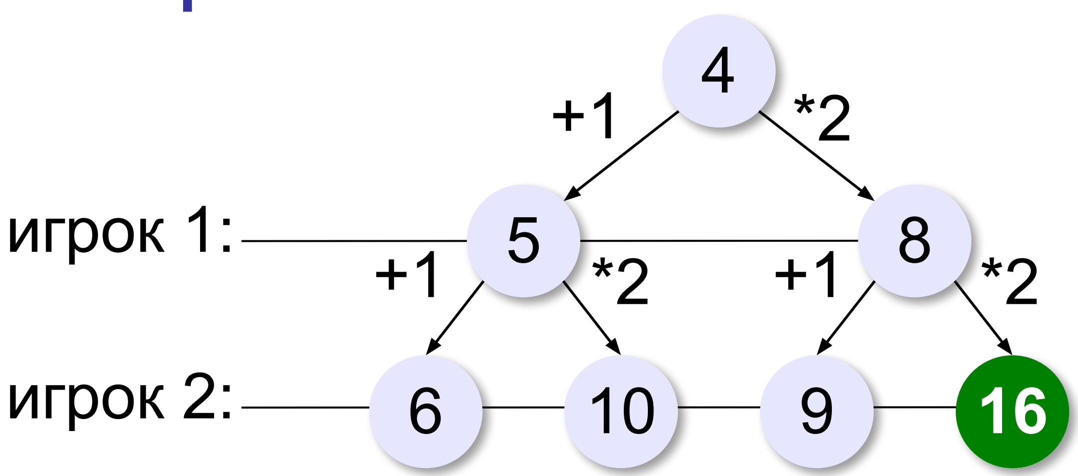
Задача с кучей камней

В начале игры S камней. Ходы: «+1» (добавить 1) и «*2» (удвоить). Выигрыш: получить ≥ 14 камней.

выигрыш за 1 ход

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	$П_3$	$В_3$	$В_2$	$П_2$	$В_2$	$П_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$

Дерево игры:

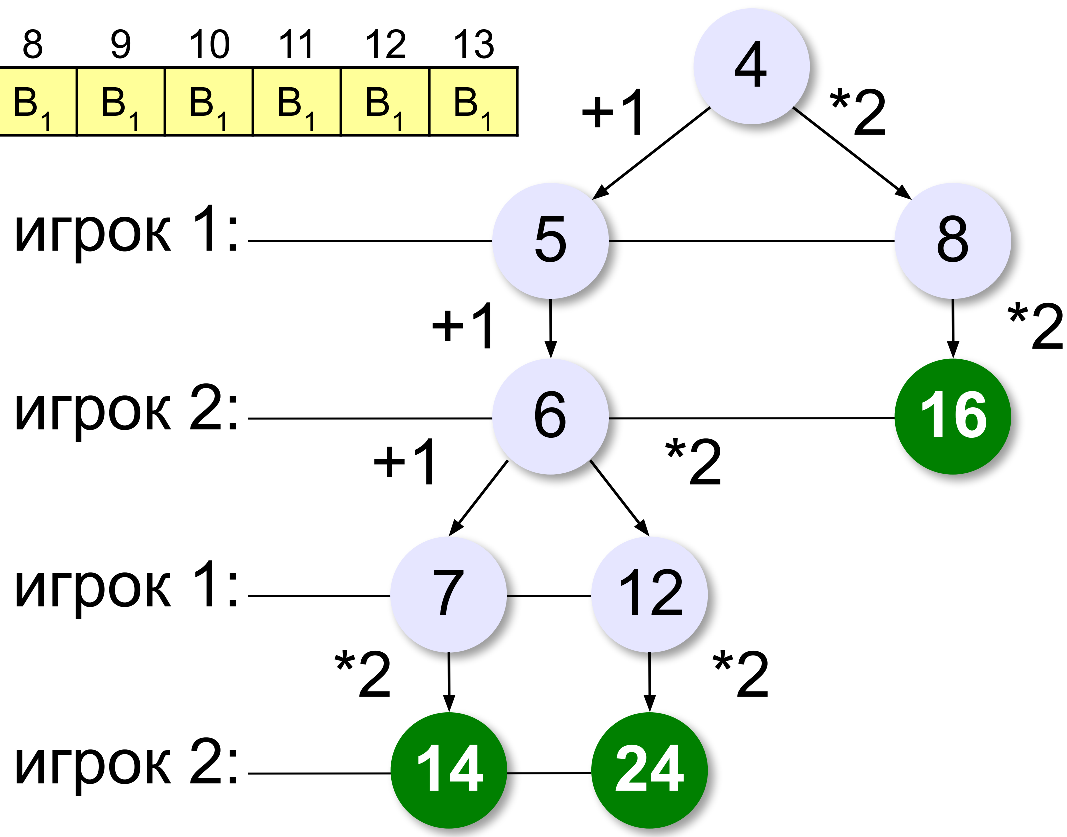


Неполное дерево игры

Задача: доказать выигрыш какого-то игрока.

Для победителя – только 1 **верный ход**, для проигравшего – **все возможные** ответы.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	П$_3$	В$_3$	В$_2$	П$_2$	В$_2$	П$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$



? Какая стратегия у игрока 2?

переводить игру в проигрышную (для соперника) позицию

Задачи

1. В начале игры S камней. Ходы: «**+2**» (добавить 2) и «***2**» (удвоить). Выигрыш: получить ≥ **25** камней. Построить дерево игры для $S = 7$.
2. В начале игры S камней. Ходы: «**+1**» (добавить 1) и «***3**» (утроить). Выигрыш: получить ≥ **55** камней. Построить дерево игры для $S = 16$.
3. В начале игры S камней. Ходы: «**+2**» (добавить 2), «**+3**» (добавить 3) и «***2**» (удвоить). Выигрыш: получить ≥ **30** камней.
   Построить дерево игры для $S = 9$.
4. **Игра Баше.** В начале игры S ($S \le 15$) камней. Ходы: «**-1**» (взять 1), «**-2**» (взять 2) и «**-3**» (взять 3).
   Проигрыш: взять последний камень.
   Построить дерево игры для $S = 12$.

Задача с двумя кучами камней

В начале игры в одной куче 5 камней, во второй – S камней. Ходы: «+1» (добавить 1) и «*2» (удвоить) для одной из куч. Выигрыш: получить ≥ 15 камней в двух кучах.

во второй куче

(5, 7)

во первой куче

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	$П_2$	$В_2$	$В_2$	$П_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$
6	$В_2$	$П_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	
7	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$		
8	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$			

15+

(5, 4) $П_1$

(6, 4)	(5, 5)	(10, 4)	(5, 8)
$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$

(6, 2) $П_1$

(7, 2)	(6, 3)	(12, 2)	(6, 4)
$В_1$	$В_1$	$В_1$	$В_1$

Неполное дерево игры

выигрывает игрок 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	П$_2$	В$_2$	В$_2$	П$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$
6	В$_2$	П$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	
7	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$		
8	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$	В$_1$			

В виде таблицы:

все ходы

<table>
<tr><th></th><th>игрок 1</th><th>игрок 2</th><th>игрок 1</th><th>игрок 2</th></tr>
<tr><td rowspan="5">(5, 1)</td><td rowspan="2">(6, 1)</td><td rowspan="4">(6, 2)</td><td>(7, 2)</td><td>(14, 2)</td></tr>
<tr><td>(6, 3)</td><td>(12, 3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(5, 2)</td><td>(12, 2)</td><td rowspan="2">(12, 4)</td></tr>
<tr><td>(6, 4)</td></tr>
<tr><td>(10, 1)</td><td>(20, 1)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

только выигрышный ход

Моделирование

§ 8. Модели мышления

Искусственный интеллект

Задача: моделирование мышления человека для решения сложных задач, которые не удаётся решить алгоритмически.

- **экспертные системы**

моделируют ход рассуждений человека-эксперта при принятии решений в сложных ситуациях:

ЕСЛИ *у человека повышенная температура*
ТО *он нездоров*

дедукция: от общих принципов к конкретному случаю

- **нейрокомпьютеры (нейросети)**

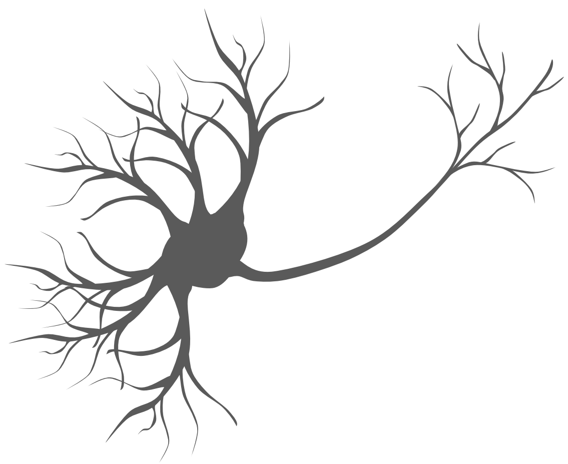
поиск алгоритмов решения на основе анализа многих частных случаев (обучение)

индукция: от конкретных случаев к общему правилу

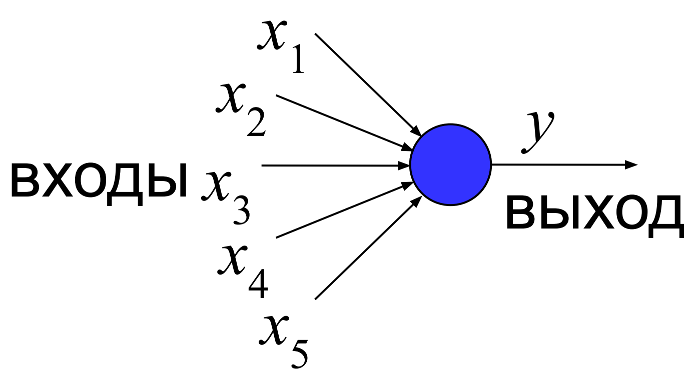
Модель нейрона

Нейрон – клетка головного мозга.

дендриты
приём сигналов
до 10000



аксон
передача сигнала



Модель нейрона

Модель У. Мак-Каллока и В. Питтса (1943)

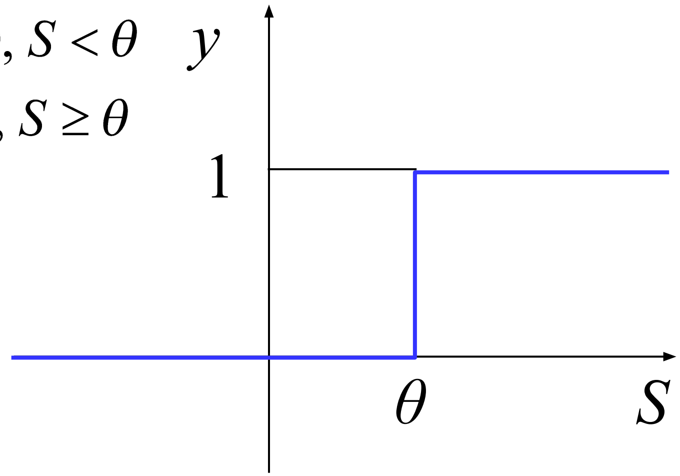
$$S = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4x_4 + w_5x_5$$

w_i – весовые коэффициенты

Активационные функции

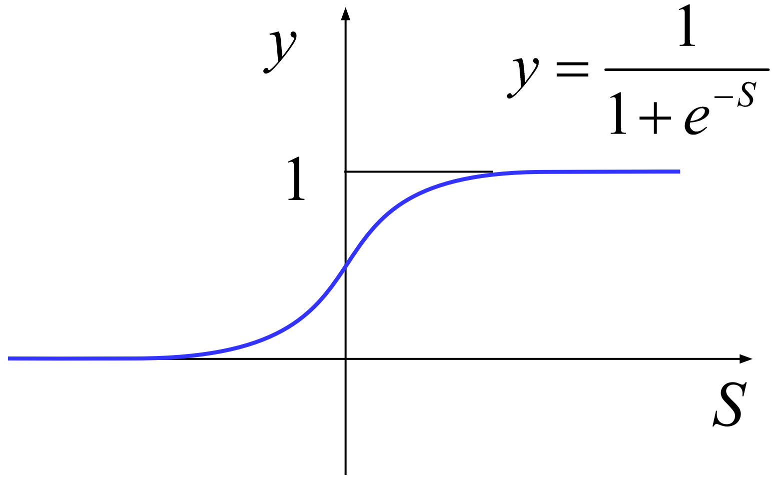
ступенчатая

$$y = \begin{cases} 0, & S < \theta \\ 1, & S \geq \theta \end{cases}$$



сигмоидная

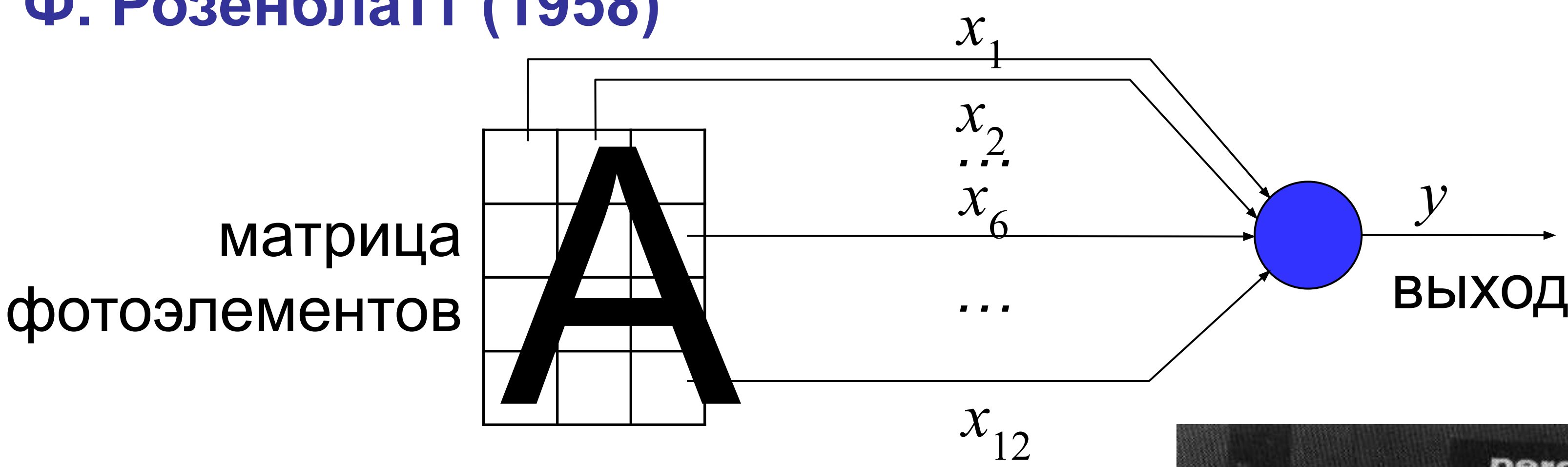
$$y = \frac{1}{1 + e^{-S}}$$

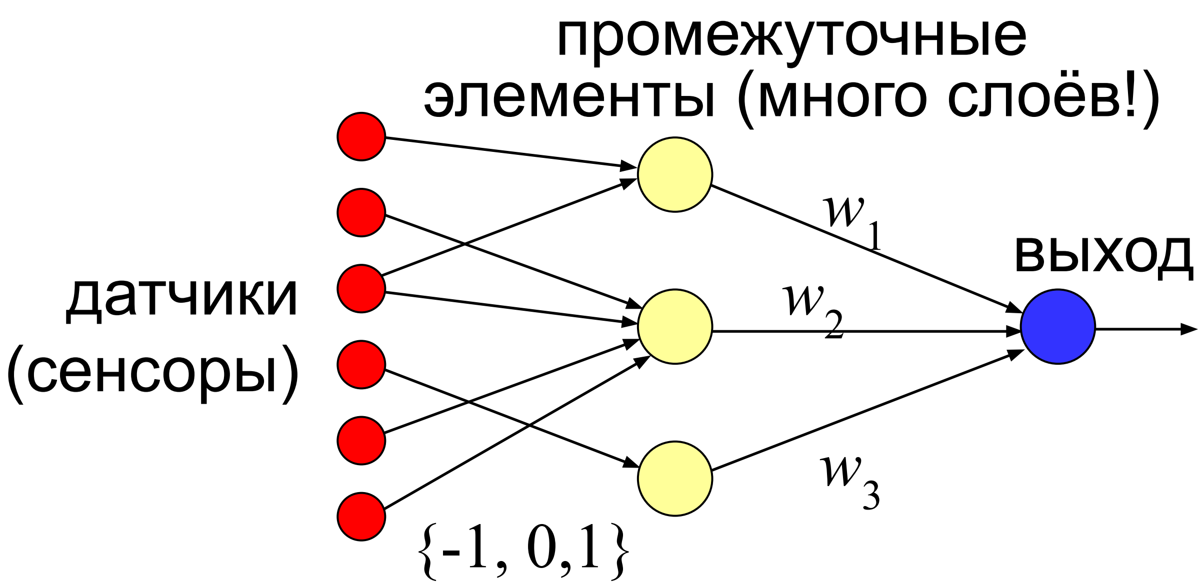


порог чувствительности

Персептрон

Ф. Розенблатт (1958)





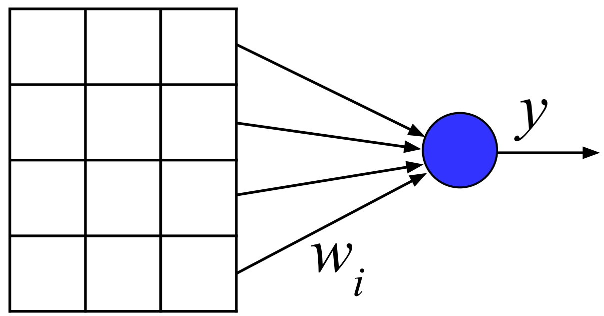
Первый нейрокомпьютер «Марк-1» (1960)

Обучение нейронной сети

? Как выбрать весовые коэффициенты w_i?

обучение!

Пример:



сравнение с известным ответом

$$w_i \leftarrow w_i + x_i \text{ при } y = 0$$

$$w_i \leftarrow w_i - x_i \text{ при } y = 1$$

Правила Хэбба:

0 вместо 1: увеличить веса входов, равных 1.

1 вместо 0: уменьшить веса входов, равных 1.

Применение нейронных сетей

много примеров, но нет теории (алгоритма)

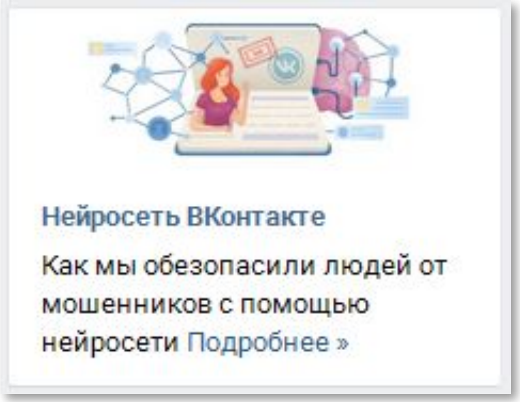
- **распознавание** (лиц, голосов, отпечатков пальцев)
- **классификация** (платёжеспособность клиента, проверка подлинности подписи, постановка диагноза)
- **прогнозирование** (курсов валют, цен на сырьё)

БАНК РОССИИ

МЧС РФ

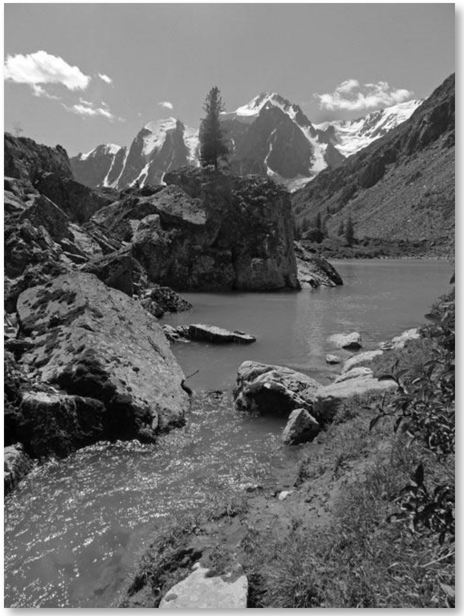
ФЕДЕРАЛЬНАЯ НАЛОГОВАЯ СЛУЖБА

СБЕРБАНК
Всегда рядом

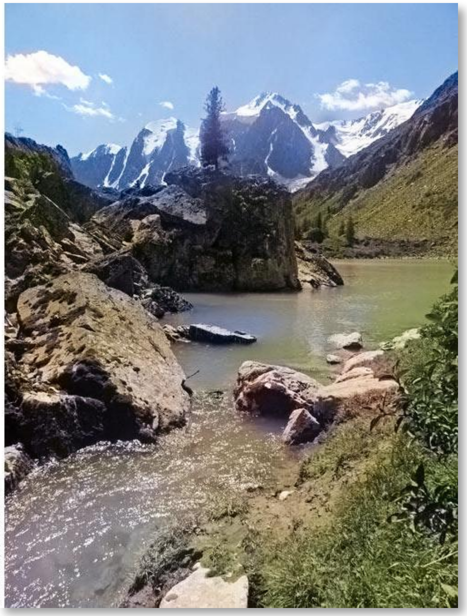


Раскрашивание фотографий

чёрно-белое фото

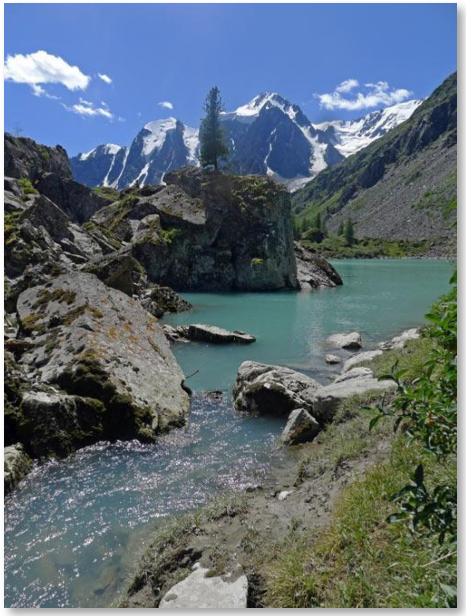


это сделала нейронная сеть



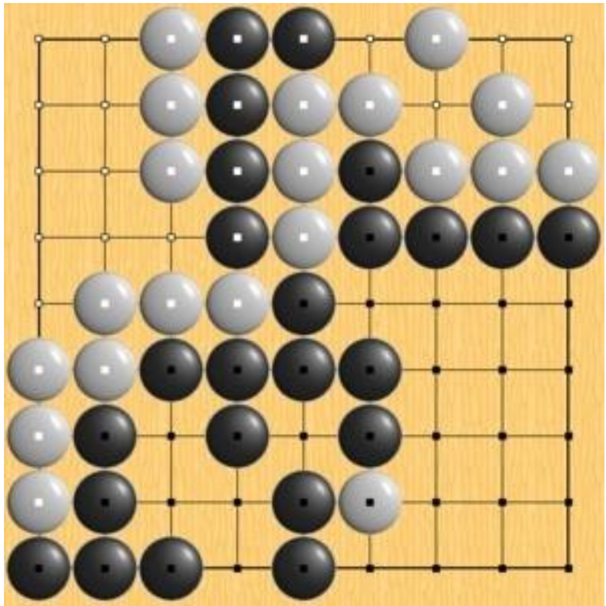
color.artlebedev.ru

цветное фото



Интеллектуальные игры

игра «го»



Google DeepMind

1:4

Ли Седоль

Беспилотные автомобили

Нейронные сети: итоги

- могут работать при неопределенности данных, в условиях помех
- обрабатывают информацию параллельно
- способны самообучаться

- не используют и не выявляют законы природы
- не могут объяснить результат

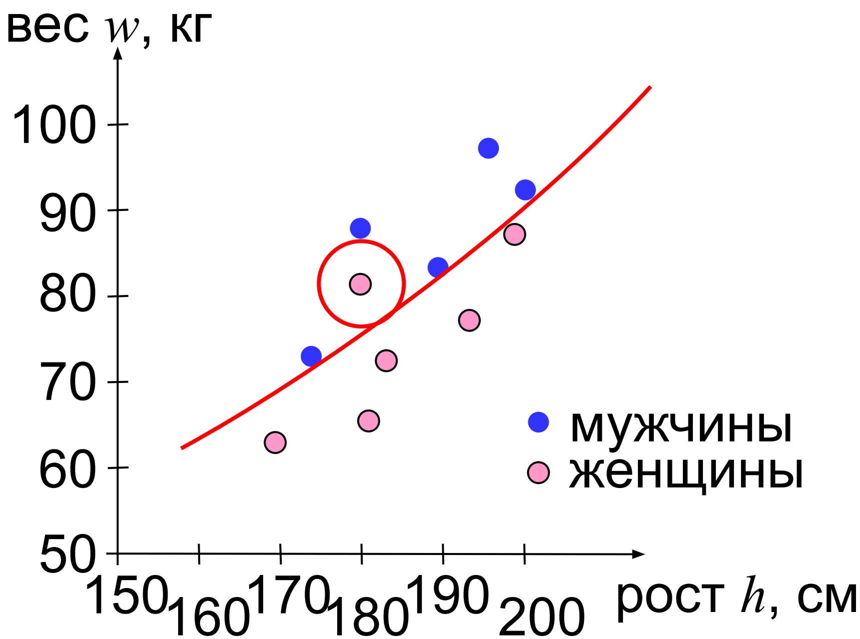
Машинное обучение

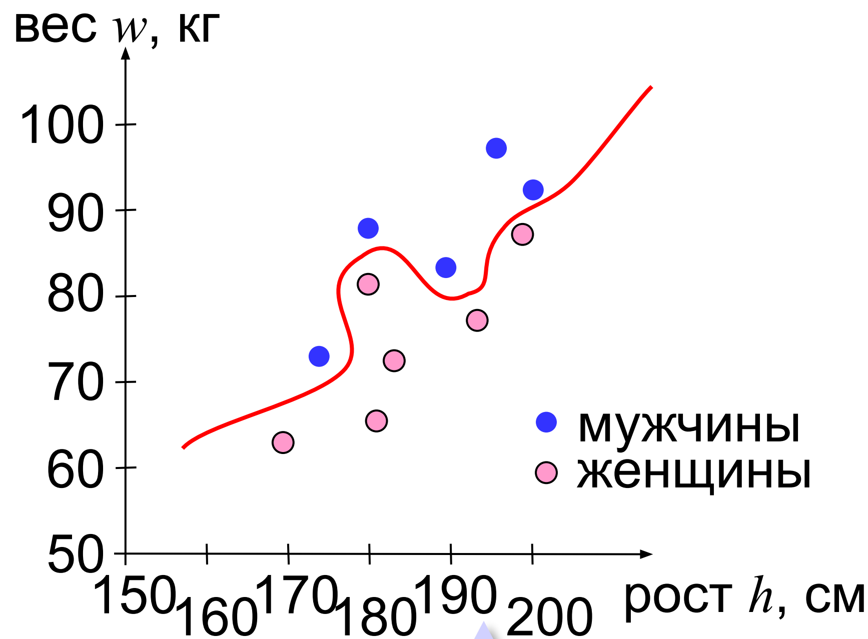
Machine Learning

? Накоплено много данных. Как сделать выводы?

Задача машинного обучения – разработка автоматических методов анализа данных и извлечения из них каких-то закономерностей.

Задача классификации





Метод ближайшего соседа:

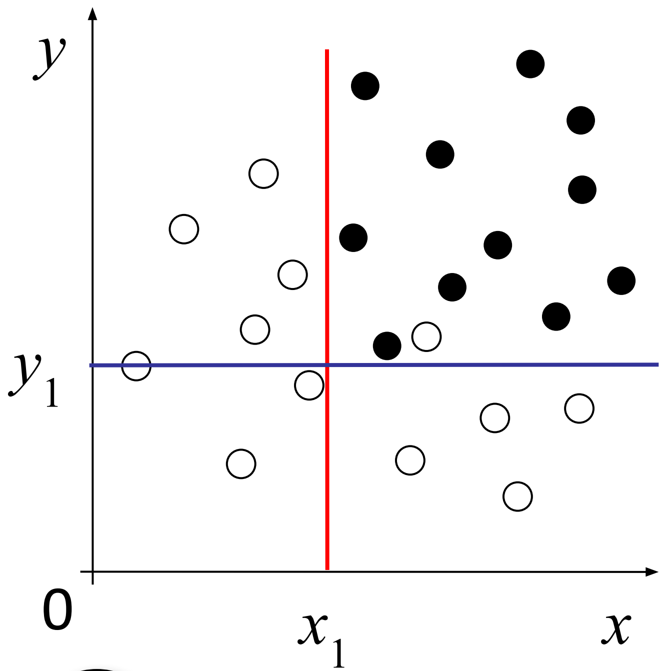
Расстояние:

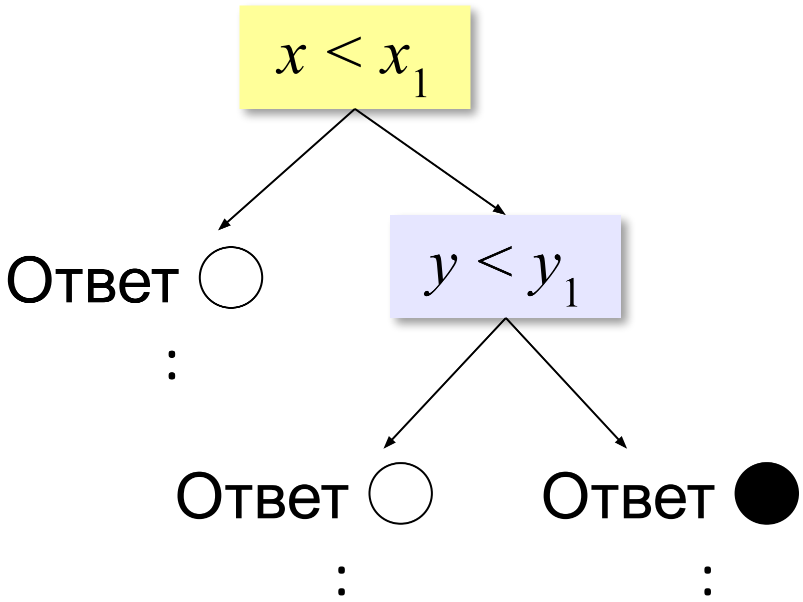
$$L = \sqrt{(h-h_0)^2 + (w-w_0)^2}$$

(h_0, w_0) – ближайший сосед

! Переобучение: может быть плохо на новых данных!

Дерево решений





? Когда даст неверный ответ?

? Что делать?

Применение машинного обучения

- классификация
- распознавания образов
- предсказание
- анализ текстов
- машинный перевод
- ранжирование страниц в поисковых системах
- рекомендации (музыка, реклама)

Большие данные (Big Data)

- имеют очень большой объём (терабайты и петабайты);
- не могут храниться и обрабатываться на одном компьютере.

Серверы Google: > 24 Пбайт в день

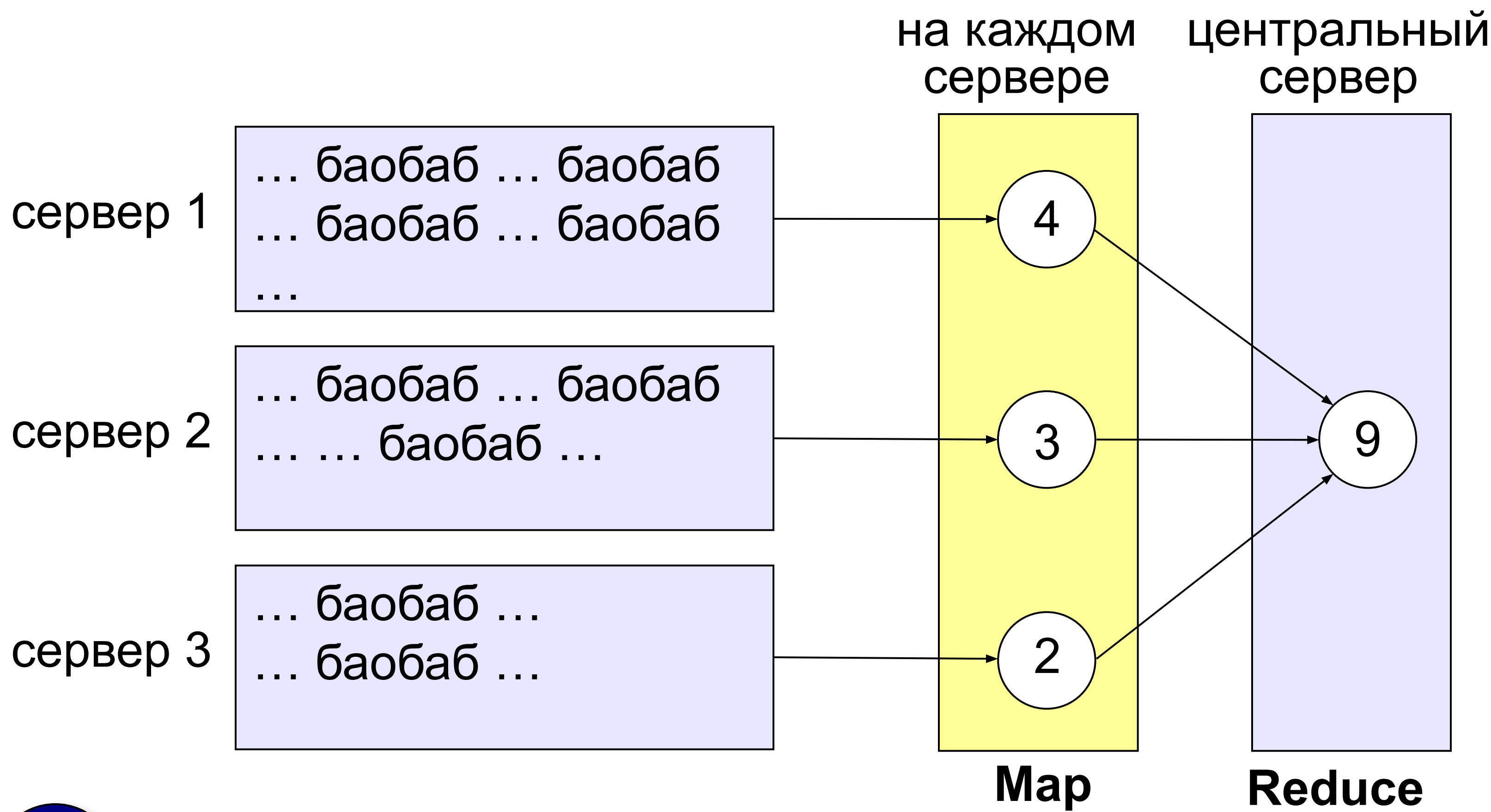
Часто такие данные

- поступают с **большой скоростью** (мегабайты и гигагабайты в секунду)
- очень **разнообразны** (числа, графика, видео)

Решение:

- распределённые базы данных
- кластеры для параллельной обработки

Алгоритм Map-Reduce



? Сколько слов «баобаб»?

Моделирование

§ 9. Этапы моделирования

I. Постановка задачи

- **исследование оригинала**
  изучение сущности объекта или явления
- **анализ («что будет, если …»)**
  научиться прогнозировать последствий при различных воздействиях на оригинал
- **синтез («как сделать, чтобы …»)**
  научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия
- **оптимизация («как сделать лучше»)**
  выбор наилучшего решения в заданных условиях

! Ошибки при постановке задачи приводят к наиболее тяжелым последствиям!

I. Постановка задачи

Хорошо поставленная задача:

- описаны все связи между исходными данными и результатом
- известны все исходные данные
- решение существует
- задача имеет единственное решение

Примеры плохо поставленных задач:

- Уроки в школе начинаются в 8^{30}. В 10^{00} к школе подъехал красный автомобиль. Определите, когда Вася выйдет играть в футбол?
- Вася бросает мяч со скоростью 12 м/с. Где мяч впервые ударится о землю?
- Решить уравнение $\sin x = 4$ (нет решений).
- Найти функцию, которая проходит через точки (0,1) и (1,0) (бесконечно много решений).

I. Постановка задачи (пример)

Спортсмен Вася в синей кепке бросает белый мяч со скоростью 12 м/с. Под каким углом к горизонту ему нужно бросить мяч, чтобы попасть в желтую мишень?

? Хорошо поставлена?

Допущения:

Мишень расположена на высоте 4 м на расстоянии 10 м от Васи. В момент броска мяч находится на высоте 2 м от земли.

? Всегда ли есть решение?

? Решение единственно?

II. Разработка модели

бросает мяч со скоростью 12 м/с. Под каким углом к горизонту ему нужно бросить мяч, чтобы попасть в мишень? Мишень расположена на высоте 4 м на расстоянии 10 м . В момент броска мяч находится на высоте 2 м от земли.

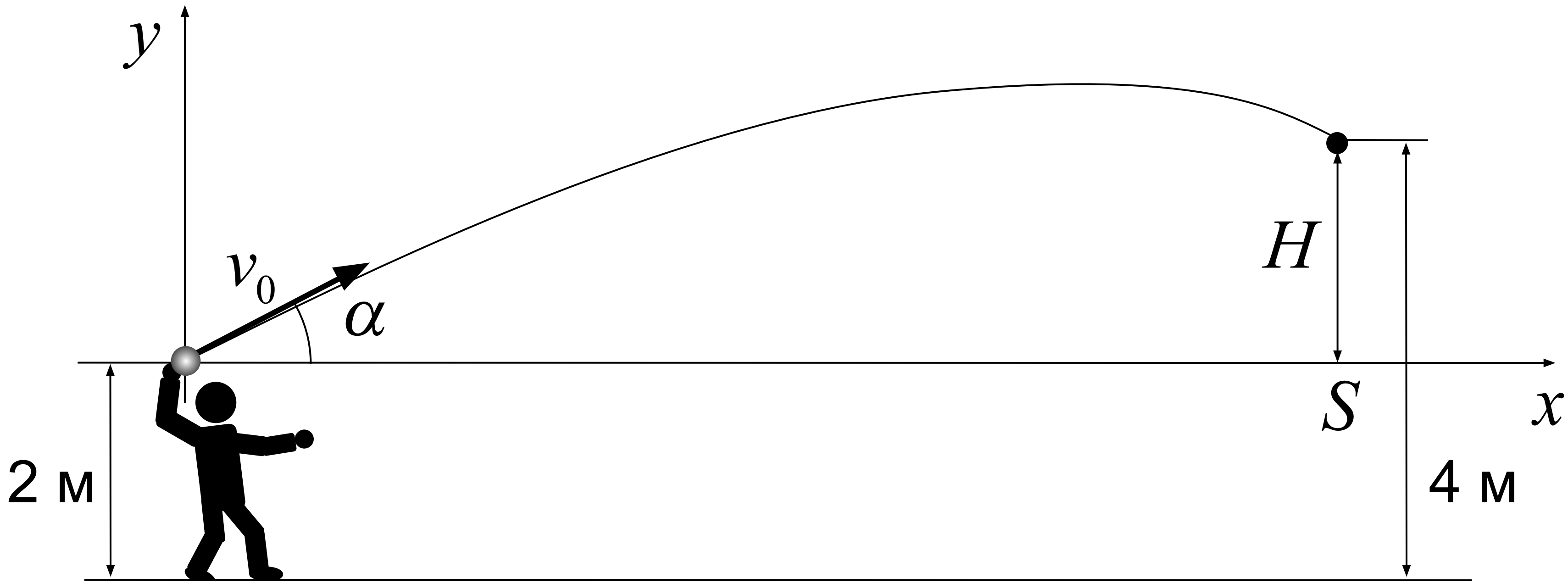
1) Определить **существенные** исходные данные.
- мяч и мишень — материальные точки
- мишень неподвижна
- сопротивление воздуха не учитывается.

2) Выбор **типа модели**.

! Можно использовать несколько моделей!

II. Разработка модели

Графическая модель

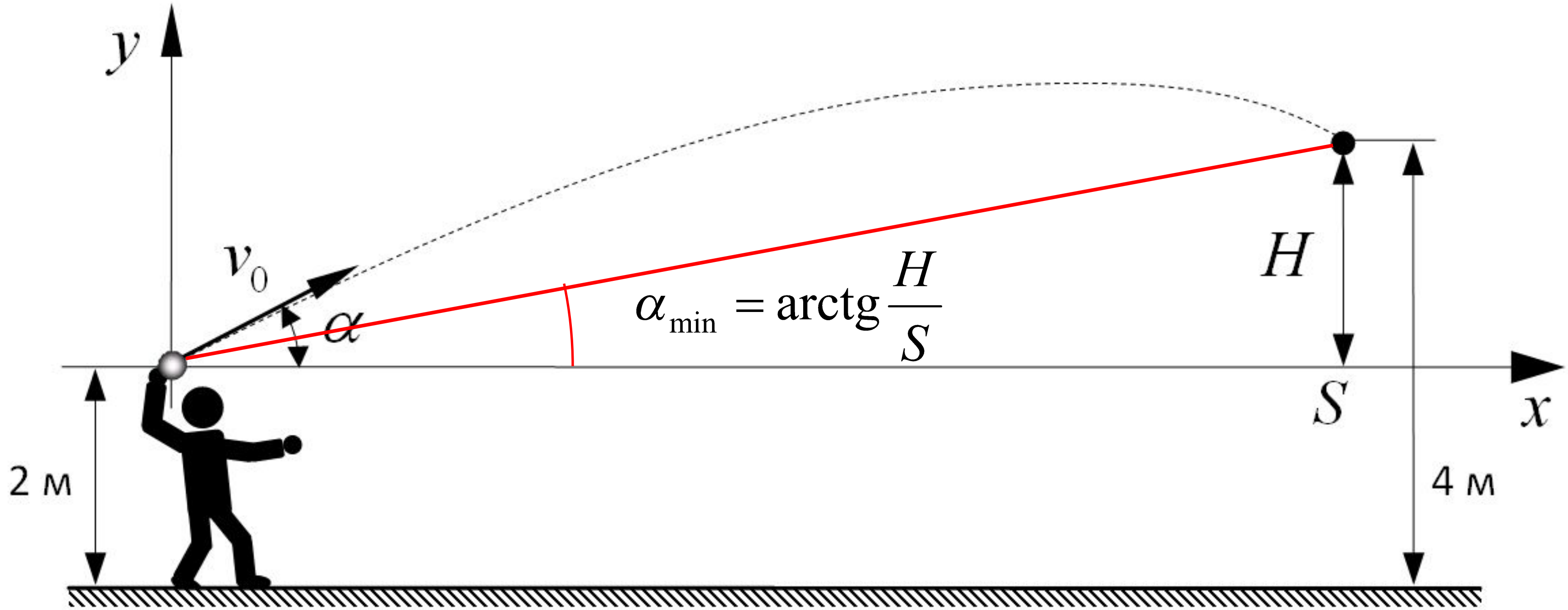


3) **Формальная (математическая) модель**

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha, \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Задача: найти t и α, такие что $x = S,\ y = H$

Уточнение диапазона углов



Диапазон углов для поиска: $\left[\text{arctg}\,\frac{H}{S} \ldots \frac{\pi}{2}\right]$

II. Разработка модели

4) Алгоритм моделирования

Метод I.

Меняем угол α. Для выбранного угла α строим траекторию полета мяча. Если она проходит выше мишени, уменьшаем угол, если ниже – увеличиваем.

Метод II.

Из первого равенства выражаем время полета:

$$v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t = S \quad \Rightarrow \quad t = \frac{S}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

Меняем угол α. Для выбранного угла α считаем t, а затем – значение y при этом t. Если оно больше H, уменьшаем угол, если меньше – увеличиваем.

➕ не надо строить всю траекторию для каждого α

II. Разработка модели

5) **Компьютерная модель**

- программа (Паскаль, Си, …)
- электронные таблицы (*Excel*, *OpenOffice.org Calc*)
- среды моделирования *(Simulink*, *VisSim)*

III. Тестирование модели

Тестирование – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

а) тестирование **математической модели**:

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha, \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

- при $t = 0 \;\Rightarrow x = 0, y = 0$ (в начале координат)
- при $v_0 = 0 \;\Rightarrow x = 0,\; y = -\frac{gt^2}{2}$ (падение вниз)
- при $\alpha = 90° \;\Rightarrow x = 0$
- при увеличении t парабола «загибается» вниз

б) тестирование **компьютерной модели**:
(пробные расчёты в рассмотренных условиях)

? Доказывает ли успешное тестирование правильность модели?

IV. Эксперимент с моделью

Эксперимент – это исследование модели при тех исходных данных, которые нас интересуют (результат заранее неизвестен).

1) задаём угол α
2) находим время $t = \dfrac{S}{v_0 \cdot \cos\alpha}$
3) находим высоту

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

! Может быть два решения!

$y < H$

Диапазон углов для поиска: $\left[\operatorname{arctg}\dfrac{H}{S} \ldots \dfrac{\pi}{2}\right]$

? Можно ли сразу использовать двоичный поиск?

? Как отделить два решения?

построить график y(α)

V. Анализ результатов эксперимента

! Необходима проверка на оригинале!

Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи

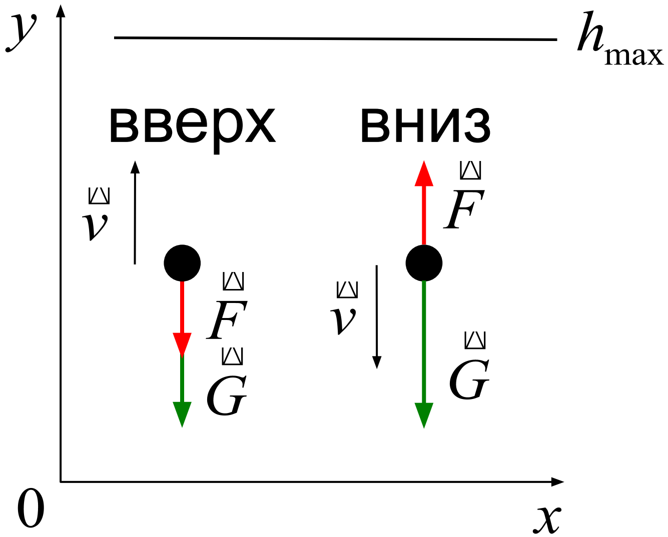
V. Анализ результатов

- всегда ли Вася сможет попасть в мишень?
- если начальная скорость отличается от заданной?
- если мяч и мишень не считать материальными точками?
- как сильно влияет сопротивление воздуха?
- если мишень качается?
- и т.д.…

Моделирование

§ 10. Моделирование движения

Задача



- найти h_{max}
- найти v при приземлении

? Какой тип движения?

равномерное?
равноускоренное?

? Какая ещё сила?

плотность воздуха $\rho = 1{,}23$ кг/м^3

$$G = m \cdot g$$

не меняется!

$$F = \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot C \cdot S$$

площадь сечения

шар: $C = 0{,}4$

$$S = \pi \cdot r^2$$

Математическая модель

В проекции на ось OY:

всегда противоположна v

$$G = -m \cdot g \qquad F = -\frac{\rho \cdot |v| \cdot v}{2} \cdot C \cdot S$$

$$a = \frac{G + F}{m}$$

! Силы меняются ⇒ ускорение меняется!

Методы решения:

- аналитический (высшая математика)
- численное моделирование

Дискретизация

Дискретная модель описывает состояние системы при

$$t = 0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$$

шаг дискретизации

Задача: зная (y_i, v_i, a_i) при $t_i = i \cdot \delta$
найти (y_{i+1}, v_{i+1}, a_{i+1}) при $t_{i+1} = (i+1)$
$\cdot\delta$

Допущение: силы (и ускорение) не меняются на интервале $[t_i, t_{i+1}]$

Вычисления:

$$F_i = -\frac{\rho\,|v_i|\,v_i}{2} \cdot C \cdot S \qquad a_i = \frac{G + F_i}{m} = -g + \frac{F_i}{m}$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot \delta \qquad y_{i+1} = y_i + v_i \cdot \delta + \frac{a_i \cdot \delta^2}{2}$$

Компьютерная модель

```
t:= 0; v:= v0; y:= 0
k:= ro*C*S/2
нц пока y >= 0
  F:= - k*abs(v)*v  | сила сопротивления
  a:= - g + F/m      | ускорение
  y:= y + v*delta + a*delta*delta/2 | координата
  v:= v + a*delta    | скорость
  t:= t + delta      | время
кц
```

? Как найти h_{max}?

```
если y > h то
  h:= y
все
```

Моделирование

§ 11. Математические модели в биологии

Модель неограниченного роста (Т. Мальтус)

N_0 – начальная численность

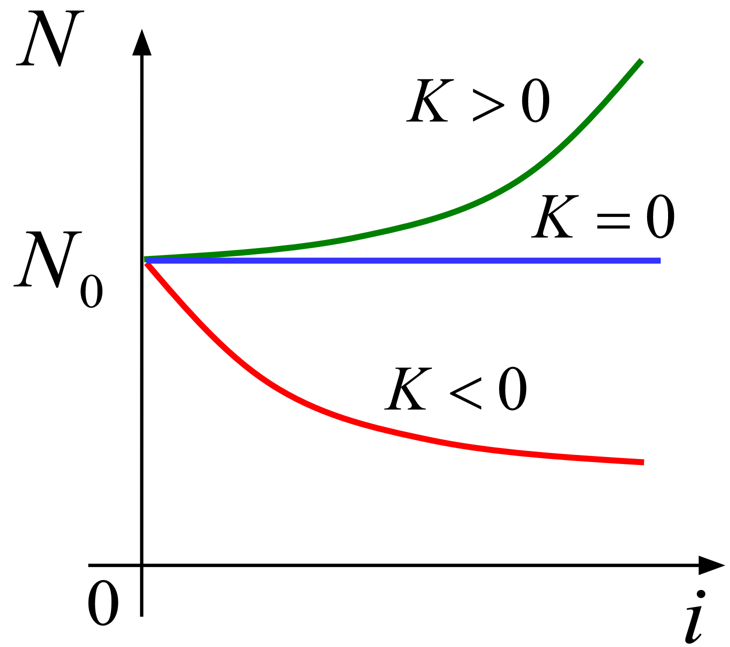
N_i – численность через i периодов

рождаемость смертность

$$N_i = N_{i-1} + k_p \cdot N_{i-1} - k_c \cdot N_{i-1}$$

$$\boxed{N_i = (1+K) \cdot N_{i-1}}$$

$$K = k_p - k_c$$



Особенности модели:

1) не учитывается влияние численности N и внешней среды на K
2) не учитывается влияние других видов на K

Модель ограниченного роста (П. Ферхюльст)

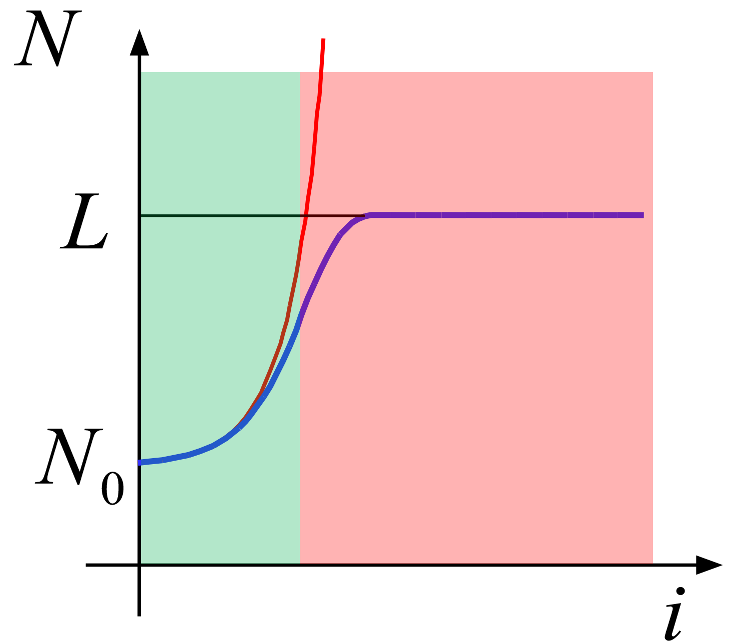
L – предельная численность животных

$$N_i = (1 + K_L) \cdot N_{i-1}$$

Идеи:

1) коэффициент прироста K_L зависит от численности N
2) при N=0 должно быть $K_L=k$ (начальное значение)
3) при $N=L$ должно быть $K_L=0$ (достигнут предел)

$$N_i = \left(1 + k \cdot \frac{L - N_{i-1}}{L}\right) \cdot N_{i-1}$$



! Модель адекватна, если ошибка < 10%!

Модель с отловом

рыбоводческое хозяйство, разведение пушных зверей, …

$$N_i = \left(1 + k \cdot \frac{L - N_{i-1}}{L}\right) \cdot N_{i-1} - R$$

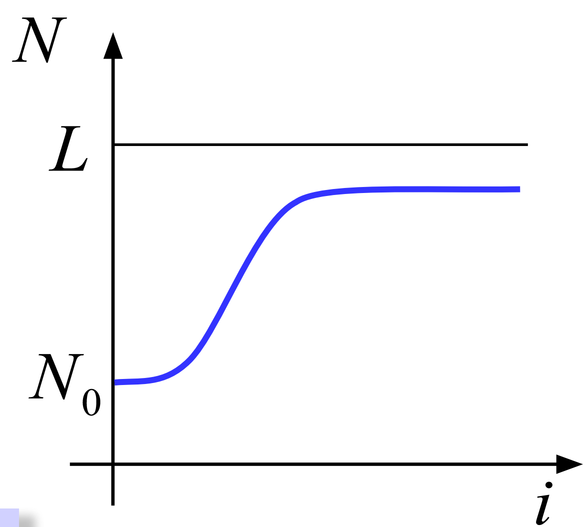
отлов

? Какая будет численность? L?

$N_i = N_{i-1}$, прирост = отлову

$$N = N + K\frac{L-N}{L}N - R$$

$$\Rightarrow \frac{K}{L} \cdot N^2 - K \cdot N + R = 0$$



? Сколько можно вылавливать?

Модель «хищник-жертва»

Модель – не-система:

караси

$$N_i = \left(1 + k\frac{L - N_{i-1}}{L}\right)\cdot N_{i-1}$$

щуки

$$Z_i = (1 - D)\cdot Z_{i-1}$$

вымирают без еды

Модель – система:

1) число встреч пропорционально $N_i \cdot Z_i$
2) «эффект» пропорционален числу встреч

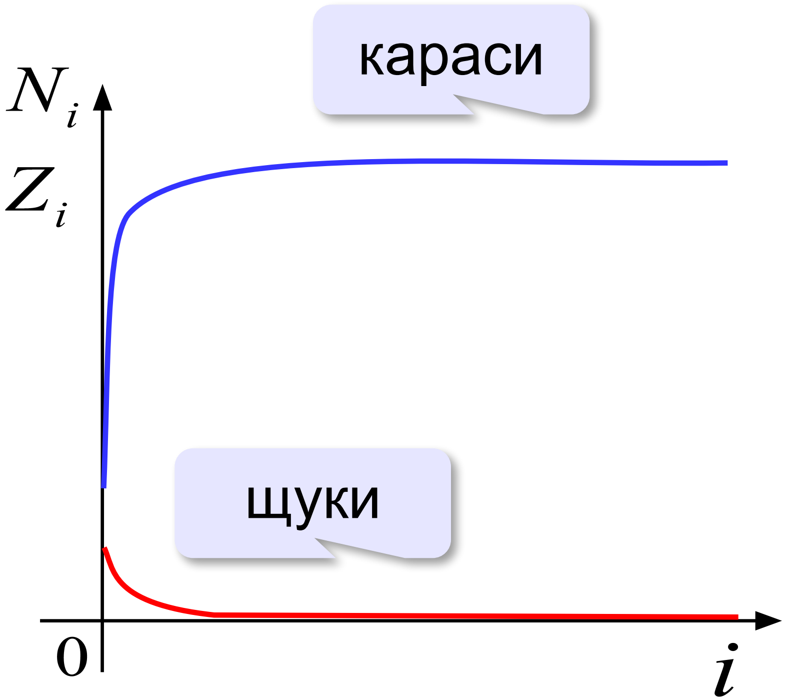
численность уменьшается

$$N_i = (1 + K_{i-1} - b_N Z_{i-1})\cdot N_{i-1}$$
$$Z_i = (1 - D + b_Z N_{i-1})\cdot Z_{i-1}$$

численность увеличивается

Модель «хищник-жертва»

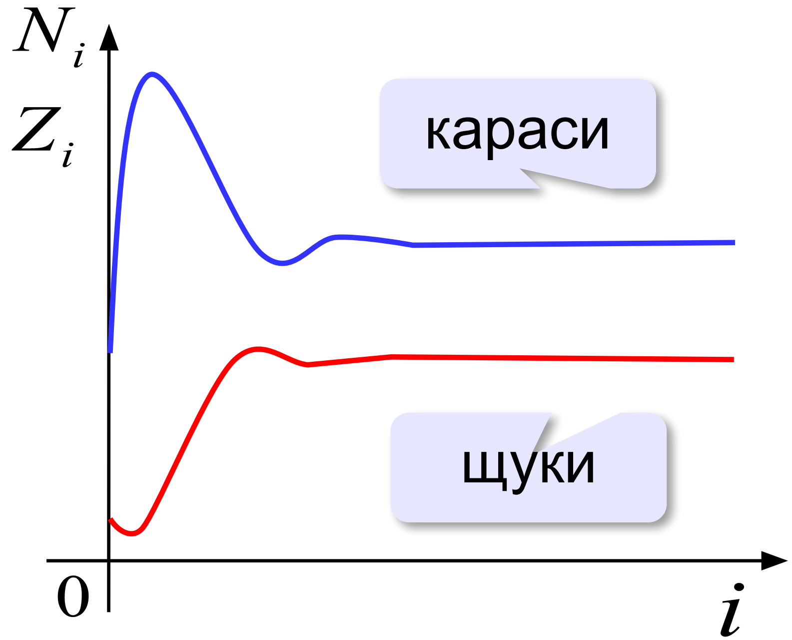
Хищники вымирают:



$$D = 0{,}8$$

$$b_N = b_Z = 0{,}005$$

Равновесие:

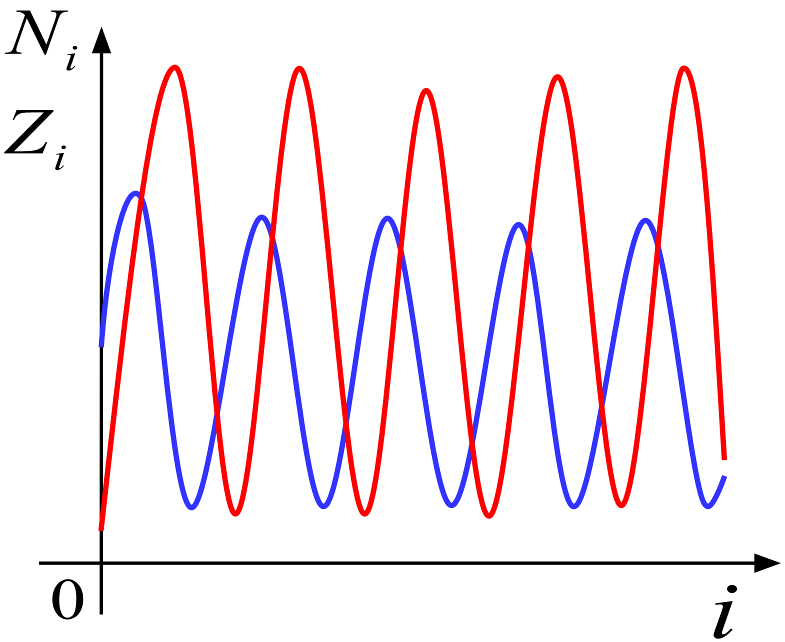


$$D = 0{,}8$$

$$b_N = 0{,}01; \quad b_Z = 0{,}012$$

Модель «хищник-жертва»

Колебания:



$$D = 0{,}8$$

$$b_N = 0{,}01; \;\; b_Z = 0{,}015$$

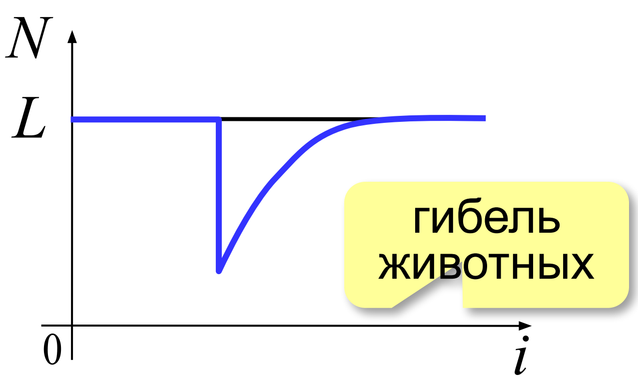
Обратная связь

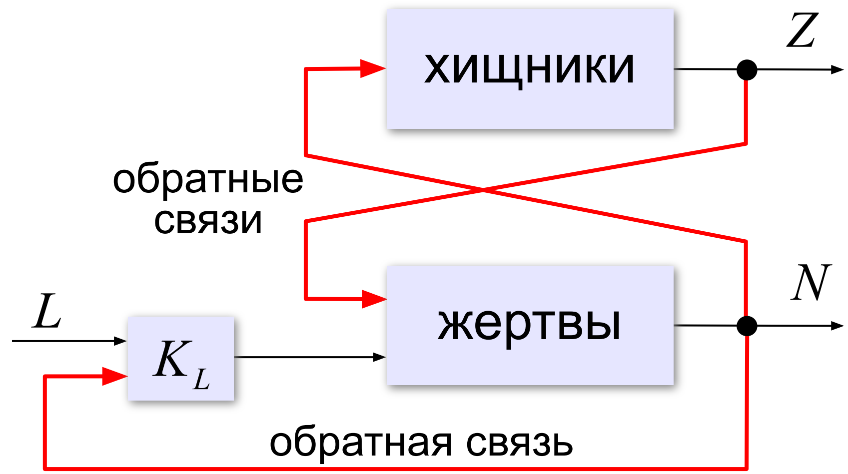
Модель неограниченного роста:

Модель ограниченного роста:

Саморегуляция

Саморегуляция – это способность системы поддерживать свое внутреннее состояние за счет связей между элементами.





! Саморегуляция только при малых отклонениях!

Моделирование

§ 12. Вероятностные модели

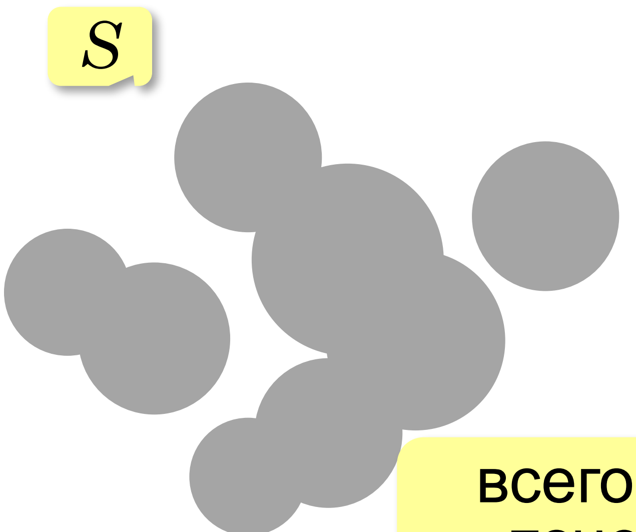
Методы Монте-Карло

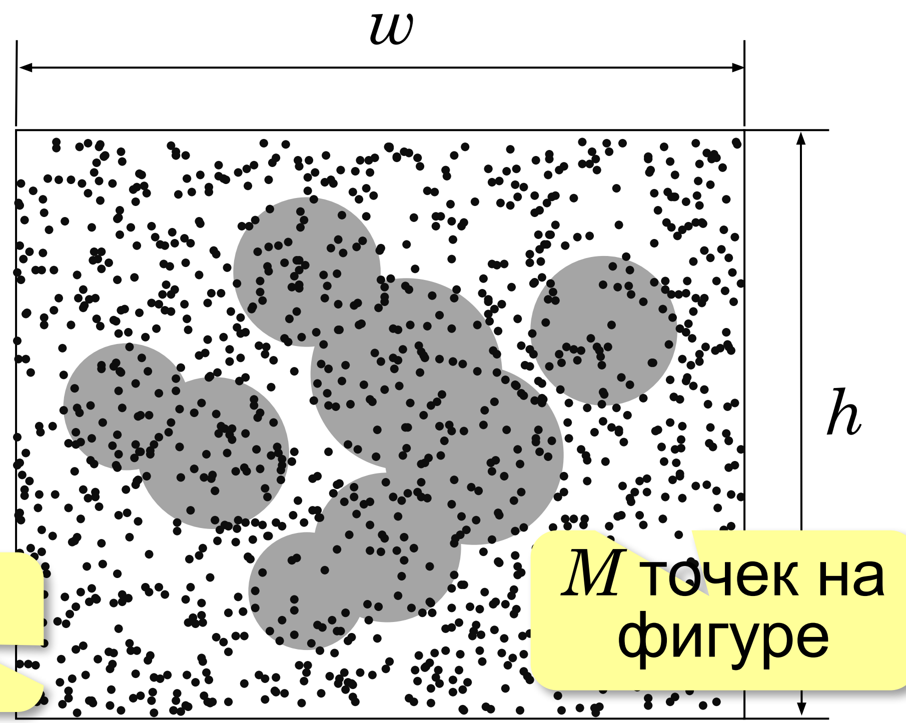
Методы Монте-Карло – это методы решения вычислительных задач с помощью математического моделирования, основанные на использовании случайных чисел.

- результат приближённый
- это лучше, чем никакой

Вычисление площади

Найти площадь фигуры S:



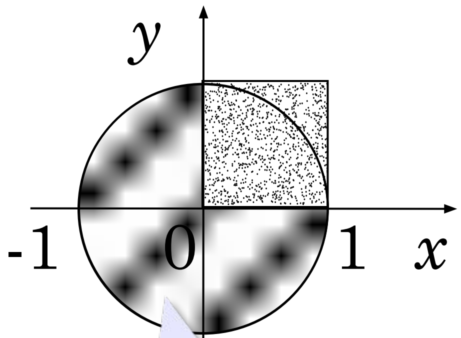


При равномерном распределении:

$$\frac{S}{w \cdot h} \approx \frac{M}{N}$$

$$S \approx \frac{M}{N} wh$$

Вычисление числа π



$$S_1 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi = 4S_1 \approx 4\frac{M}{N}\cdot 1 = 4\frac{M}{N}$$

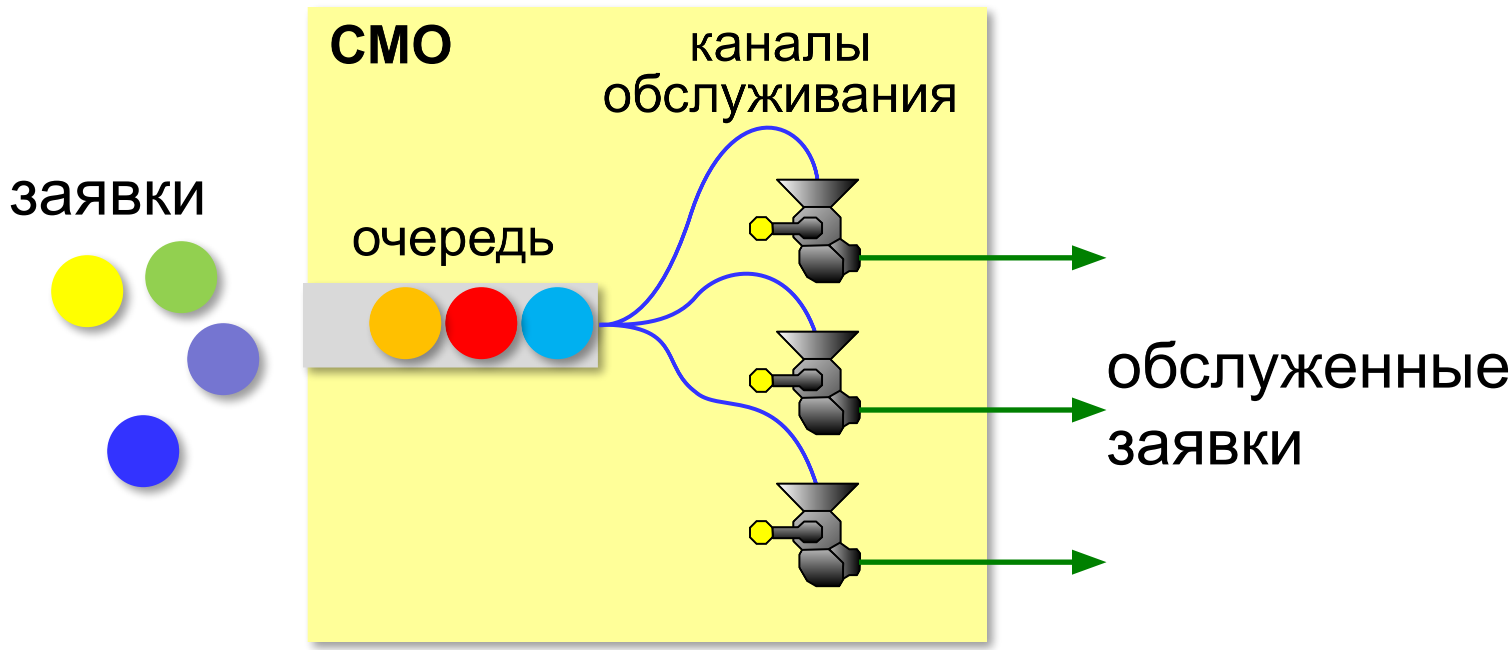
$$S = \pi R^2 = \pi$$

если внутри круга

```
цел i, M = 0, N = 100000
вещ x, y
нц для i от 1 до N
   x := rand(0,1)
   y := rand(0,1)
   если x*x + y*y <= 1 то
     M:= M + 1
   все
кц
вывод "Pi = ", 4*M/N
```

Системы массового обслуживания (СМО)

магазин, банк, служба ремонта, касса…



Особенности:
- заявки поступают через случайные интервалы
- время обслуживания – случайная величина

! Нужна вероятностная модель!

Модель работы банка

Детерминированная модель:

- за 1 минуту входит P клиентов
- время обслуживания T минут

Сколько нужно касс?

$$K \geq P \cdot T$$

Вероятностная модель:

Допущение: распределение **равномерное**

- K – количество касс
- за 1 минуту входит от 0 до $P_{\max}$ клиентов
- время обслуживания от $T_{\min}$ до $T_{\max}$ минут
- изменение числа клиентов в банке

$$N_{i+1} = N_i + P_i - R_i$$

вошли за i-ую минуту

обслужены за i-ую минуту

- средняя длина очереди $Q_i = \dfrac{N_i}{K}$
- среднее время ожидания $Q_i \cdot T_i$

Модель работы банка

Как найти R_i?

Допущение:

K касс работают с одинаковой скоростью, но эта скорость меняется каждый интервал

T_i – случайное время обслуживания (от $T_{\min}$ до $T_{\max}$)

обслужено за 1 интервал на 1 кассе $1/T$,

на всех кассах $$R_i = \frac{K}{T_i}$$

Задача: выбрать K так, чтобы среднее время ожидания было больше допустимого в течение не более 5% от полного времени моделирования.

«плохие минуты»: $$Q_i \cdot T_i = \frac{N_i}{K} \cdot T_i > M$$

допустимое время ожидания

Модель работы банка

```
K:= 2       | меняем количество касс
Pmax:= 4    | макс. число входящих за 1 мин
Tmin:= 1    | мин. время обслуживания
Tmax:= 9    | макс. время обслуживания
L:= 480     | период моделирования
M:= 15      | допустимое время ожидания
N:= 0       | сначала в банке никого нет
count:= 0   | счетчик «плохих» минут
```

? Что выводить в результате?

$$\frac{count}{L} < 0{,}05 \quad \Rightarrow$$ касс достаточно

! Сравнить с детерминированной моделью!

Модель работы банка (КуМир)

```
нц для i от 1 до L
   P:= irand(0,PMax)
   T:= rand(Tmin,Tmax)
   R:= int(K / T)
   N:= N + P - R
   если N < 0 то N:= 0 все
   dT:= N / K * T
   если dT > M то
      count:= count + 1
   все
кц
```

Паскаль

Модель работы банка (Паскаль)

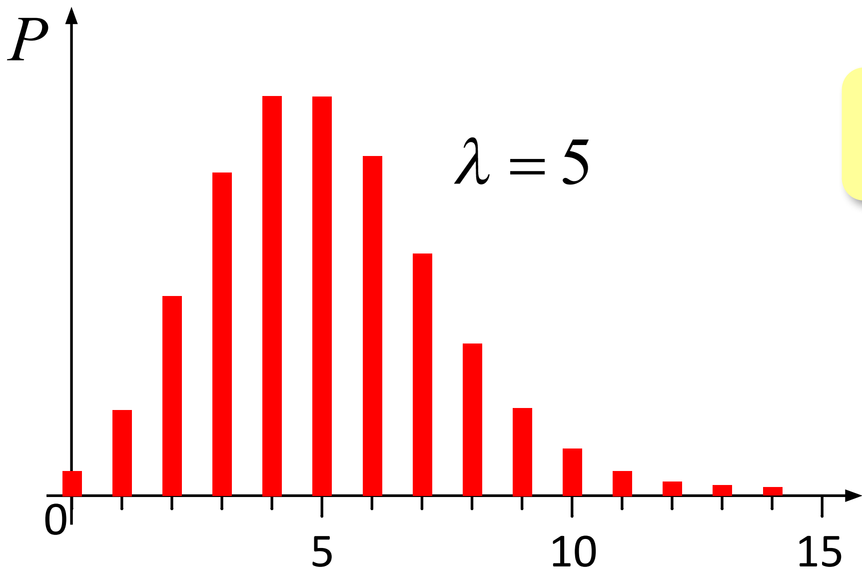
```
for i:=1 to L do begin
  P:= random(PMax);
  T:= Tmin + random*(Tmax - Tmin);
  R:= round(K / T);
  N:= N + P - R;
  if N < 0 then N:= 0;
  dT:= N / K * T;
  if dT > M then
    count:= count + 1
end;
```

Уточнение модели

- за 1 минуту входит от 0 до $P_{\max}$ клиентов

Допущение: распределение **равномерное**

Распределение Пуассона:



вероятность того, что $P = k$

$P_{\text{среднее}}$

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Получение из равномерного распределения:

метод обратных функций

Распределение Пуассона (КуМир)

```
алг цел Poisson(цел Lam)
нач
  вещ s, r, alpha;
  цел k
  r:=exp(-Lam); s:=r
  k:=0
  alpha:=rand(0,1)
  нц пока s<alpha
    k:=k+1
    r:=r*Lam/k
    s:=s+r
  кц
  знач:=k
кон
```

Распределение Пуассона (Паскаль)

```
function Poisson(Lam: integer): integer;
var s, r, alpha: real;
    k: integer;
begin
  r:=exp(-Lam); s:=r;
  k:=0;
  alpha:=random;
  while s<alpha do begin
    k:=k+1;
    r:=r*Lam/k;
    s:=s+r
  end;
  Poisson:=k
end;
```

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович
к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь
eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. www.historicships.com
2. www.amazon.co.uk
3. www.supahcars.com
4. physicon.ru
5. www.laerdal.com
6. biohimija.ru
7. ecosafe.spbu.ru
8. www.skyplaz.ru
9. www.burpipe.ru
10. www.garshin.ru
11. www.thisnext.com
12. 3dsdesign.ru
13. en.wikipedia.org
14. ru.wikipedia.org
15. www.m24.ru
16. naked-science.ru
17. medium.com
18. иллюстрации художников издательства «Бином»
19. авторские материалы