

# Моделирование

- § 6. Модели и моделирование
- § 7. Игровые модели
- § 8. Модели мышления
- § 9. Этапы моделирования
- § 10. Моделирование движения
- § 11. Математические модели в биологии
- § 12. Вероятностные модели

# Моделирование

## § 6. Модели и моделирование

# Модели и моделирование

**Модель** – это объект, который обладает существенными свойствами другого объекта, процесса или явления (*оригинала*) и используется вместо него.

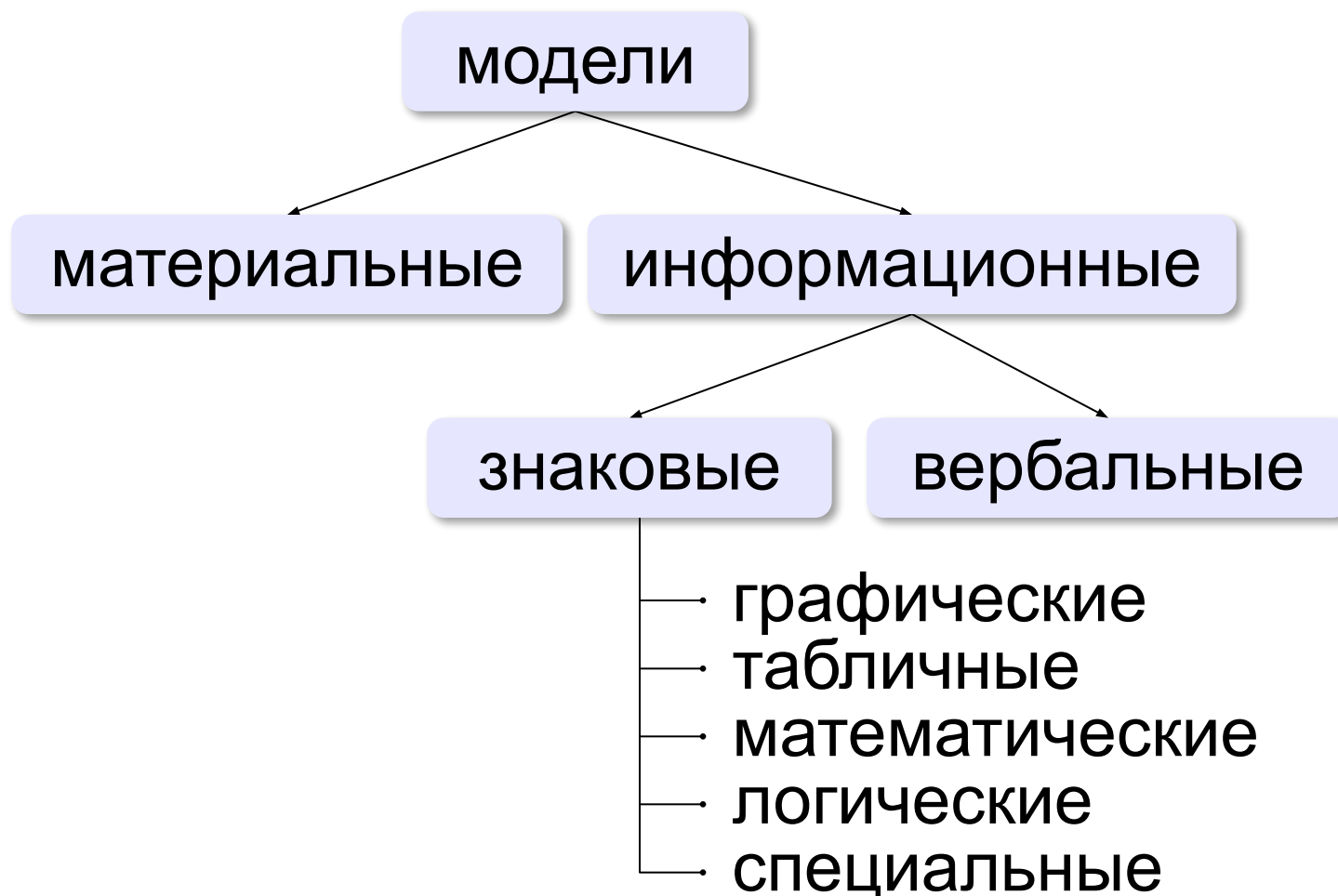
**Моделирование** – это создание и исследование моделей с целью изучения оригиналов.

## Задачи моделирования:

- **исследование** оригинала
- **анализ** («что будет, если ...»)
- **синтез** («как сделать, чтобы ...»)
- **оптимизация** («как сделать лучше всего ...»)

# Виды моделей (по природе)

---



# Виды моделей (по фактору времени)

- **статические** – описывают оригинал в заданный момент времени
  - силы, действующие на тело в состоянии покоя
  - результаты осмотра врача
  - фотография
- **динамические**
  - модель движения тела
  - явления природы (молния, землетрясение, цунами)
  - история болезни
  - видеозапись события
  - ...

**дискретные модели** описывают поведение только в отдельные моменты времени

**непрерывные модели** – в любой момент времени

# Виды моделей (по характеру связей)

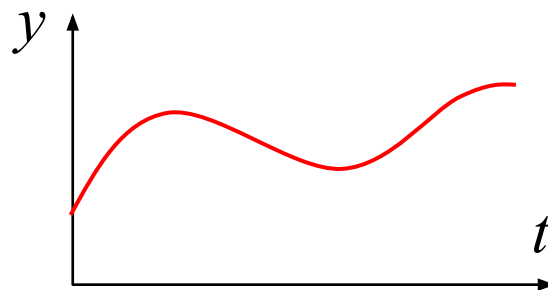
---

- **детерминированные** – при одинаковых исходных данных всегда получается тот же результат
  - расчёт по формулам
  - движение корабля на спокойной воде
  - ...
- **вероятностные** – учитывают случайность событий
  - броуновское движение частиц
  - полета самолёта с учетом ветра
  - движения корабля на волнении
  - поведение человека
  - ...

# Виды динамических моделей

- **непрерывные** – описывают оригинал в любой момент времени на заданном интервале

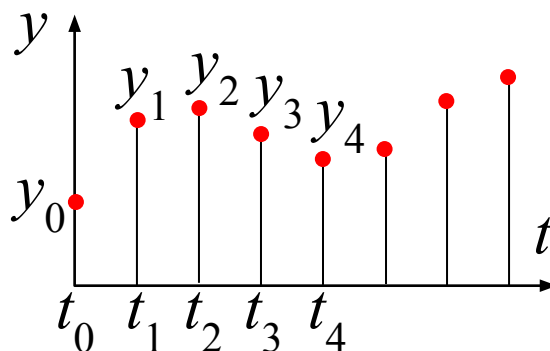
$$\cdot y = 2t + 5$$



- **дискретные** – описывают оригинал только в отдельные моменты времени (через 1 сек, час, год, ...)

$$\cdot y_i = 2t_i + 5$$

$$\cdot y_i = 5y_{i-1} + 5$$



# Имитационные модели

---

- нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, но можно имитировать её реакцию на внешние воздействия
- максимальный учет всех факторов
- только численные результаты



Задача – найти лучшее решение **методом проб и ошибок** (многократные эксперименты)!

## Примеры:

- испытания лекарств на мышах, обезьянах, ...
- математическое моделирование биологических систем
- модели систем массового обслуживания
- модели процесса обучения
- кросс-программирование
- ...



# Игровые модели

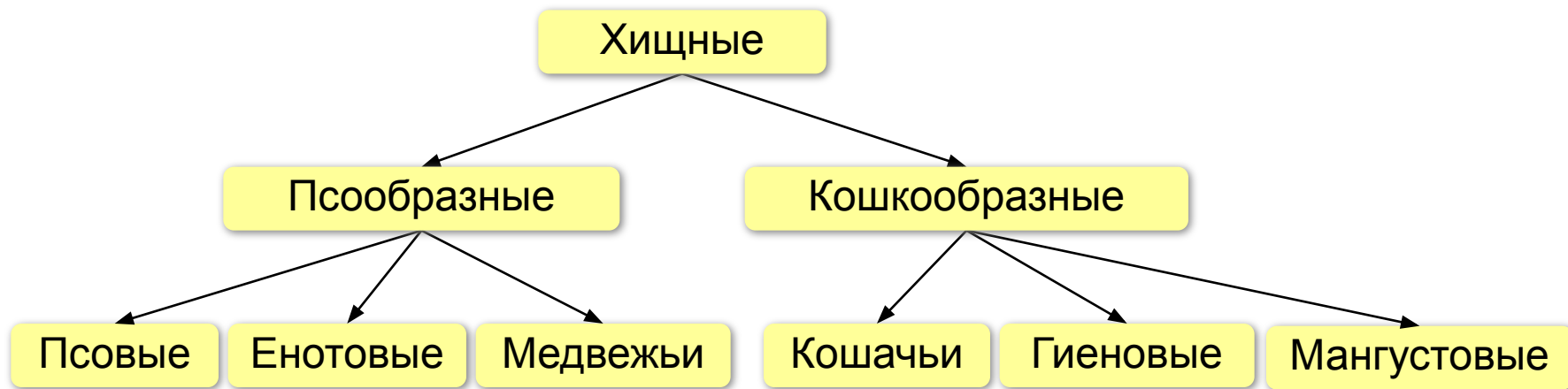
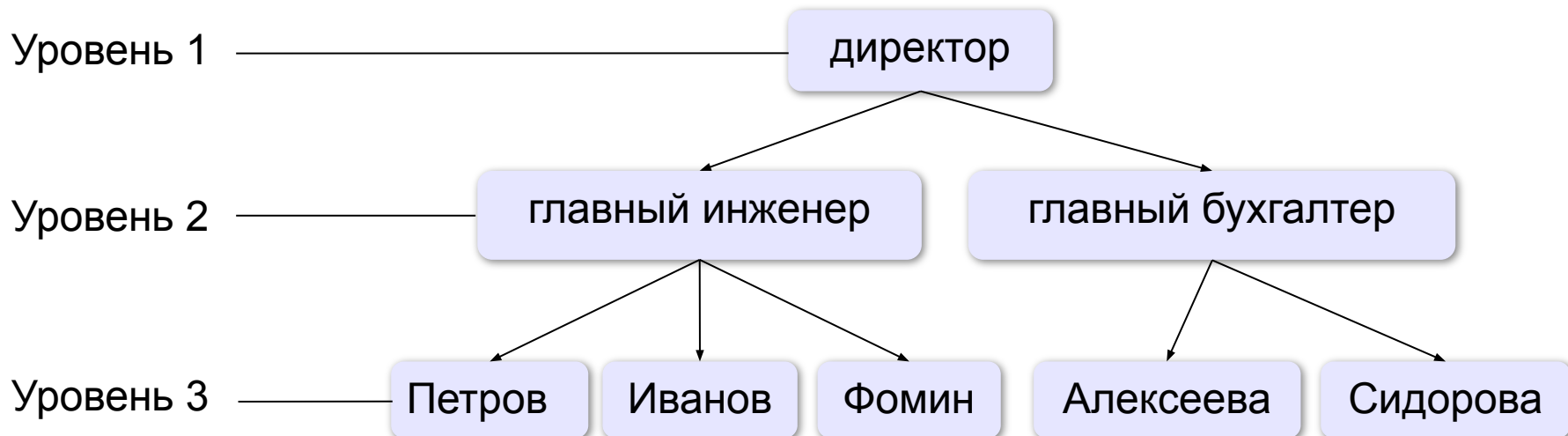
Игровые модели учитывают действия **противников**.

- экономические ситуации
- военные действия
- спортивные игры
- тренировки персонала

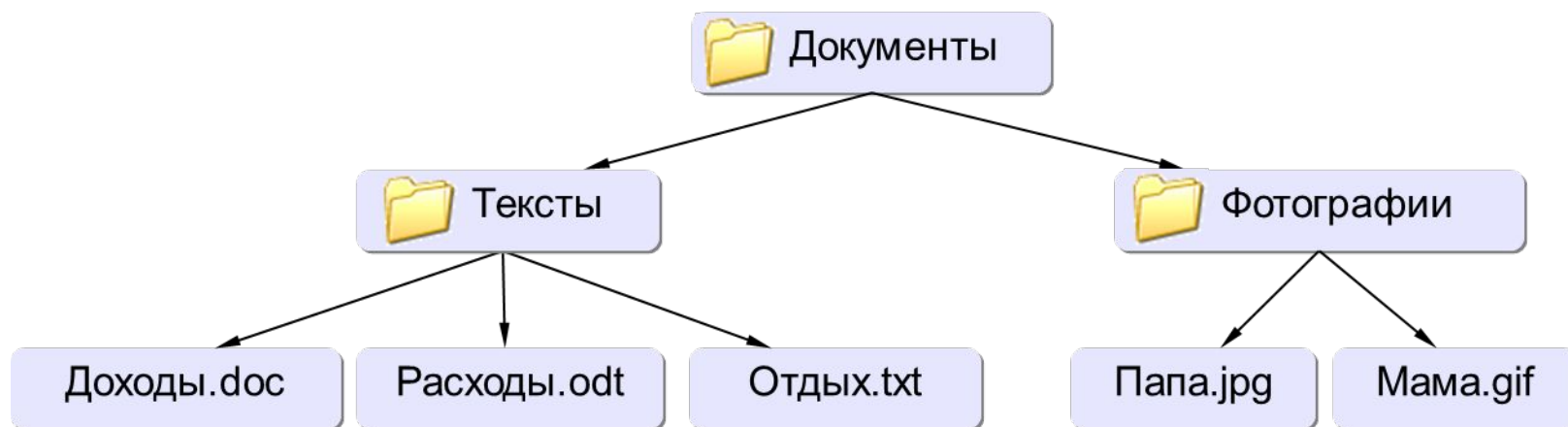


**Задача – найти лучший вариант действий в самом худшем случае!**

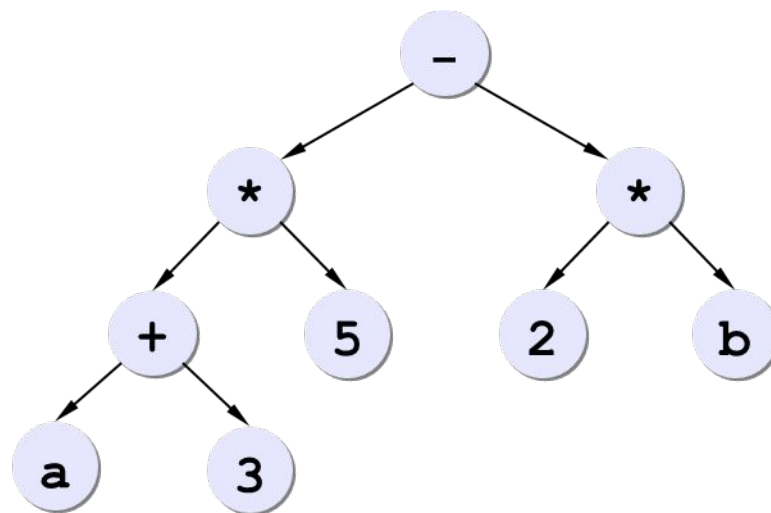
# Иерархические модели



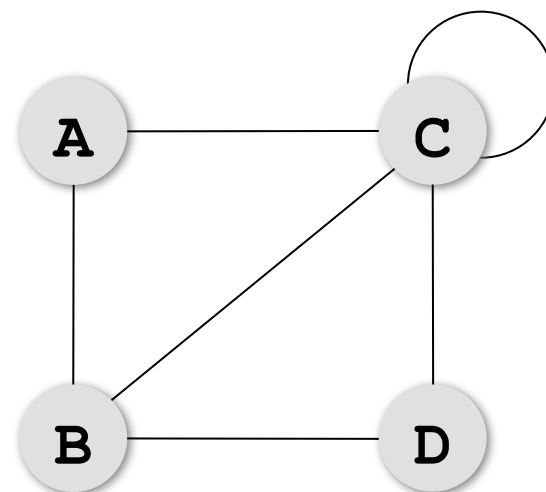
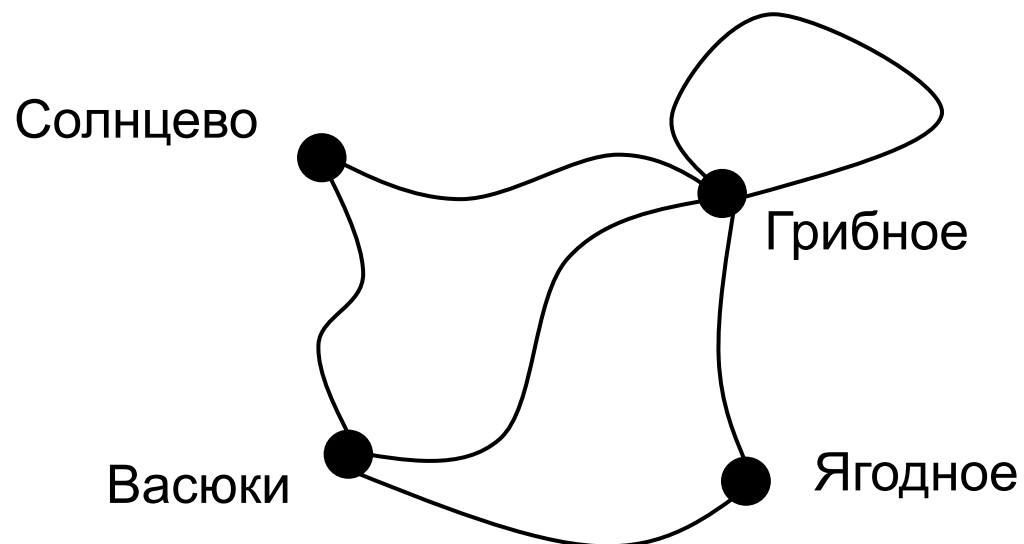
# Иерархические модели



$$(a+3) * 5 - 2 * b$$

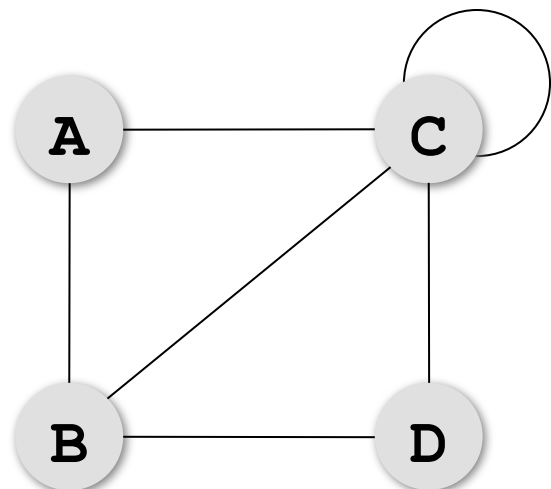


# Графы



**Граф** – это набор вершин (узлов) и связей между ними (рёбер).

# Матрица и список смежности



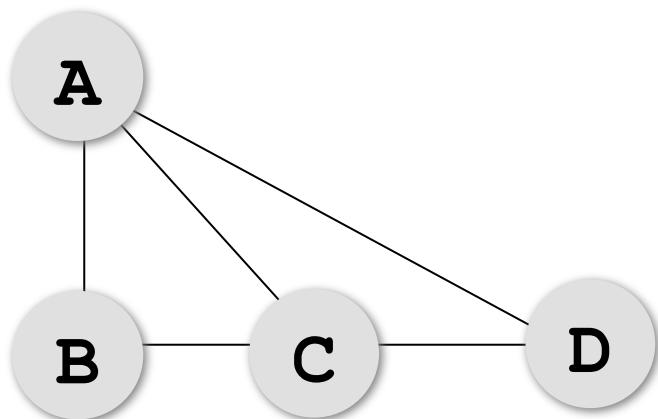
## Матрица смежности

	A	B	C	D	
A	0	1	1	0	2
B	1	0	1	1	3
C	1	1	1	1	5
D	0	1	1	0	2

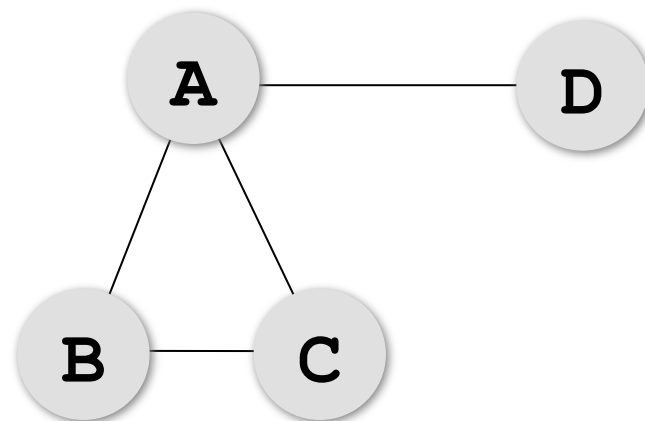
петля

**Степень вершины** – это количество связанных с ней рёбер (петля считается дважды!).

# Постройте матрицу смежности



	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				



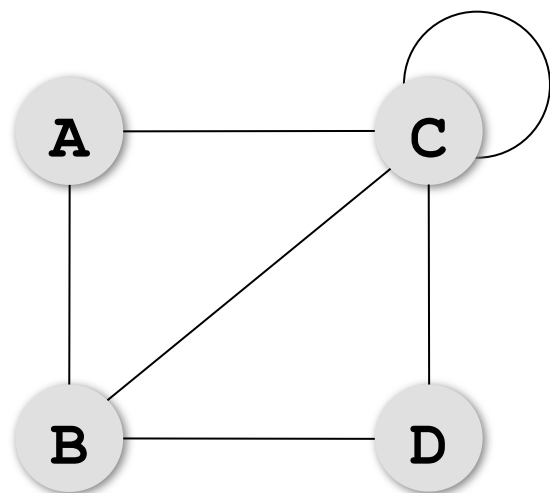
	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

# Нарисуйте граф

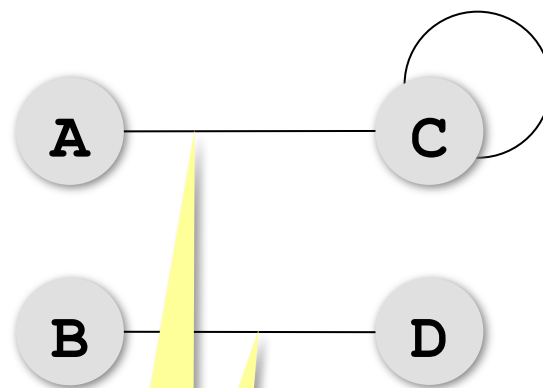
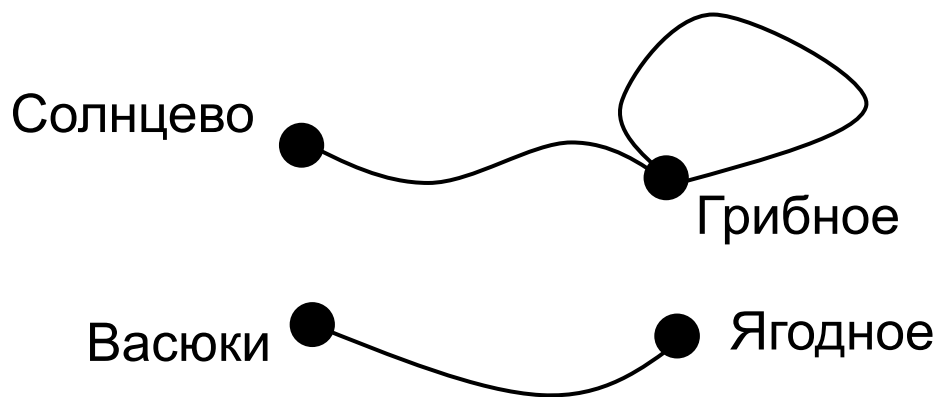
	A	B	C	D
A	0	0	1	1
B	0	0	1	0
C	1	1	0	0
D	1	0	0	0

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	1	0	1	0
C	0	1	0	1
D	1	0	1	0

# Связность графа



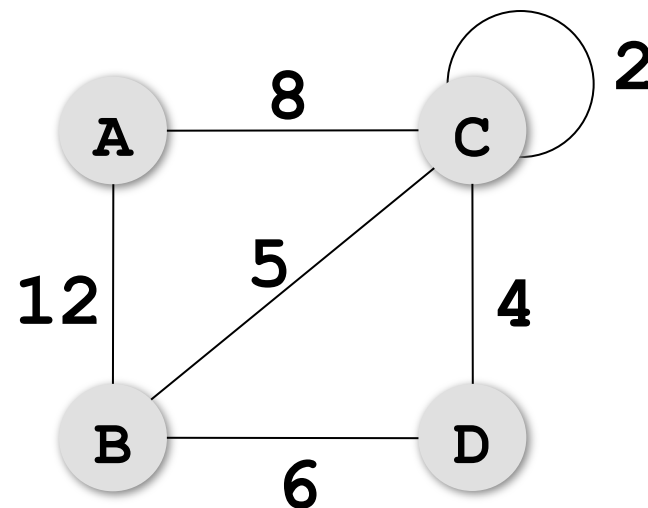
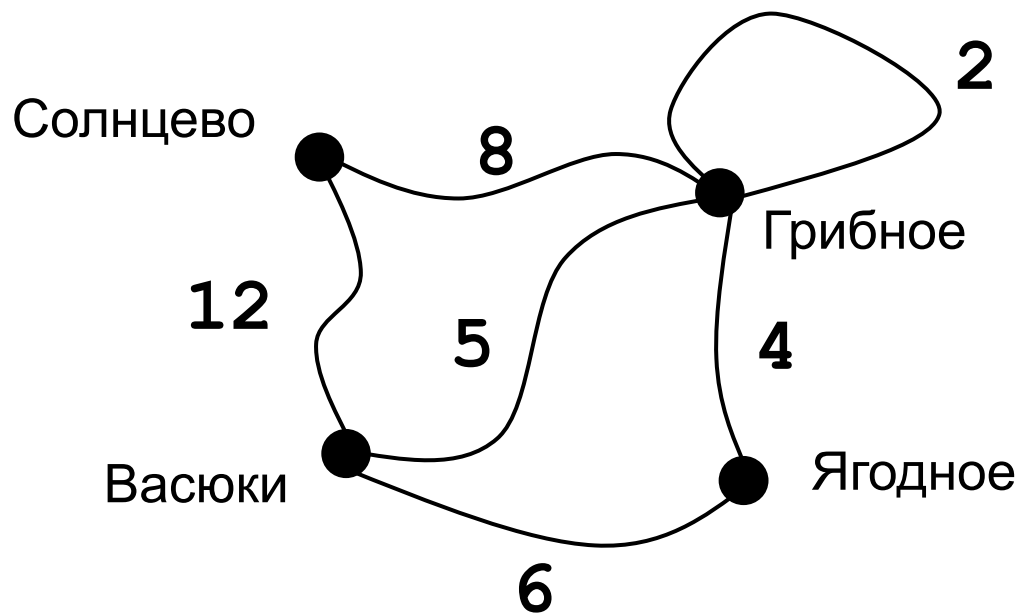
**Связный граф** – это граф, между любыми вершинами которого существует путь.



**КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ**



# Взвешенные графы

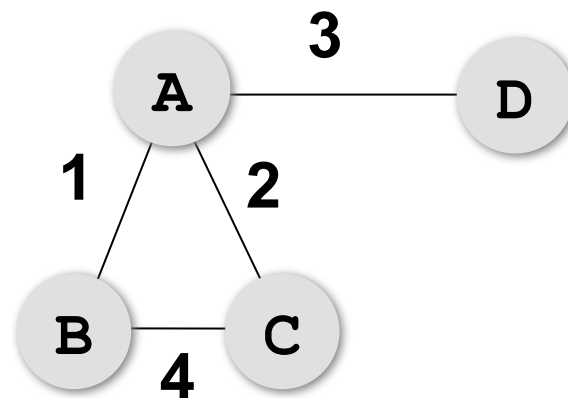
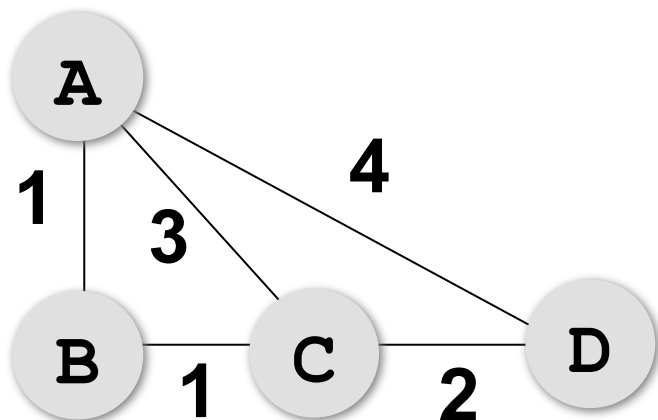


вес ребра

Весовая матрица:

	A	B	C	D
A		12	8	
B	12		5	6
C	8	5	2	4
D		6	4	

# Постройте весовую матрицу

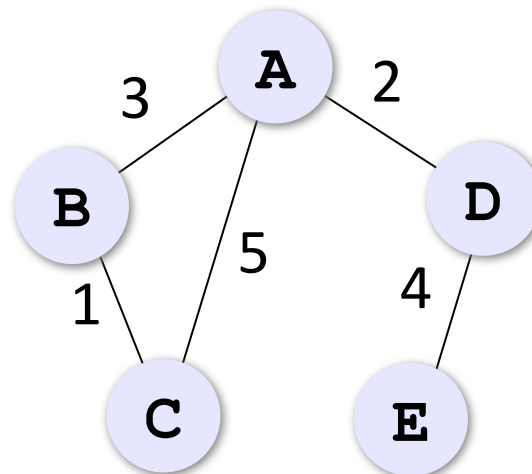
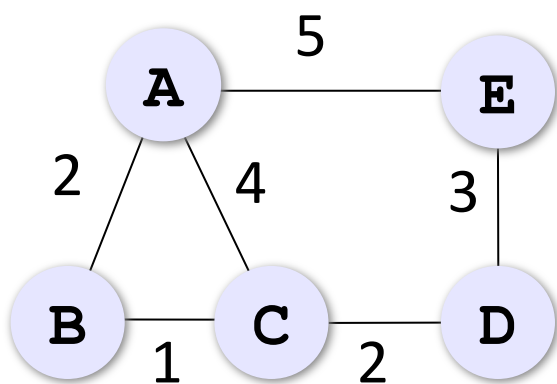
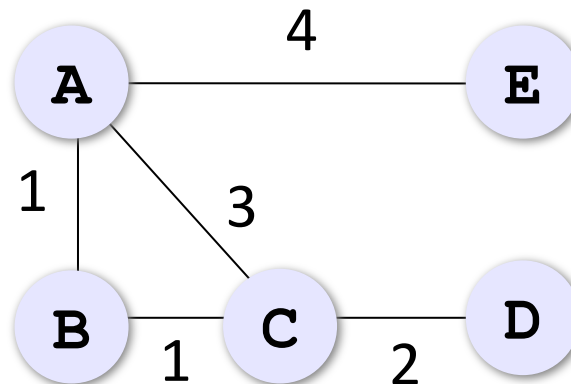
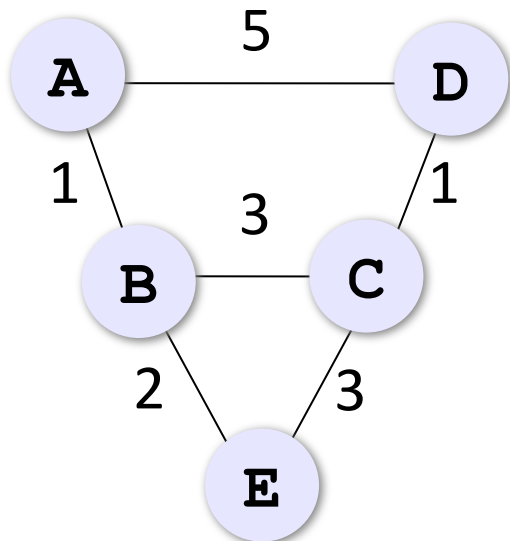


	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

# Задачи

Построить матрицы смежности и весовые матрицы.



# Адекватность

**Адекватность** – это совпадение существенных свойств модели и оригинала в данной задаче.

- результаты моделирования согласуются с выводами теории (законы сохранения и т.п.)
- ... подтверждаются экспериментом ( $\pm 10\%$ )



Адекватность модели можно доказать только экспериментом!

Модель всегда отличается от оригинала



Любая модель адекватна только при определенных условиях!

# Моделирование

## § 7. Игровые модели

# Игровые стратегии

---



Какая задача?

**Задача:** найти **стратегию** (алгоритм игры), который позволит получить лучший результат, если соперники играют безошибочно.

**Игры с полной информацией:** можно определить, кто должен выиграть, по начальной позиции.

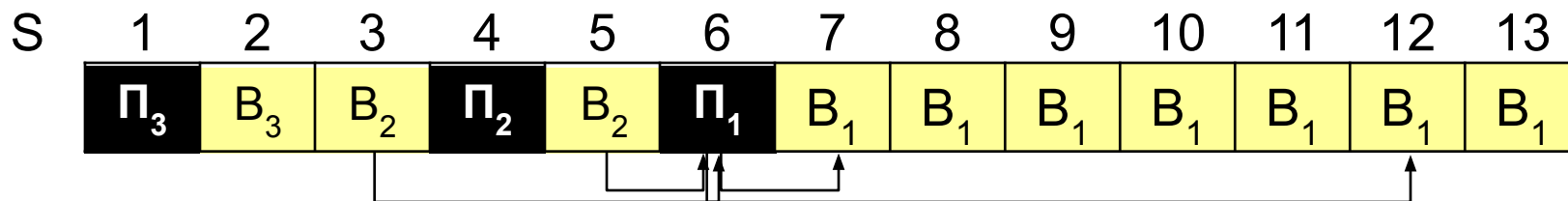
Позиции:

- **проигрышные** – все возможные ходы ведут в выигрышные позиции
- **выигрышные** – хотя бы один ход ведёт в проигрышную позицию

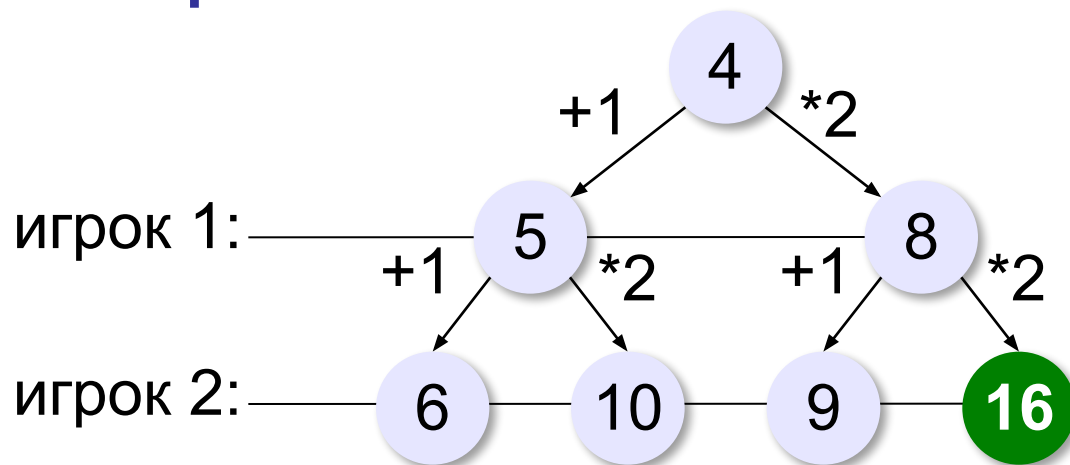
# Задача с кучей камней

В начале игры  $S$  камней. Ходы: «+1» (добавить 1) и «\*2» (удвоить). Выигрыш: получить  $\geq 14$  камней.

выигрыш за 1 ход



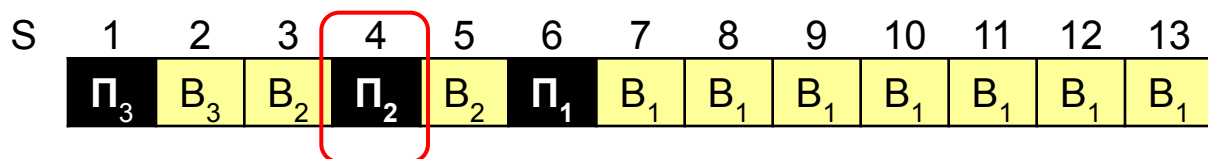
## Дерево игры:



# Неполное дерево игры

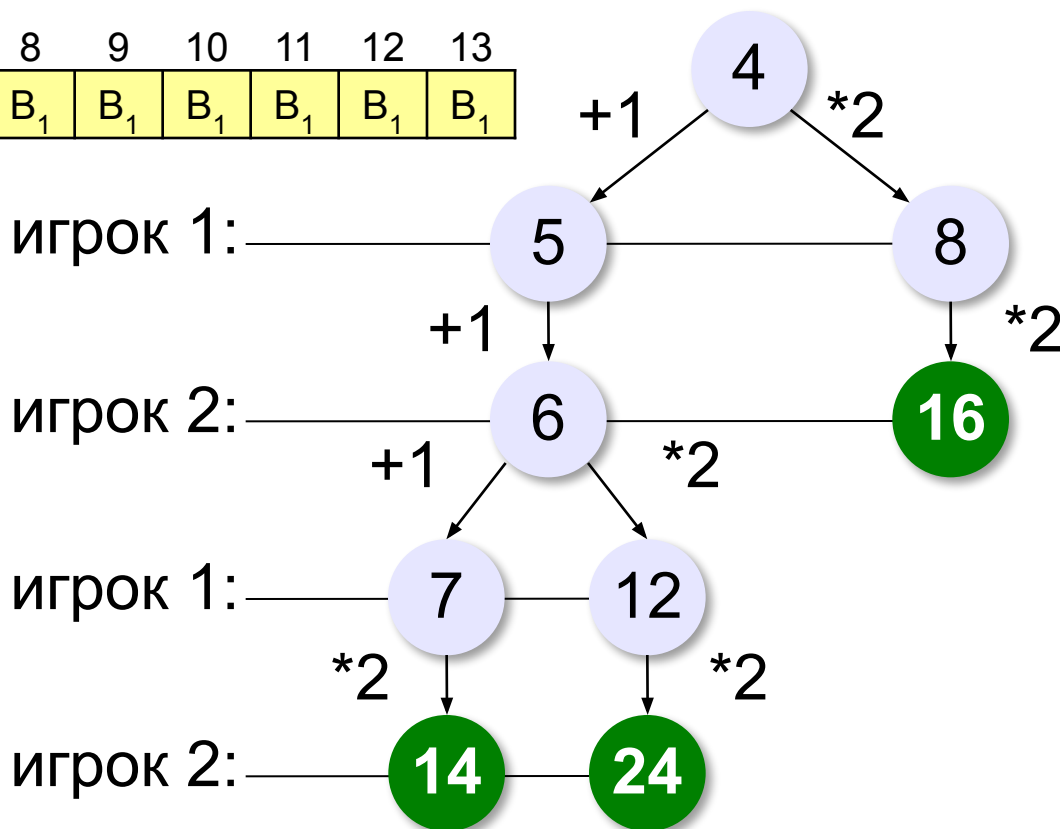
Задача: доказать выигрыш какого-то игрока.

Для победителя – только 1 **верный ход**, для проигравшего – **все возможные** ответы.



**?** Какая стратегия у игрока 2?

переводить игру в проигрышную (для соперника) позицию





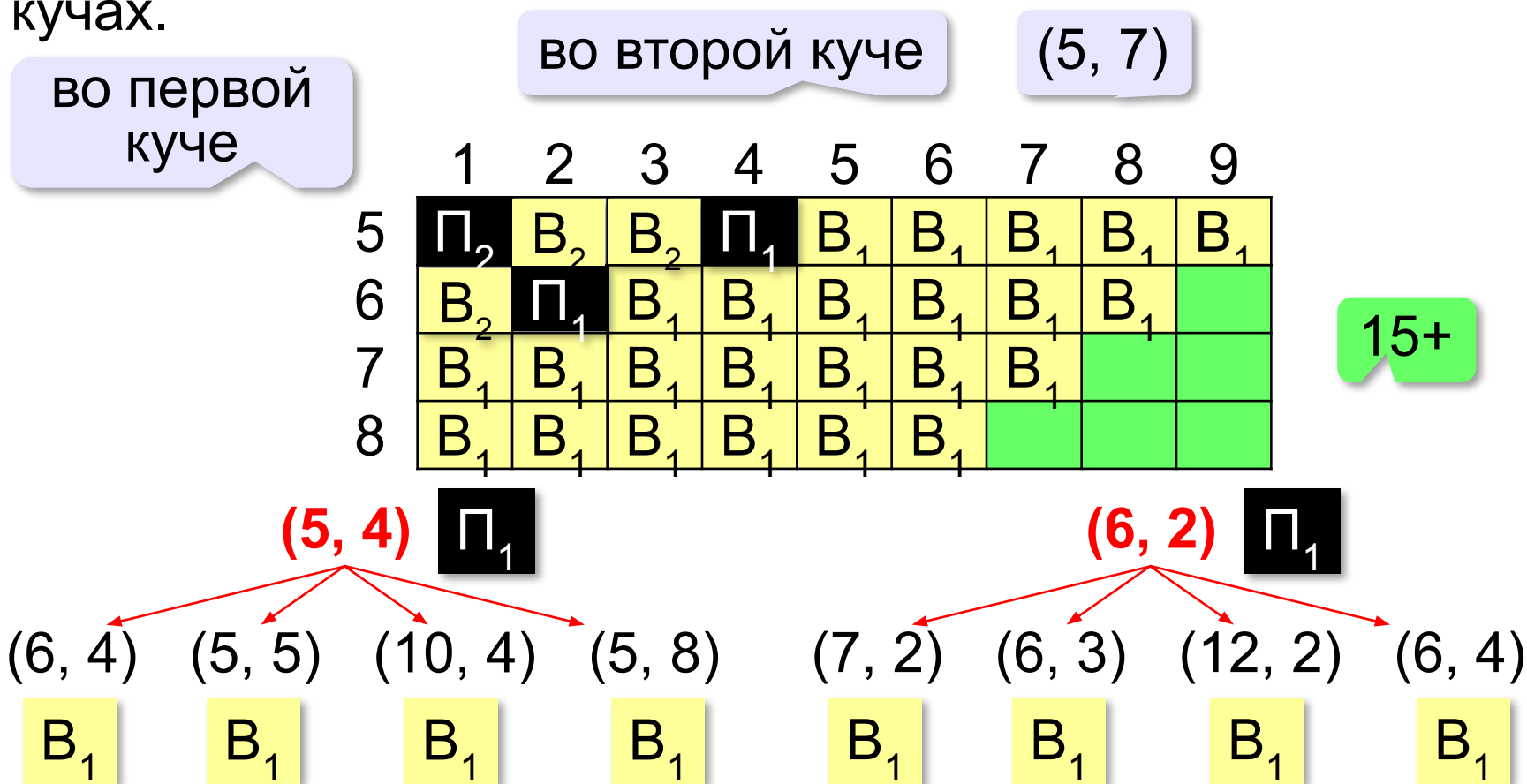
# Задачи

---

1. В начале игры  $S$  камней. Ходы: «+2» (добавить 2) и «\*2» (удвоить). Выигрыш: получить  $\geq 25$  камней.  
Построить дерево игры для  $S = 7$ .
2. В начале игры  $S$  камней. Ходы: «+1» (добавить 1) и «\*3» (утроить). Выигрыш: получить  $\geq 55$  камней.  
Построить дерево игры для  $S = 16$ .
3. В начале игры  $S$  камней. Ходы: «+2» (добавить 2), «+3» (добавить 3) и «\*2» (удвоить). Выигрыш: получить  $\geq 30$  камней.  
Построить дерево игры для  $S = 9$ .
4. **Игра Баше.** В начале игры  $S$  ( $S \leq 15$ ) камней. Ходы: «-1» (взять 1), «-2» (взять 2) и «-3» (взять 3).  
Проигрыш: взять последний камень.  
Построить дерево игры для  $S = 12$ .

# Задача с двумя кучами камней

В начале игры в одной куче 5 камней, во второй –  $S$  камней. Ходы: «+1» (добавить 1) и «\*2» (удвоить) для одной из куч. Выигрыш: получить  $\geq 15$  камней в двух кучах.



# Неполное дерево игры

выигрывает игрок 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	<b>П<sub>2</sub></b>	В <sub>2</sub>	В <sub>2</sub>	<b>П<sub>1</sub></b>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>
6	В <sub>2</sub>	<b>П<sub>1</sub></b>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	
7	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>		
8	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>	В <sub>1</sub>			

В виде таблицы:

все ходы

	игрок 1	игрок 2	игрок 1	игрок 2
(5, 1)	(6, 1)	(6, 2)	(7, 2)	<b>(14, 2)</b>
			(6, 3)	<b>(12, 3)</b>
	(5, 2)		(12, 2)	<b>(12, 4)</b>
			(6, 4)	
(10, 1)	<b>(20, 1)</b>			

ТОЛЬКО  
ВЫИГРЫШНЫЙ ХОД

# Моделирование

## § 8. Модели мышления

# Искусственный интеллект

**Задача:** моделирование мышления человека для решения сложных задач, которые не удаётся решить алгоритмически.

- **экспертные системы**

моделируют ход рассуждений человека-эксперта при принятии решений в сложных ситуациях:

**ЕСЛИ** у человека повышенная температура  
**ТО** он нездоров

**дедукция:** от общих принципов к конкретному случаю

- **нейрокомпьютеры (нейросети)**

поиск алгоритмов решения на основе анализа многих частных случаев (обучение)

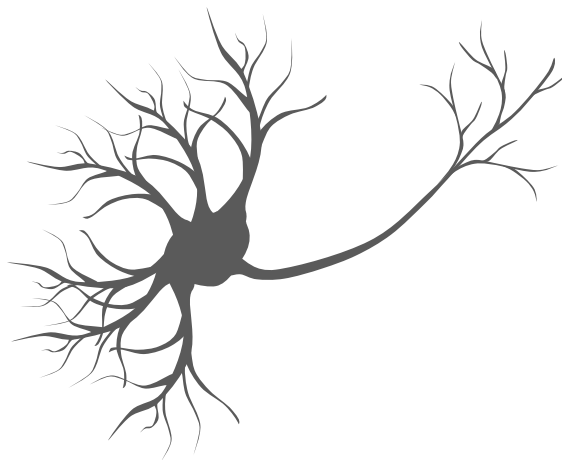
**индукция:** от конкретных случаев к общему правилу

# Модель нейрона

Нейрон – клетка головного мозга.

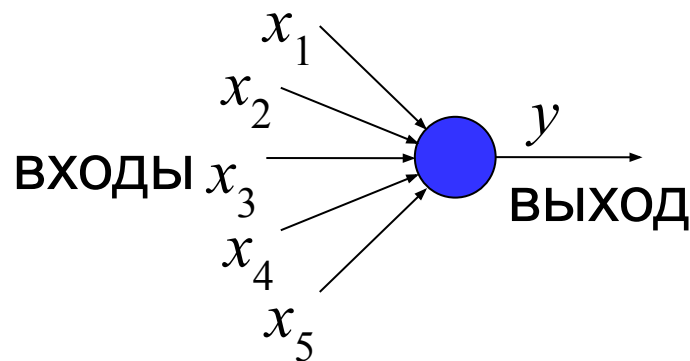
**дендриты**

приём сигналов  
до 10000



**аксон**

передача сигнала



# Модель нейрона

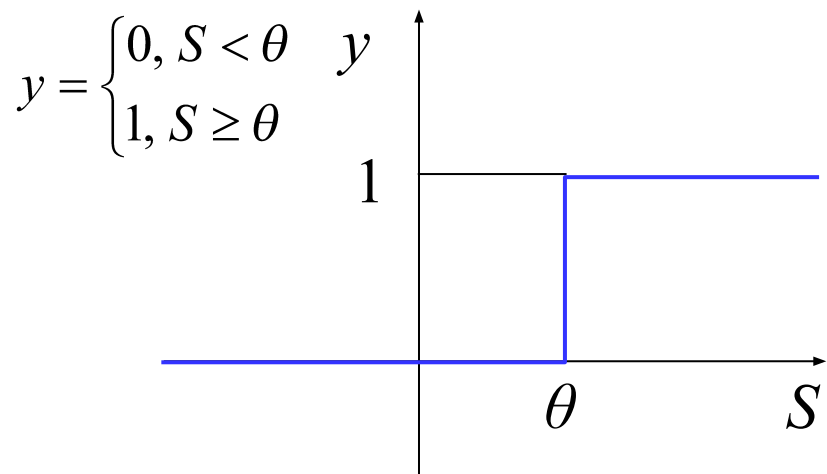
## Модель У. Мак-Каллока и В. Питтса (1943)

$$S = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4x_4 + w_5x_5$$

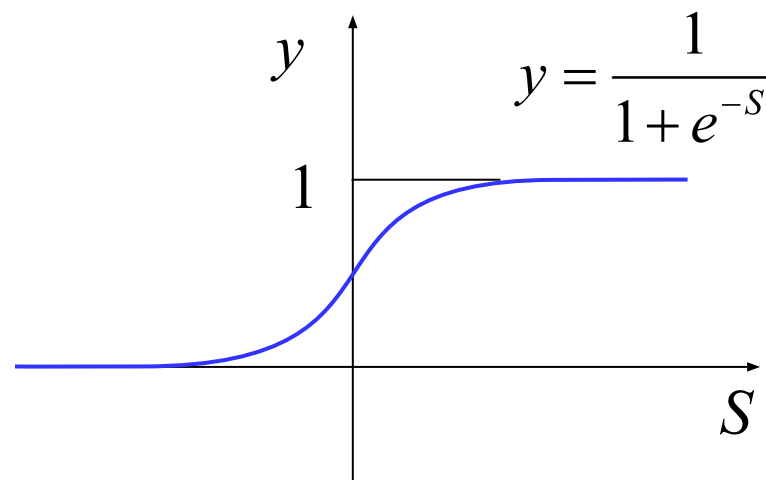
$w_i$  – весовые коэффициенты

## Активационные функции

ступенчатая



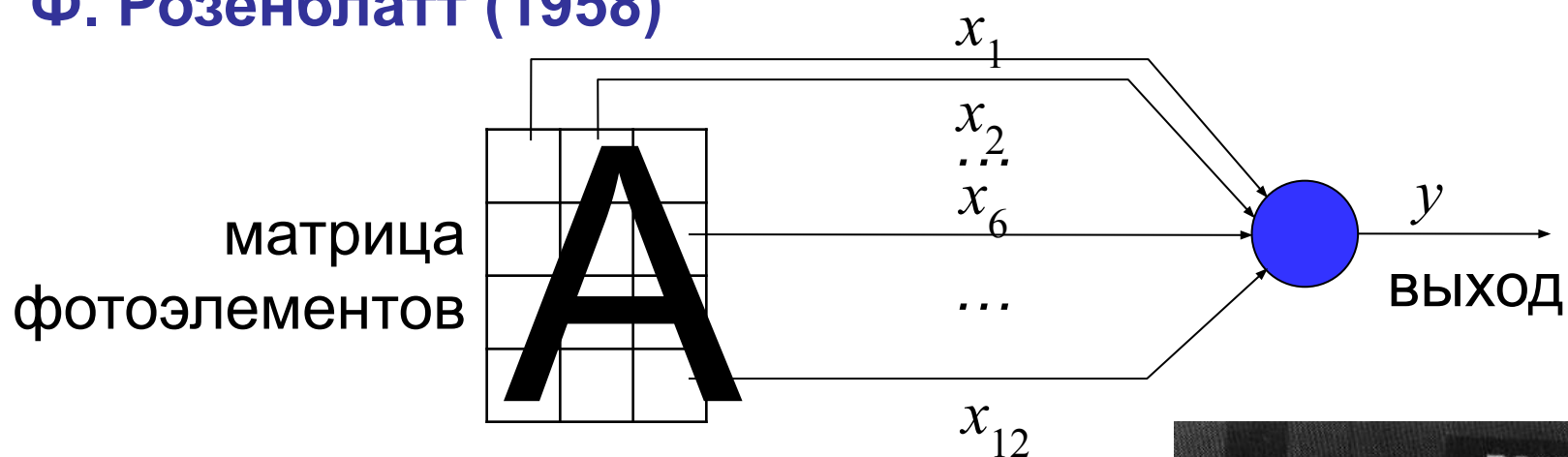
сигмоидная



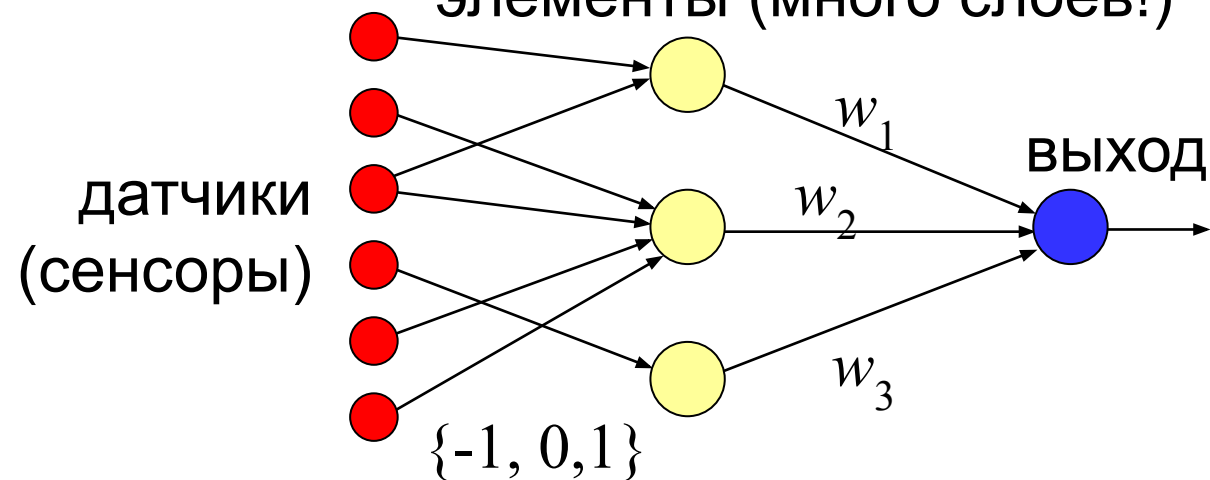
порог  
чувствительности

# Персептрон

Ф. Розенблатт (1958)



промежуточные  
элементы (много слоёв!)



Первый нейрокомпьютер «Марк-1» (1960)

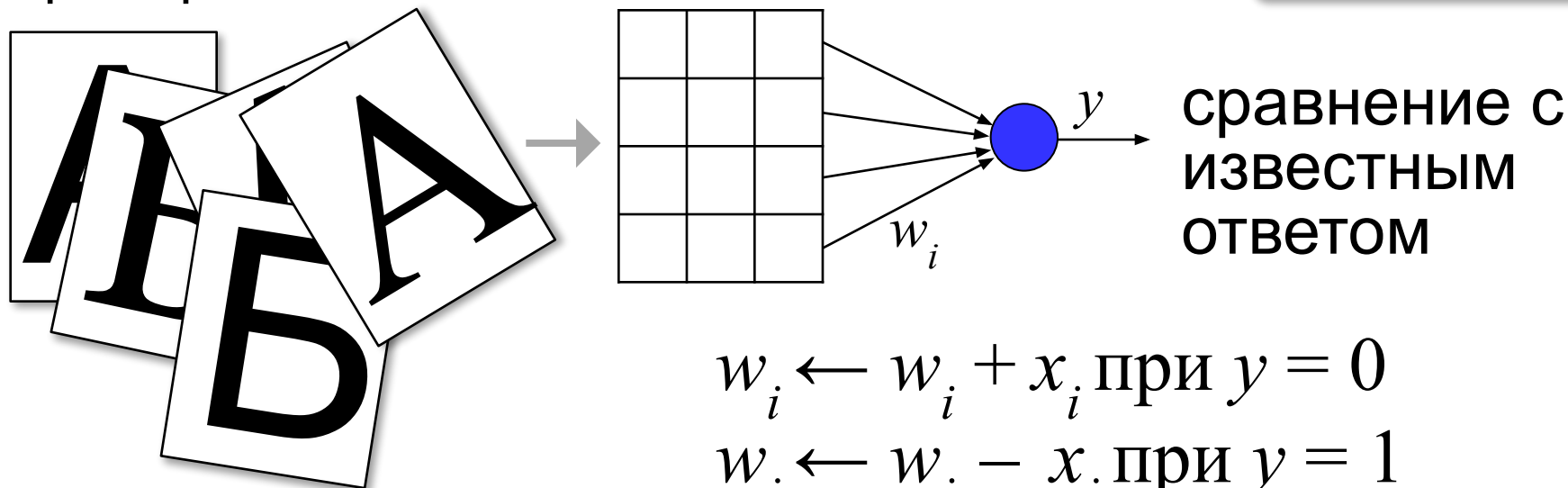


# Обучение нейронной сети

**?** Как выбрать весовые коэффициенты  $w_i$ ?

обучение!

Пример:



$$w_i \leftarrow w_i + x_i \text{ при } y = 0$$

$$w_i \leftarrow w_i - x_i \text{ при } y = 1$$

## Правила Хэбба:

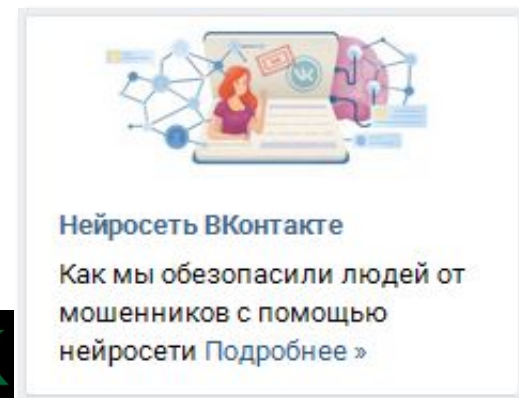
0 вместо 1: увеличить веса входов, равных 1.

1 вместо 0: уменьшить веса входов, равных 1.

# Применение нейронных сетей

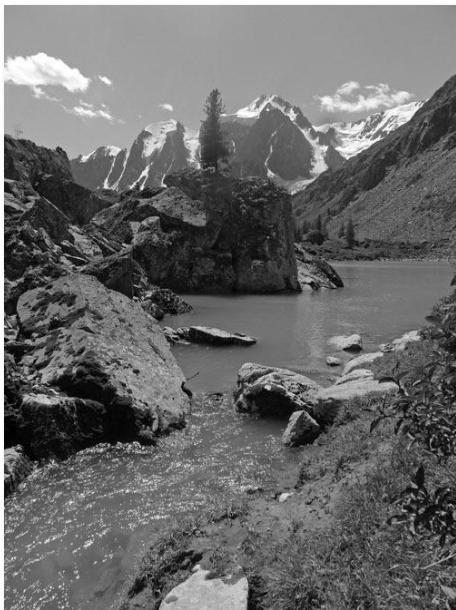
много примеров, но нет теории (алгоритма)

- **распознавание** (лиц, голосов, отпечатков пальцев)
- **классификация** (платёжеспособность клиента, проверка подлинности подписи, постановка диагноза)
- **прогнозирование** (курсов валют, цен на сырьё)

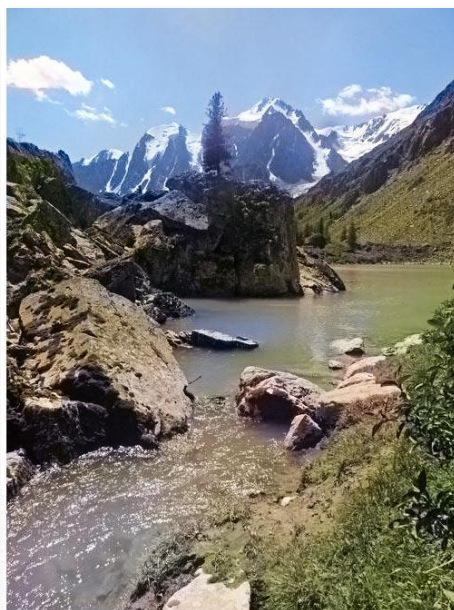


# Раскрашивание фотографий

чёрно-белое фото



это сделала нейронная сеть



[color.artlebedev.ru](http://color.artlebedev.ru)

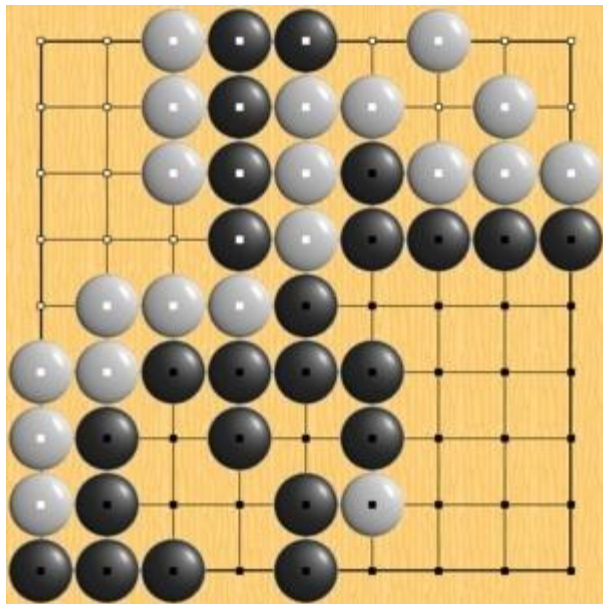
цветное фото





# Интеллектуальные игры

игра «го»



Ли Седоль

Google DeepMind



1:4



# Беспилотные автомобили



# Нейронные сети: итоги

---



- могут работать при неопределенности данных, в условиях помех
- обрабатывают информацию параллельно
- способны самообучаться



- не используют и не выявляют законы природы
- не могут объяснить результат



# Машинное обучение

---

## Machine Learning



Накоплено много данных. Как сделать выводы?

**Задача машинного обучения** – разработка автоматических методов анализа данных и извлечения из них каких-то закономерностей.

The Google logo, consisting of the word "Google" in its characteristic multi-colored font.

The logo for Yandex, featuring the word "Яндекс" in a bold, black, sans-serif font with a red "Я" and "д" and a black "е" and "к" and "с".

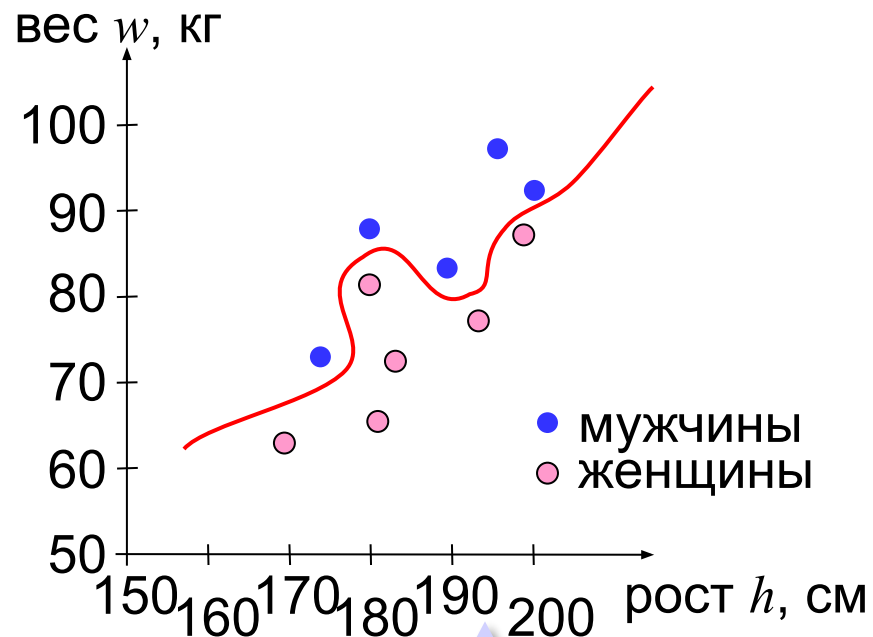
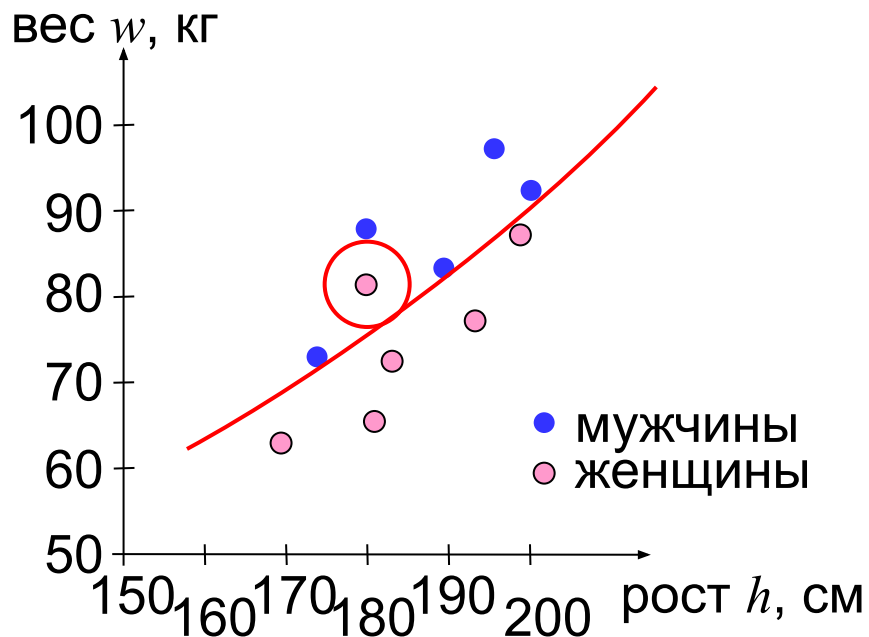


Microsoft

The Facebook logo, featuring the word "facebook" in white, lowercase, sans-serif font on a dark blue rectangular background.

The VKontakte logo, featuring the word "В контакте" in white, sans-serif font on a dark blue rounded rectangular background.

# Задача классификации



**Метод ближайшего соседа:**

Расстояние:

$$L = \sqrt{(h - h_0)^2 + (w - w_0)^2}$$

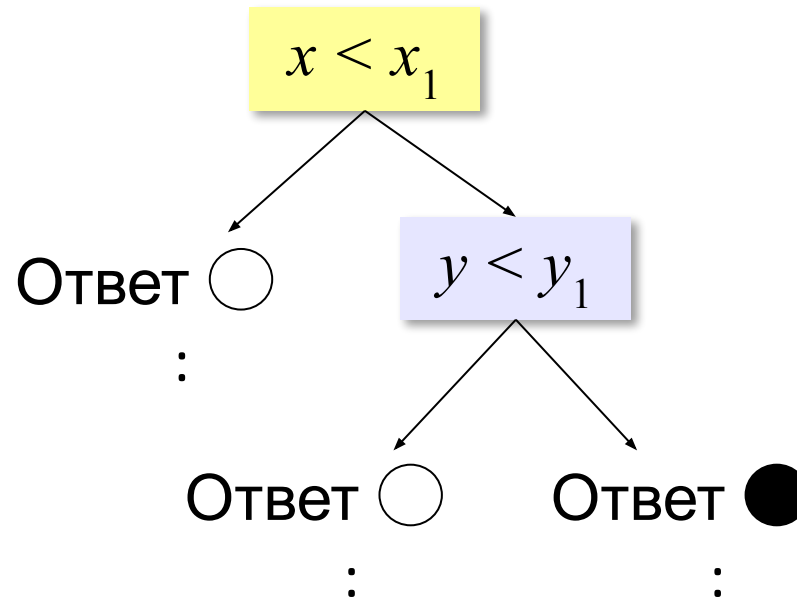
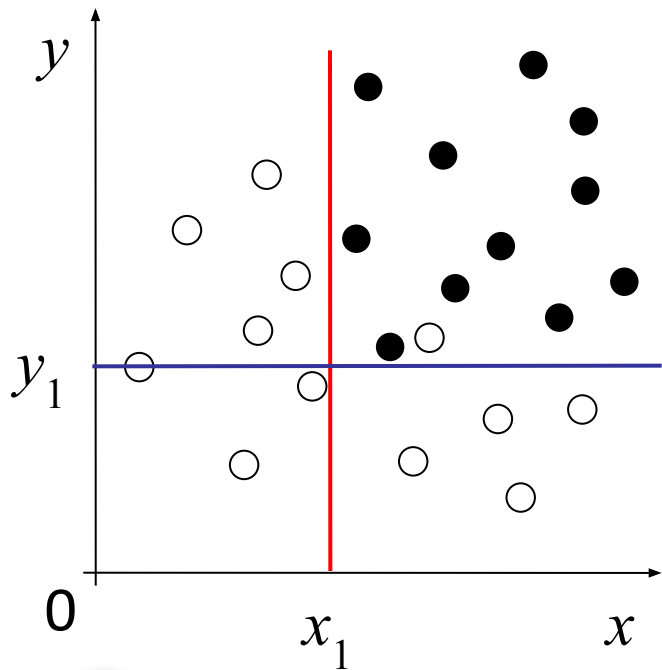
$(h_0, w_0)$  – ближайший сосед



**Переобучение: может быть плохо на новых данных!**



# Дерево решений



Когда даст неверный ответ?



Что делать?

# Применение машинного обучения

---

- классификация
- распознавания образов
- предсказание
- анализ текстов
- машинный перевод
- ранжирование страниц в поисковых системах
- рекомендации (музыка, реклама)

# Большие данные (Big Data)

---

- имеют очень большой объём (терабайты и петабайты);
- не могут храниться и обрабатываться на одном компьютере.

**Серверы Google: > 24 Пбайт в день**

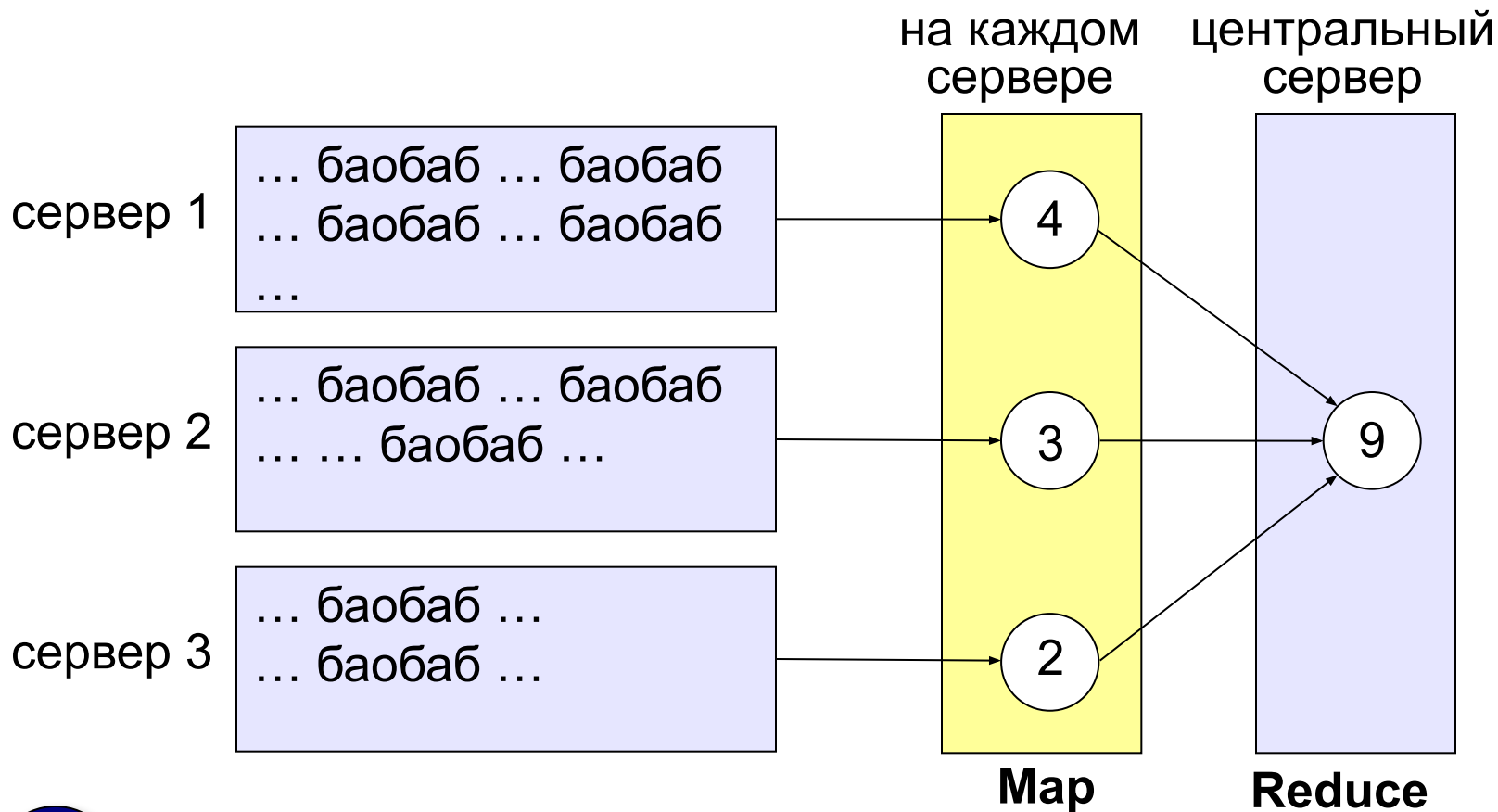
Часто такие данные

- поступают с **большой скоростью** (мегабайты и гигабайты в секунду)
- очень **разнообразны** (числа, графика, видео)

**Решение:**

- распределённые базы данных
- кластеры для параллельной обработки

# Алгоритм Map-Reduce



Сколько слов «баобаб»?

# Моделирование

## § 9. Этапы моделирования

# I. Постановка задачи

---

- **исследование оригинала**

изучение сущности объекта или явления

- **анализ («что будет, если ...»)**

научиться прогнозировать последствий при различных воздействиях на оригинал

- **синтез («как сделать, чтобы ...»)**

научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия

- **оптимизация («как сделать лучше»)**

выбор наилучшего решения в заданных условиях



Ошибки при постановке задачи приводят к наиболее тяжелым последствиям!

# I. Постановка задачи

---

## Хорошо поставленная задача:

- описаны все связи между исходными данными и результатом
- известны все исходные данные
- решение существует
- задача имеет единственное решение

## Примеры плохо поставленных задач:

- Уроки в школе начинаются в  $8^{30}$ . В  $10^{00}$  к школе подъехал красный автомобиль. Определите, когда Вася выйдет играть в футбол?
- Вася бросает мяч со скоростью 12 м/с. Где мяч впервые ударится о землю?
- Решить уравнение  $\sin x = 4$  (нет решений).
- Найти функцию, которая проходит через точки  $(0,1)$  и  $(1,0)$  (бесконечно много решений).

# I. Постановка задачи (пример)

Спортсмен Вася в синей кепке бросает белый мяч со скоростью 12 м/с. Под каким углом к горизонту ему нужно бросить мяч, чтобы попасть в желтую мишень?



Хорошо поставлена?

## Допущения:

Мишень расположена на высоте 4 м на расстоянии 10 м от Васи. В момент броска мяч находится на высоте 2 м от земли.



Всегда ли есть решение?



Решение единственно?



## II. Разработка модели

бросает мяч со скоростью 12 м/с. Под каким углом к горизонту ему нужно бросить мяч, чтобы попасть в мишень? Мишень расположена на высоте 4 м на расстоянии 10 м. В момент броска мяч находится на высоте 2 м от земли.

1) Определить **существенные** исходные данные.

- мяч и мишень — материальные точки
- мишень неподвижна
- сопротивление воздуха не учитывается.

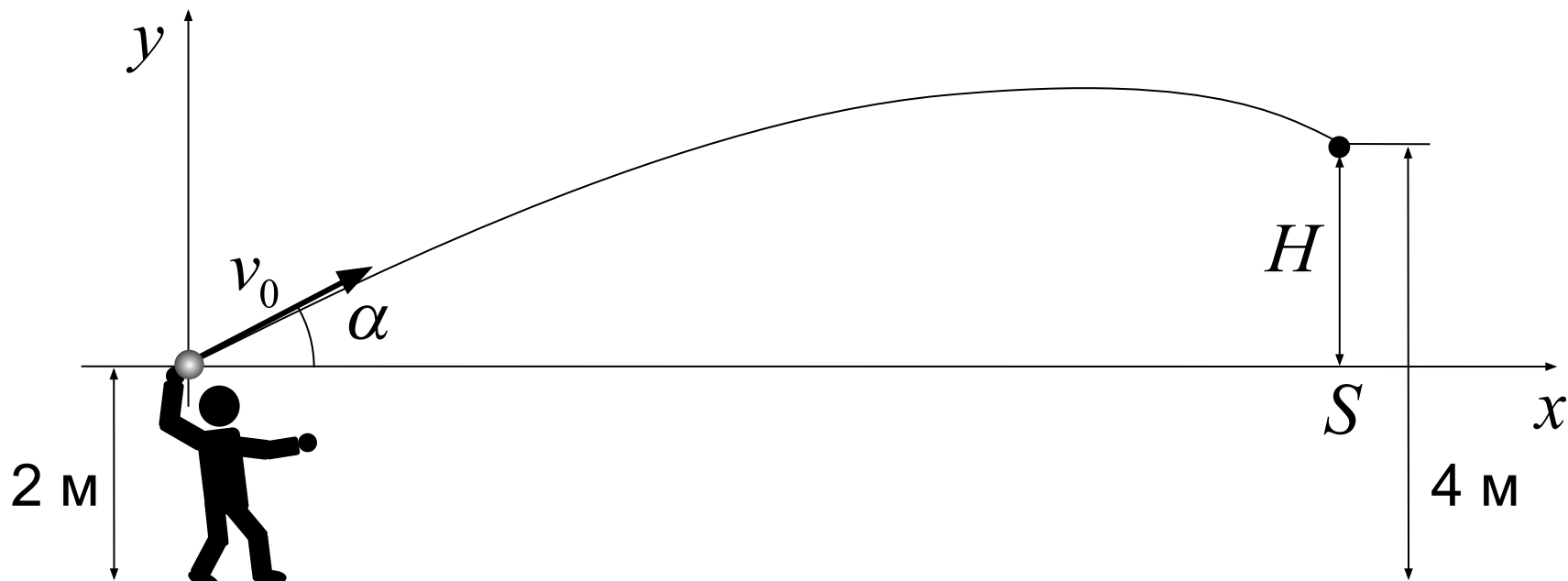
2) Выбор **типа модели**.



Можно использовать несколько моделей!

## II. Разработка модели

### Графическая модель

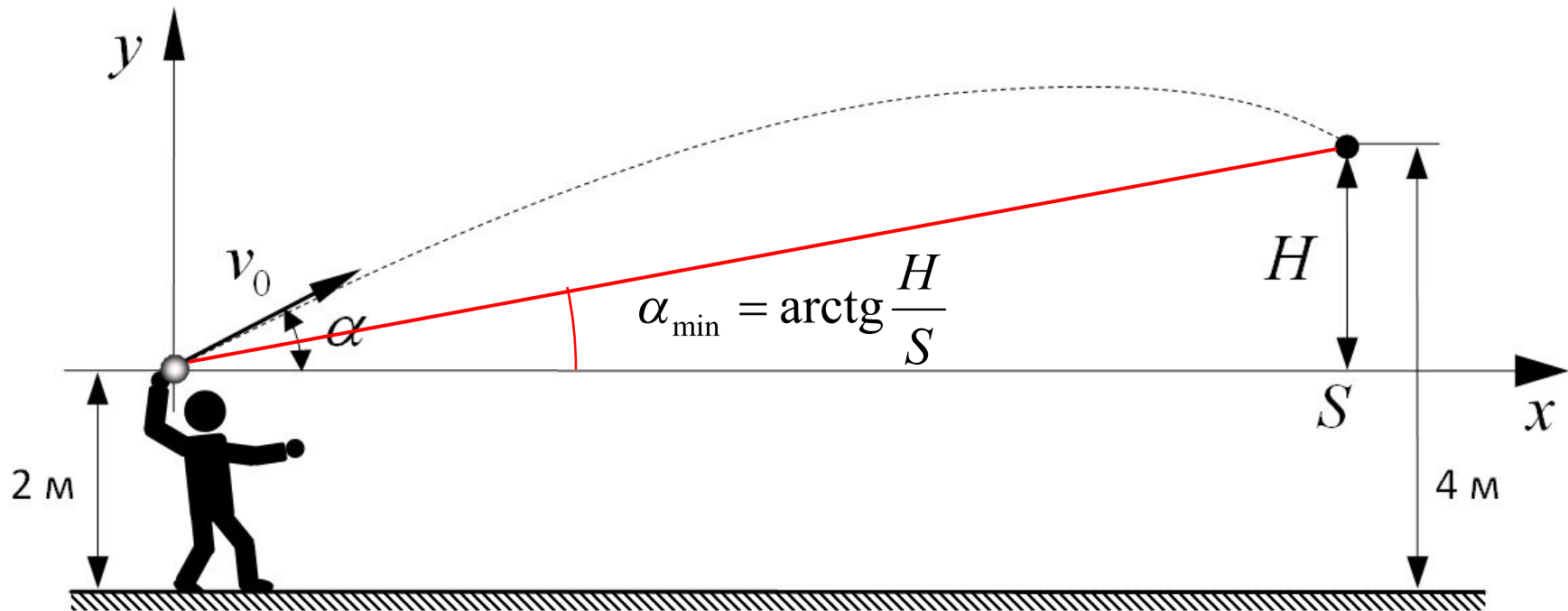


### 3) Формальная (математическая) модель

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha, \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Задача: найти  $t$  и  $\alpha$ , такие что  $x = S, y = H$

# Уточнение диапазона углов



Диапазон углов для поиска:  $\left[ \arctg \frac{H}{S} \dots \frac{\pi}{2} \right]$

## II. Разработка модели

---

### 4) Алгоритм моделирования

#### Метод I.

Меняем угол  $\alpha$ . Для выбранного угла  $\alpha$  строим траекторию полета мяча. Если она проходит выше мишени, уменьшаем угол, если ниже – увеличиваем.

#### Метод II.

Из первого равенства выражаем время полета:

$$v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t = S \quad \Rightarrow \quad t = \frac{S}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$

Меняем угол  $\alpha$ . Для выбранного угла  $\alpha$  считаем  $t$ , а затем – значение  $y$  при этом  $t$ . Если оно больше  $H$ , уменьшаем угол, если меньше – увеличиваем.



не надо строить всю траекторию для каждого  $\alpha$

## II. Разработка модели

---

### 5) Компьютерная модель

- программа (Паскаль, Си, ...)
- электронные таблицы (*Excel, OpenOffice.org Calc*)
- среды моделирования (*Simulink, VisSim*)

## III. Тестирование модели

**Тестирование** – это проверка модели на простых исходных данных с известным результатом.

а) тестирование **математической модели**:

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha, \quad y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

- при  $t = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$  (в начале координат)
- при  $v_0 = 0 \Rightarrow x = 0, y = -\frac{gt^2}{2}$  (падение вниз)
- при  $\alpha = 90^\circ \Rightarrow x = 0$
- при увеличении  $t$  парабола «загибается» вниз

б) тестирование **компьютерной модели**:

(пробные расчёты в рассмотренных условиях)



Доказывает ли успешное тестирование правильность модели?

## IV. Эксперимент с моделью

**Эксперимент** – это исследование модели при тех исходных данных, которые нас интересуют (результат заранее неизвестен).

- 1) задаём угол  $\alpha$
- 2) находим время  $t = \frac{S}{v_0 \cdot \cos \alpha}$
- 3) находим высоту

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$



Может быть два решения!

$y < H$

Диапазон углов для поиска:  $\left[ \arctg \frac{H}{S} \dots \frac{\pi}{2} \right]$



Можно ли сразу использовать двоичный поиск?



Как отделить два решения?

построить график  $y(\alpha)$

## V. Анализ результатов эксперимента

---



Необходима проверка на оригинале!

### Возможные выводы:

- задача решена, модель адекватна
- необходимо изменить алгоритм или условия моделирования
- необходимо изменить модель (учесть дополнительные свойства)
- необходимо изменить постановку задачи



## V. Анализ результатов

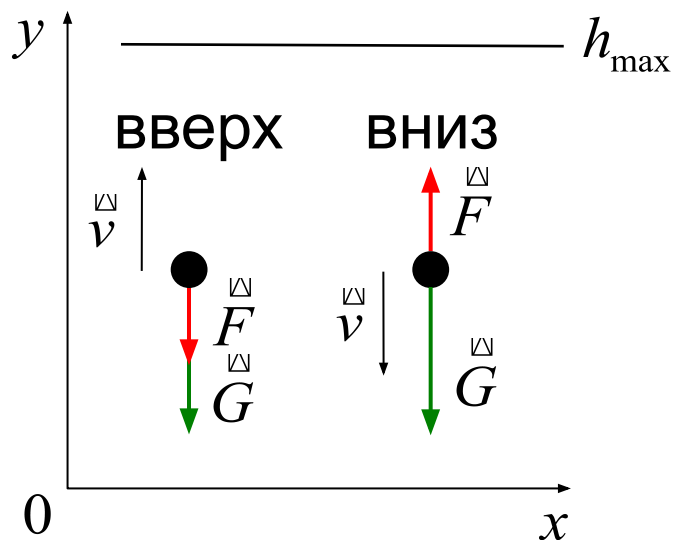
---

- всегда ли Вася сможет попасть в мишень?
- если начальная скорость отличается от заданной?
- если мяч и мишень не считать материальными точками?
- как сильно влияет сопротивление воздуха?
- если мишень качается?
- и т.д.....

# Моделирование

## § 10. Моделирование движения

# Задача



- найти  $h_{\max}$
- найти  $v$  при приземлении



Какой тип движения?  
равномерное?  
равноускоренное?



Какая ещё сила?

плотность воздуха  $\rho = 1,23 \text{ кг/м}^3$

$G = m \cdot g$   
не меняется!

$$F = \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot C \cdot S$$

площадь сечения

шар:  $C = 0,4$   $S = \pi \cdot r^2$

# Математическая модель

В проекции на ось OY:

всегда противоположна  $v$

$$G = -m \cdot g \quad F = -\frac{\rho \cdot |v| \cdot v}{2} \cdot C \cdot S$$

$$a = \frac{G + F}{m}$$



Силы меняются  $\Rightarrow$  ускорение меняется!

## Методы решения:

- аналитический (высшая математика)
- численное моделирование

# Дискретизация

Дискретная модель описывает состояние системы при

$$t = 0, \delta, 2\delta, 3\delta, \dots$$

шаг дискретизации

**Задача:** зная  $(y_i, v_i, a_i)$  при  $t_i = i \cdot \delta$   
найти  $(y_{i+1}, v_{i+1}, a_{i+1})$  при  $t_{i+1} = (i+1) \cdot \delta$

**Допущение:** силы (и ускорение) не меняются на интервале  $[t_i, t_{i+1}]$

**Вычисления:**

$$F_i = -\frac{\rho |v_i| v_i}{2} \cdot C \cdot S$$

$$a_i = \frac{G + F_i}{m} = -g + \frac{F_i}{m}$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot \delta$$

$$y_{i+1} = y_i + v_i \cdot \delta + \frac{a_i \cdot \delta^2}{2}$$

# Компьютерная модель

$t := 0; v := v_0; y := 0$

$k := r_0 * C * S / 2$

нц пока  $y \geq 0$

$F := -k * \text{abs}(v) * v$  | сила сопротивления

$a := -g + F/m$  | ускорение

$y := y + v * \text{delta} + a * \text{delta} * \text{delta} / 2$  | координата

$v := v + a * \text{delta}$  | скорость

$t := t + \text{delta}$  | время

кц



Как найти  $h_{\max}$  ?

если  $y > h$  то

$h := y$

все

# Моделирование

## § 11. Математические модели в биологии

# Модель неограниченного роста (Т. Мальтус)

$N_0$  – начальная численность

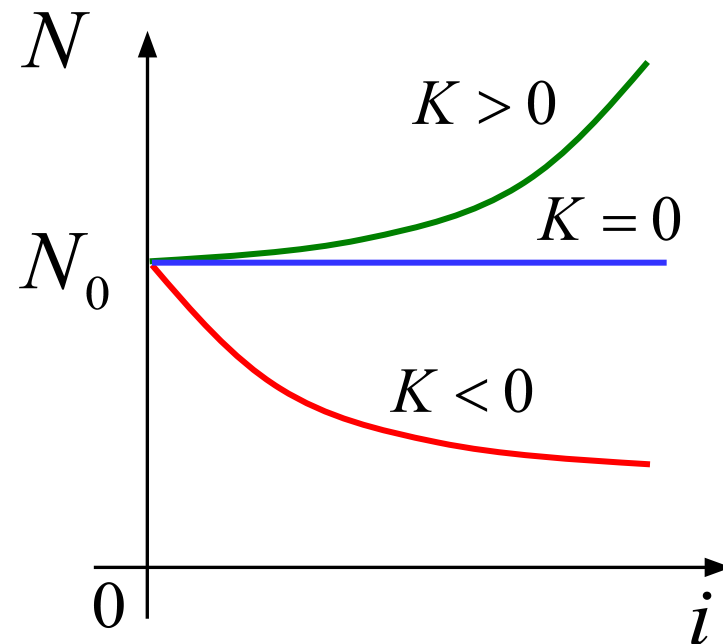
$N_i$  – численность через  $i$  периодов

рождаемость

смертность

$$N_i = N_{i-1} + k_p \cdot N_{i-1} - k_c \cdot N_{i-1}$$

$$N_i = (1 + K) \cdot N_{i-1} \quad K = k_p - k_c$$



## Особенности модели:

- 1) не учитывается влияние численности  $N$  и внешней среды на  $K$
- 2) не учитывается влияние других видов на  $K$



# Модель ограниченного роста (П. Ферхюльст)

$L$  – предельная численность животных

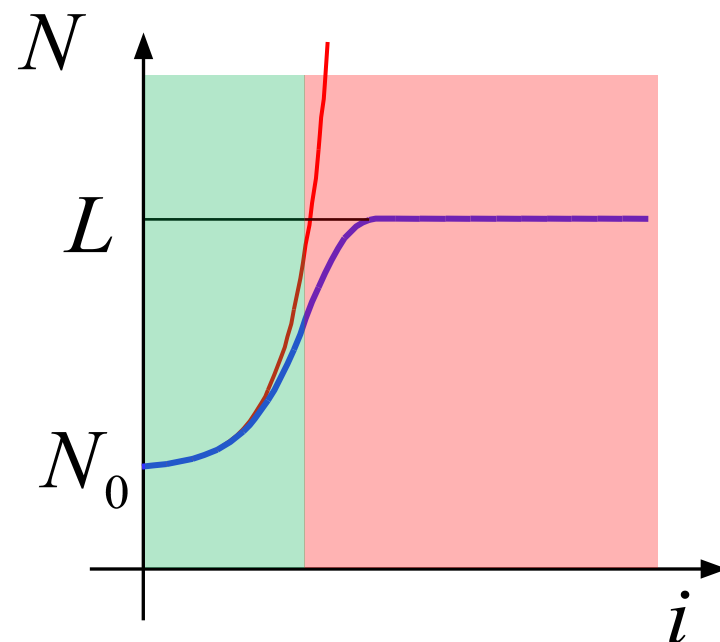
**Идеи:** 
$$N_i = (1 + K_L) \cdot N_{i-1}$$

- 1) коэффициент прироста  $K_L$  зависит от численности  $N$
- 2) при  $N=0$  должно быть  $K_L=k$  (начальное значение)
- 3) при  $N=L$  должно быть  $K_L=0$  (достигнут предел)

$$N_i = \left( 1 + k \cdot \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$



Модель адекватна,  
если ошибка < 10%!



# Модель с отловом

рыбоводческое хозяйство, разведение пушных зверей, ...

$$N_i = \left( 1 + k \cdot \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1} - R$$

ОТЛОВ



Какая будет численность?  $L$ ?

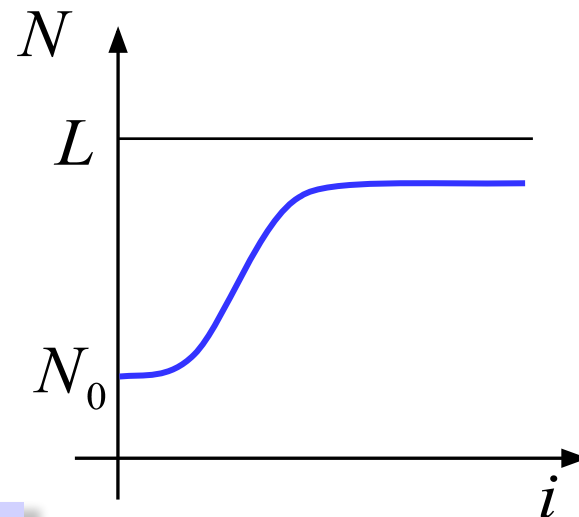
$N_i = N_{i-1}$ , прирост = отлову

$$N = N + K \frac{L - N}{L} N - R$$

$$\Rightarrow \frac{K}{L} \cdot N^2 - K \cdot N + R = 0$$



Сколько можно вылавливать?



# Модель «хищник-жертва»

## Модель – не-система:



караси



щуки

$$N_i = \left( 1 + k \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - D) \cdot Z_{i-1}$$

вымирают  
без еды

## Модель – система:

- 1) число встреч пропорционально  $N_i \cdot Z_i$
- 2) «эффект» пропорционален числу встреч

численность уменьшается

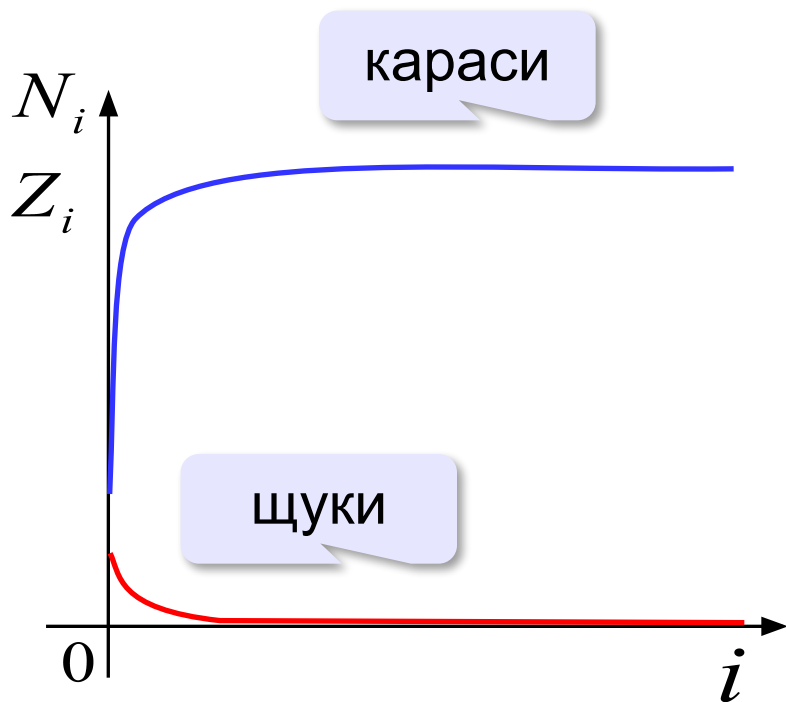
$$N_i = (1 + K_{i-1} - b_N Z_{i-1}) \cdot N_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - D + b_Z N_{i-1}) \cdot Z_{i-1}$$

численность увеличивается

# Модель «хищник-жертва»

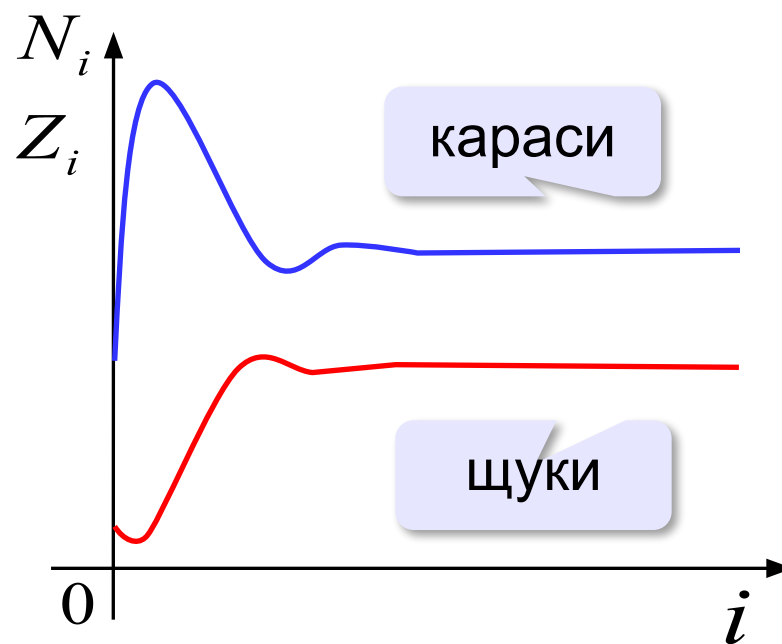
Хищники вымирают:



$$D = 0,8$$

$$b_N = b_Z = 0,005$$

Равновесие:

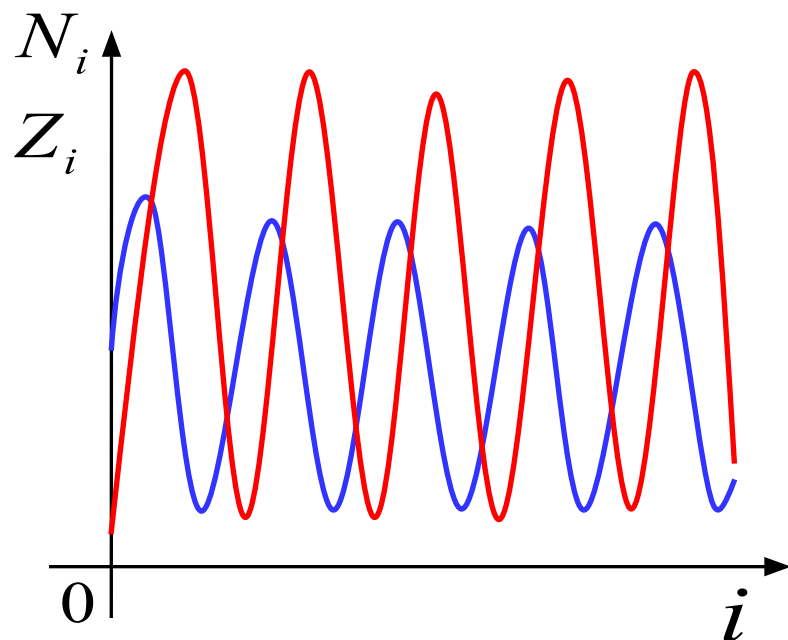


$$D = 0,8$$

$$b_N = 0,01; \quad b_Z = 0,012$$

# Модель «хищник-жертва»

Колебания:

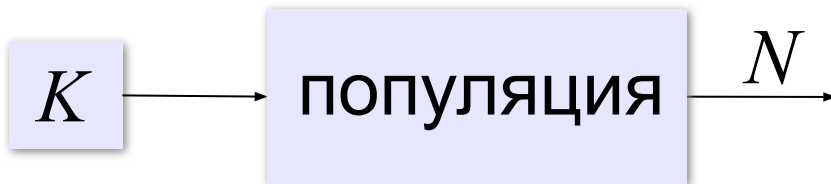


$$D = 0,8$$

$$b_N = 0,01; \quad b_Z = 0,015$$

# Обратная связь

Модель неограниченного роста:

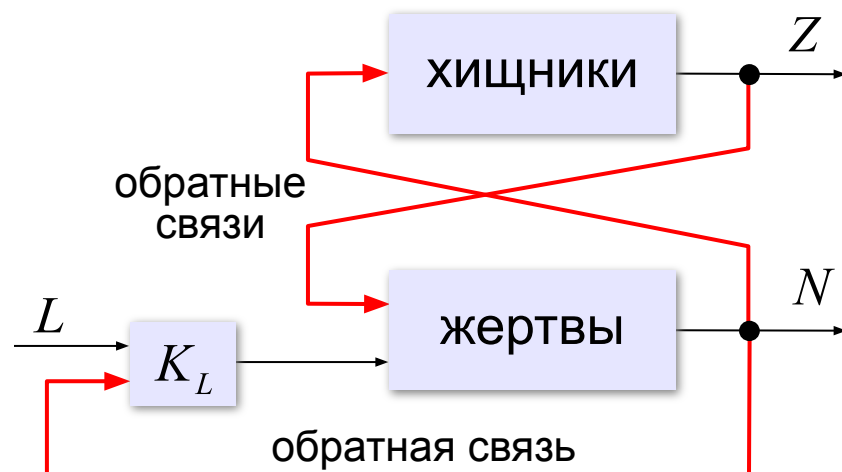
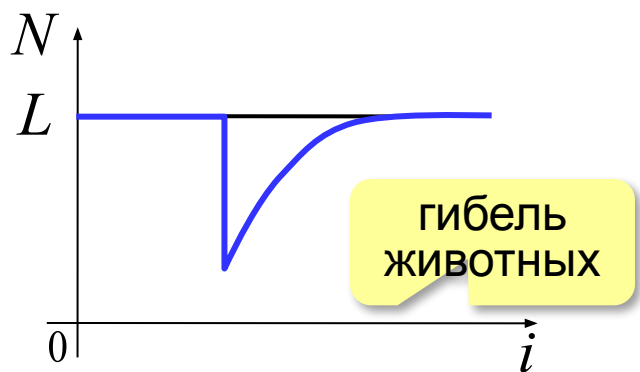


Модель ограниченного роста:



# Саморегуляция

**Саморегуляция** – это способность системы поддерживать свое внутреннее состояние за счет связей между элементами.



**Саморегуляция только при малых отклонениях!**



# Моделирование

## § 12. Вероятностные модели



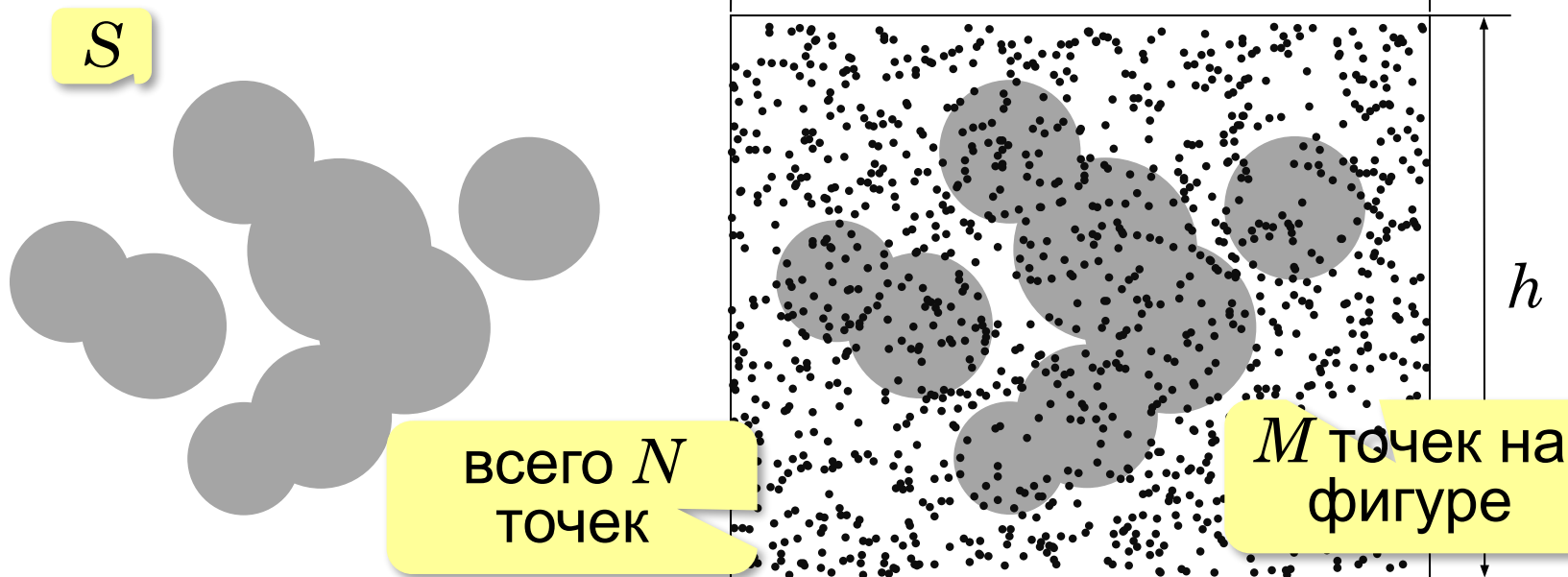
# Методы Монте-Карло

**Методы Монте-Карло** – это методы решения вычислительных задач с помощью математического моделирования, основанные на использовании случайных чисел.

-  результат приближённый
-  это лучше, чем никакой

# Вычисление площади

Найти площадь фигуры  $S$ :

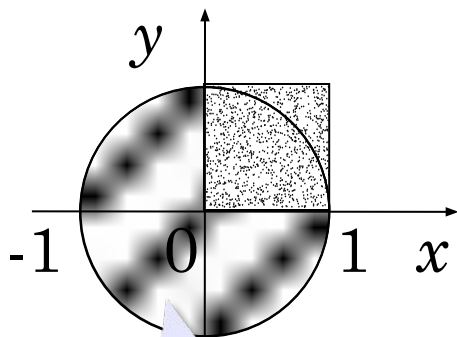


При равномерном распределении:

$$\frac{S}{w \cdot h} \approx \frac{M}{N}$$

$$S \approx \frac{M}{N} wh$$

# Вычисление числа $\pi$



$$S_1 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi = 4S_1 \approx 4 \frac{M}{N} \cdot 1 = 4 \frac{M}{N}$$

$$S = \pi R^2 = \pi$$

если внутри  
круга

**цел**  $i$ ,  $M = 0$ ,  $N = 100000$

**вещ**  $x$ ,  $y$

**нц** для  $i$  от 1 до  $N$

$x := \text{rand}(0, 1)$

$y := \text{rand}(0, 1)$

**если**  $x^2 + y^2 \leq 1$  **то**

$M := M + 1$

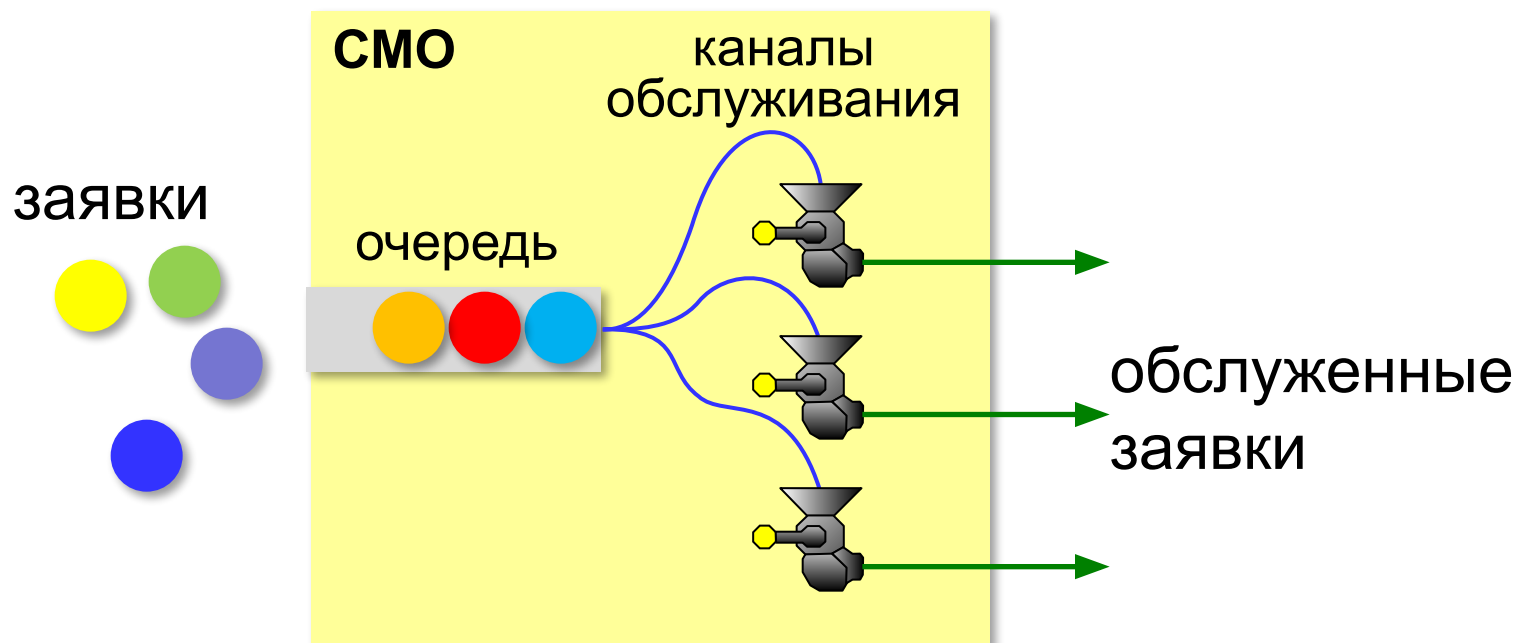
**все**

**кц**

**вывод** " $\pi =$ ",  $4 * M / N$

# Системы массового обслуживания (СМО)

магазин, банк, служба ремонта, касса...



## Особенности:

- заявки поступают через случайные интервалы
- время обслуживания – случайная величина



**Нужна вероятностная модель!**

# Модель работы банка

## Детерминированная модель:

- за 1 минуту входит  $P$  клиентов
- время обслуживания  $T$  минут

$$K \geq P \cdot T$$

## Вероятностная модель:

- $K$  – количество касс
- за 1 минуту входит от 0 до  $P_{\max}$  клиентов
- время обслуживания от  $T_{\min}$  до  $T_{\max}$  минут
- изменение числа клиентов в банке

$$N_{i+1} = N_i + P_i - R_i$$

вошли за  $i$ -ую минуту

обслужены за  $i$ -ую минуту

- средняя длина очереди  $Q_i = \frac{N_i}{K}$
- среднее время ожидания  $Q_i \cdot T_i$



Сколько нужно касс?

Допущение:  
распределение  
равномерное

# Модель работы банка

**?** Как найти  $R_i$ ?

## Допущение:

$K$  касс работают с одинаковой скоростью, но эта скорость меняется каждый интервал  $T_i$  – случайное время обслуживания (от  $T_{\min}$  до  $T_{\max}$ ) обслужено за 1 интервал на 1 кассе  $1/T$ , на всех кассах

$$R_i = \frac{K}{T_i}$$

**Задача:** выбрать  $K$  так, чтобы среднее время ожидания было больше допустимого в течение не более 5% от полного времени моделирования.

«плохие минуты»:  $Q_i \cdot T_i = \frac{N_i}{K} \cdot T_i > M$

допустимое  
время ожидания

# Модель работы банка

$K := 2$		меняем количество касс
$R_{\max} := 4$		макс. число входящих за 1 мин
$T_{\min} := 1$		мин. время обслуживания
$T_{\max} := 9$		макс. время обслуживания
$L := 480$		период моделирования
$M := 15$		допустимое время ожидания
$N := 0$		сначала в банке никого нет
$count := 0$		счетчик «плохих» минут

 Что выводить в результате?

$$\frac{count}{L} < 0,05 \Rightarrow \text{касс достаточно}$$

 Сравнить с детерминированной моделью!

# Модель работы банка (КуМир)

```
нц для i от 1 до L
  P := irand(0, PMax)
  T := rand(Tmin, Tmax)
  R := int(K / T)
  N := N + P - R
  если N < 0 то N := 0 все
  dT := N / K * T
  если dT > M то
    count := count + 1
  все
кц
```

→ Паскаль



## Модель работы банка (Паскаль)

---

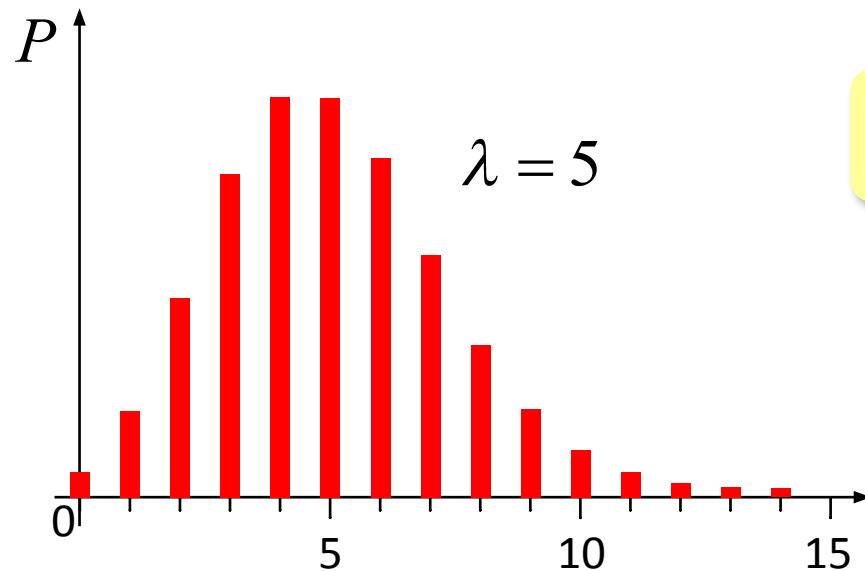
```
for i:=1 to L do begin
  P:= random (PMax) ;
  T:= Tmin + random* (Tmax - Tmin) ;
  R:= round (K / T) ;
  N:= N + P - R;
  if N < 0 then N:= 0;
  dT:= N / K * T;
  if dT > M then
    count:= count + 1
end;
```

# Уточнение модели

- за 1 минуту входит от 0 до  $P_{\max}$  клиентов

## Распределение Пуассона:

Допущение: ~~распределение равномерное~~



вероятность того, что  $P = k$

$P_{\text{среднее}}$

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

## Получение из равномерного распределения: метод обратных функций

# Распределение Пуассона (КуМир)

```
алг цел Poisson(цел Lam)
нач
  вещ s, r, alpha;
  цел k
  r := exp(-Lam); s := r
  k := 0
  alpha := rand(0, 1)
  нц пока s < alpha
    k := k + 1
    r := r * Lam / k
    s := s + r
  кц
  знач := k
кон
```

# Распределение Пуассона (Паскаль)

```
function Poisson(Lam: integer) : integer;  
var s, r, alpha: real;  
    k: integer;  
begin  
    r := exp(-Lam); s := r;  
    k := 0;  
    alpha := random;  
    while s < alpha do begin  
        k := k + 1;  
        r := r * Lam / k;  
        s := s + r  
    end;  
    Poisson := k  
end;
```

# Конец фильма

---

**ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич**

д.т.н., учитель информатики

ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург

[kpolyakov@mail.ru](mailto:kpolyakov@mail.ru)

**ЕРЕМИН Евгений Александрович**

к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной

дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь

[eremin@pspu.ac.ru](mailto:eremin@pspu.ac.ru)

# Источники иллюстраций

---

1. [www.historicships.com](http://www.historicships.com)
2. [www.amazon.co.uk](http://www.amazon.co.uk)
3. [www.supahcars.com](http://www.supahcars.com)
4. [physicon.ru](http://physicon.ru)
5. [www.laerdal.com](http://www.laerdal.com)
6. [biohimija.ru](http://biohimija.ru)
7. [ecosafe.spbu.ru](http://ecosafe.spbu.ru)
8. [www.skyplaz.ru](http://www.skyplaz.ru)
9. [www.burpipe.ru](http://www.burpipe.ru)
10. [www.garshin.ru](http://www.garshin.ru)
11. [www.thisnext.com](http://www.thisnext.com)
12. [3dsdesign.ru](http://3dsdesign.ru)
13. [en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org)
14. [ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org)
15. [www.m24.ru](http://www.m24.ru)
16. [naked-science.ru](http://naked-science.ru)
17. [medium.com](http://medium.com)
18. иллюстрации художников издательства «Бином»
19. авторские материалы