Электричество и магнетизм

Курс лекций.

Фараджева Мислимат Пиралиевна

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

ОТКРЫТЫЙ
ПОЛИТЕХ

Электростатика

1. Диполь. Поле системы зарядов.
2. Макро и микрополя в веществе
3. Поляризация диэлектриков

Диполь. Поле системы зарядов.

$$\oint EdS = \frac{q_{внутр}}{\varepsilon_0}$$

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Phi}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\int \vec{E}\cdot d\vec{S}}{V} = div\vec{E}.$$

$$\nabla a = \frac{\partial a_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{k};$$

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

Свойства оператора Набла:

1.) $\nabla b = gradb$;

2.) $\nabla\vec{b} = div\vec{b}$;

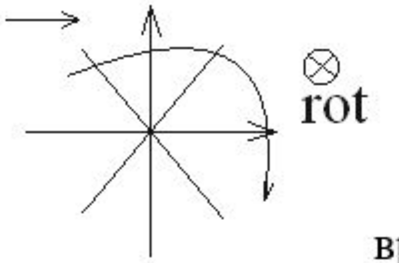
Рассмотрим дивергенцию радиус вектора:

$$div\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1=3.$$

$$\int \vec{E}d\vec{S} = \int div\vec{E}dV = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV$$

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

«Оденем» на ось спицы



вращение крыльчатки

Стокс: $\oint \vec{a}\cdot d\,\vec{l} = \int_{(S)} rot\,\vec{a}d\vec{S}$

Циркуляция вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру равна потоку ротора через поверхность, ограниченную этим контуром.

(Циркуляция вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру равна)

$\oint \vec{E}d\,\vec{l} \rightarrow rot\vec{E} = 0$ (теорема о циркуляции)

$rot\vec{a} = \nabla \times \vec{a}$ - это есть определитель по первой строке

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
ОТКРЫТЫЙ ПОЛИТЕХ

Диполь. Поле системы зарядов.

$\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$-\boldsymbol{d\varphi} = \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{r}}$

$-d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot dr \rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$

(φ-φ(∞)) из данной точки r на ∞ φ(∞)=0

Принцип суперпозиции $\varphi = \sum \varphi_i$

$\varphi = \int d\varphi$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = -\,\mathrm{grad}U\ (U - \text{пот. энергия}) \\ U = q\cdot\varphi \\ \vec{F} = q\cdot\vec{E} \end{array}\right| \rightarrow \vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,(\varphi) \rightarrow \boldsymbol{\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\,\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ (2)\,\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi \end{array}\right| \rightarrow \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\nabla$$

$$\left.\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_x b_x + a_x b_x\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \nabla\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} = \Delta \text{ (лапласиан)}$$

$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Основное уравнение электростатики (уравнение Пуассона)

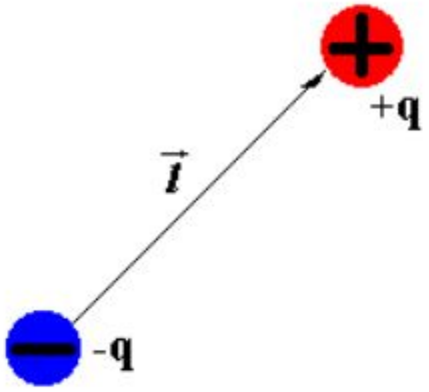
Частный случай:

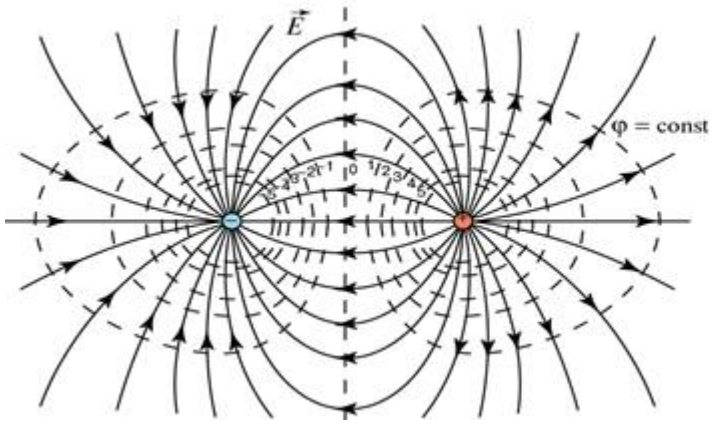
ρ=0 → Δφ=0 (уравнение Лапласа)

Диполь. Поле системы зарядов.

Электрический диполь — это система, состоящая из двух точечных равных по величине и противоположных по знаку зарядов, находящихся на расстоянии l друг от друга (рис. 3.6).

$$\vec{p} = q\vec{l}$$



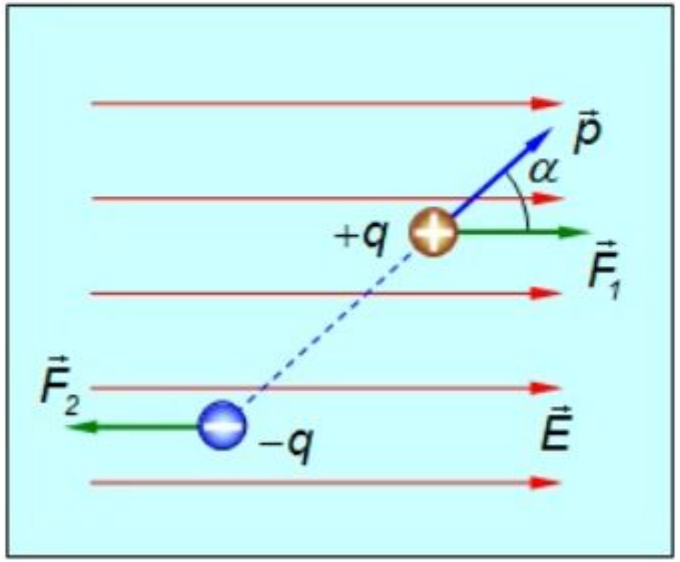


$$M = Fl\sin\alpha = qEl\sin\alpha.$$

$$\vec{M} = \left[\vec{p}\times\vec{E}\right]$$

$$\delta A = Md\alpha = pE\sin\alpha\, d\alpha,$$

$$\delta\Pi = pE\sin\alpha\, d\alpha,$$

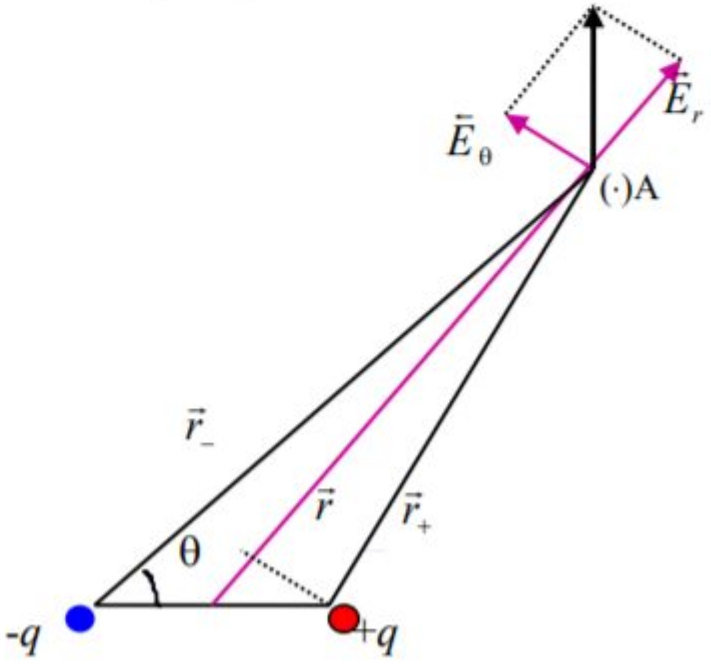


$$\Pi = -pE\cos\alpha\, d\alpha + const$$

$$\Pi = -pE\cos\alpha\, d\alpha = -\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right),$$

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ОТКРЫТЫЙ ПОЛИТЕХ



Определим для начала потенциал в точке А:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right) = \frac{qlcosv}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Теперь определим напряженность поля диполя.

Воспользуемся формулой:

$\vec{E}$ = - grad φ

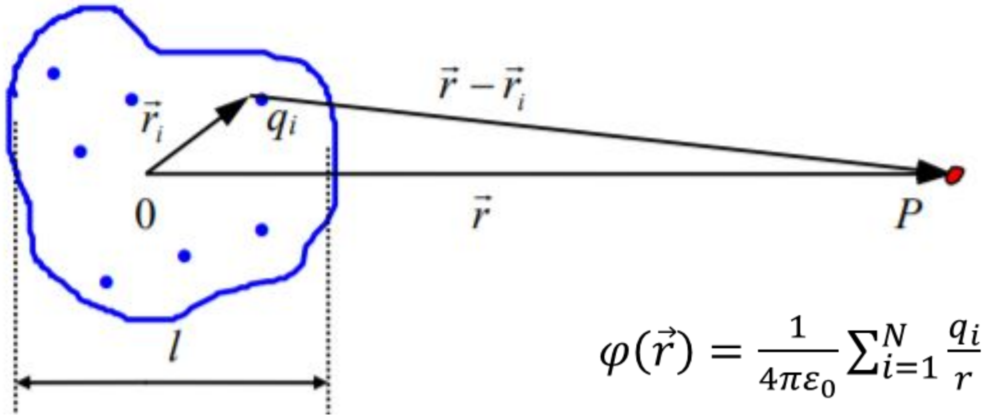
Разложим вектор напряженности на две проекции и найдем каждую из них.

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2qlcosv}{r^3}$$

$$E_v = -\frac{\partial\varphi}{r\cdot\partial v} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2qlsinv}{r^3}$$

$$E = \sqrt{E_\vartheta^2 + E_r^2} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot\sqrt{4cos^2v + sin^2v} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot\sqrt{1 + 3cos^2v}$$

Диполь. Поле системы зарядов.



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r}\left(1+\frac{\vec{r}_i\vec{e}_r}{r}+\left(\frac{\vec{r}_i\vec{e}_r}{r}\right)^2+\cdots\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} q_i\vec{r}_i,\vec{e}_i\right)}{r^2}+\cdots$$

$$\varphi_{mon}(\vec{r}) = \frac{\sum_i q_i}{r}$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i\vec{r}_i$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

$$\varphi_{dip} = \frac{\vec{p}\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$$

$$|\vec{r}_i| \ll |\vec{r}|$$

$$\sum_i q_i = 0, \quad \vec{r}\,'_i = \vec{b}+\vec{r}_i$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_i| \approx r-\vec{r}_i\vec{e}_r = r\left(1-\frac{\vec{r}_i\vec{e}_r}{r}\right)$$

$$\vec{p}\,' = \sum_i q_i\vec{r}_i\,' = \sum_i q_i\left(\vec{r}_i+\vec{b}\right) = \vec{b}\sum_i q_i+\sum_i q_i\vec{r}_i = \vec{p}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots,$$

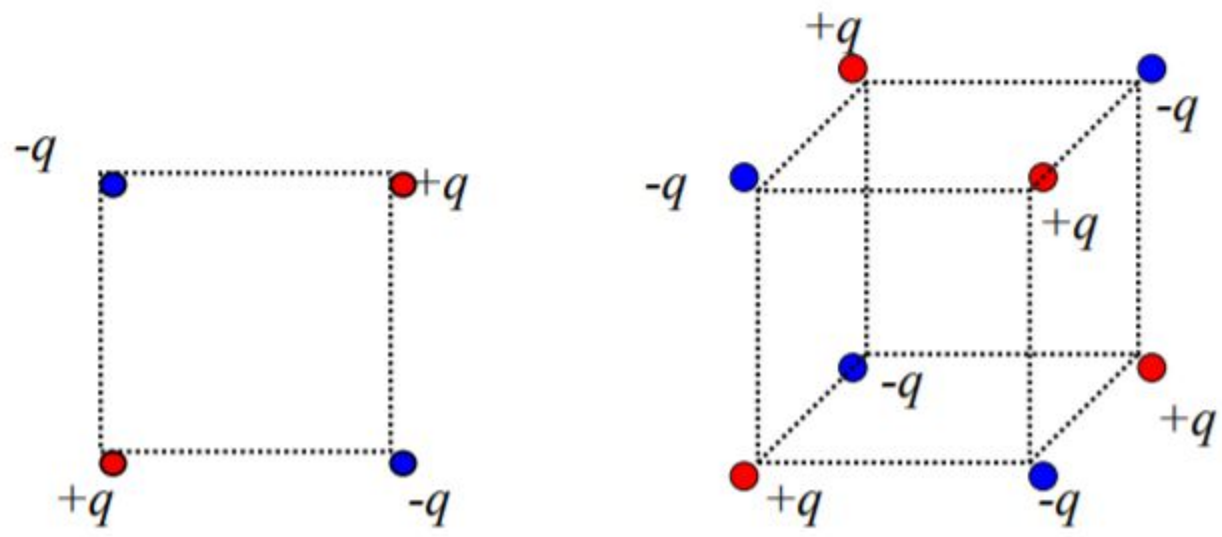
ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ОТКРЫТЫЙ ПОЛИТЕХ

Если суммарный заряд системы не равен нулю $\sum_i q_i \neq 0$, то основной вклад при больших расстояниях дает поле заряда – *монополь*. Если система электронейтральна $\sum_i q_i = 0$, то основной вклад в электрическое поле системы зарядов происходит от дипольного момента системы. Если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю:

$$\sum_i q_i = 0 \text{ и } \sum_i q_i \vec{r}_i = 0,$$

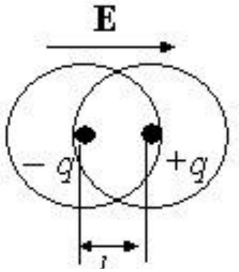
то основной вклад дают другие *мультипольные моменты*: в первую очередь – *квадруполь* $\varphi \sim \frac{1}{r^3}$.



а б

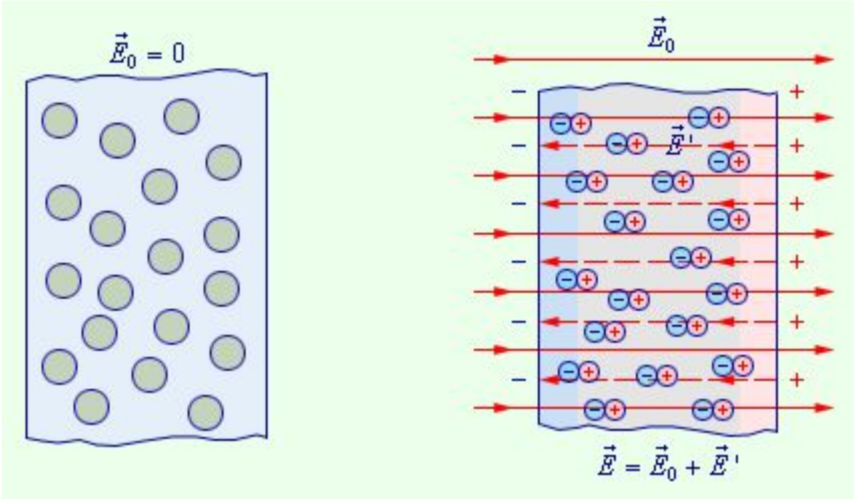
$$\vec{E}_{\text{макро}} = \vec{E} = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V}\vec{E}_{\text{микро}}dV = \left\langle \vec{E}_{\text{микро}} \right\rangle$$

$$\rho_{\text{макро}} = \rho = \left\langle \rho_{\text{микро}} \right\rangle \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \vec{E} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \right\rangle, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \vec{E} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\rangle$$



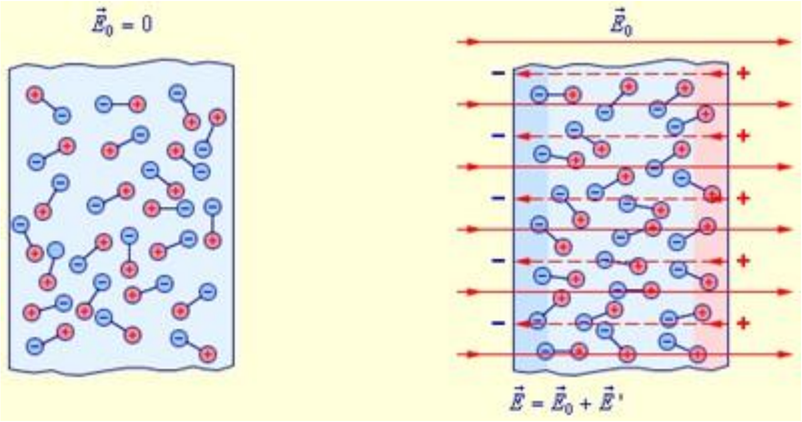
$$div\vec{E}_{\text{микро}} = 4\pi\rho_{\text{микро}} \qquad \left\langle div\vec{E}_{\text{микро}} \right\rangle = div\left\langle \vec{E}_{\text{микро}} \right\rangle \equiv div\vec{E} = 4\pi\left\langle \rho_{\text{микро}} \right\rangle = 4\pi\rho$$

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \vec{E} = \vec{E}_{\text{внешн}} + \vec{E}_{\text{внутр}}.$$



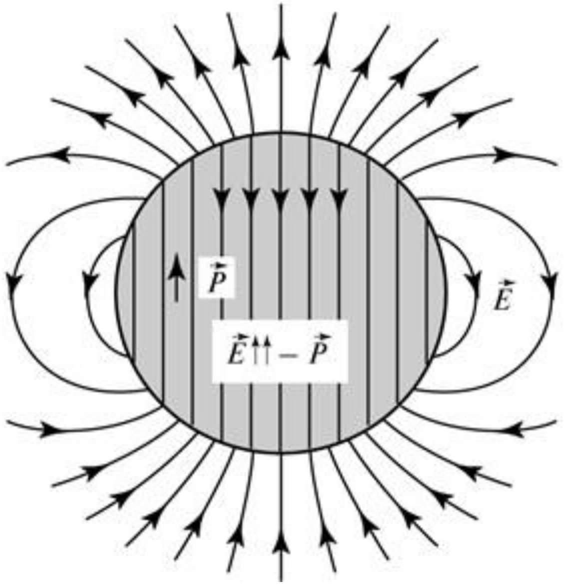
Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются *связанными*.

Заряды, которые хотя и находятся в пределах диэлектрика, но не входят в состав его молекул, а также заряды, расположенные за пределами диэлектрика, будем называть *сторонними*.



ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
ОТКРЫТЫЙ ПОЛИТЕХ

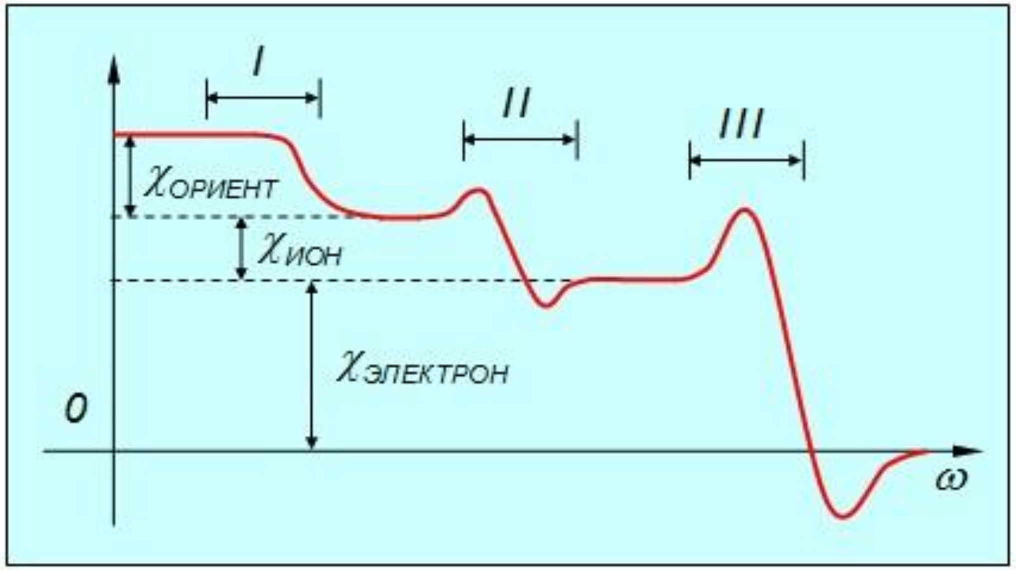
Макро и микрополя в веществе. Поляризация диэлектриков



$$P = \frac{N}{V}\cdot\frac{q^2}{k}E.$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\chi = \chi_{ориент} + \chi_{ион} + \chi_{электрон}.$$



$$\Pi(x) = \Pi(0) + x\frac{d\Pi}{dx}(0) + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{d^2\Pi}{dx^2}(0) + \ldots.$$

$$\Pi(x) \approx \Pi(0) + \frac{kx^2}{2}.$$

$$F_x = -\frac{d\Pi}{dx} = -kx$$

$$kx_E = qE.$$

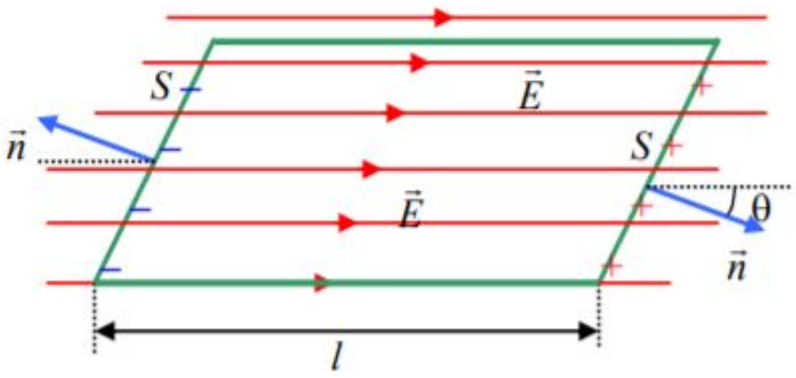
$$p = qx_E = \frac{q^2}{k}E.$$

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
ОТКРЫТЫЙ ПОЛИТЕХ

$$\vec{P} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p}}{\Delta V} \qquad \vec{P} = \frac{\sigma' S}{\Delta V}\vec{l}$$

$$\Delta V = Sl\cos\theta, \qquad \Delta V = S(\vec{l},\vec{n})$$

$$\vec{P}\vec{n} = \frac{\sigma' S}{\Delta V}(\vec{l},\vec{n}) = \sigma' \qquad \sigma' = \vec{P}\vec{n} = P_n$$



$$dq'_{нар} = P_n dS = (\vec{P}, d\vec{S})$$

$$dq' = -\,dq'_{нар}$$

$$dq' = -P_n dS = -(\vec{P}, d\vec{S})$$

$$q' = -\oint_S P_n dS = -\oint_S (\vec{P}, d\vec{S})$$

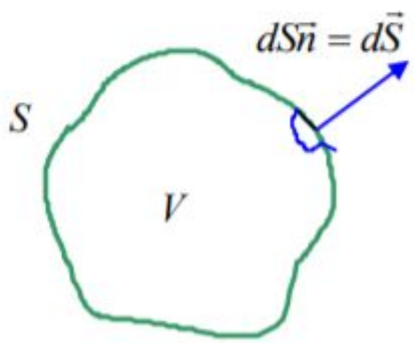
$$\oint_S \vec{P}d\vec{S} = -q'$$

$$q' = \int_V \rho' dV$$

$$\oint_S \vec{P}d\vec{S} = \int_V div\vec{P}dV$$

$$\oint_S \vec{P}d\vec{S} = \int_V div\vec{P}dV = -\int_V \rho'(\vec{r})dV$$

$$div\vec{P} = -\rho'$$



ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
ОТКРЫТЫЙ ПОЛИТЕХ

Поляризация диэлектриков. Вектор электрической индукции.

$$E = E_0 + E' \neq 0$$

$$\boxed{\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q + q'}{\varepsilon_o}}$$

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q' \qquad div\vec{P} = -\rho'$$

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}$$

$$div\,\varepsilon_0\vec{E} = \rho + \rho'$$

$$div\,\varepsilon_0\vec{E} = \rho - div\,\vec{P}$$

$$div\,(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

$$\oint (\overrightarrow{E + P}) d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$$

$$div\,\vec{D} = \rho$$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q$$

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\varepsilon_0\vec{E} + \chi\varepsilon_0\vec{E} = \vec{D}$$

$$\varepsilon_0\vec{E}(1 + \chi) = \vec{D}$$

$$1 + \chi = \varepsilon$$

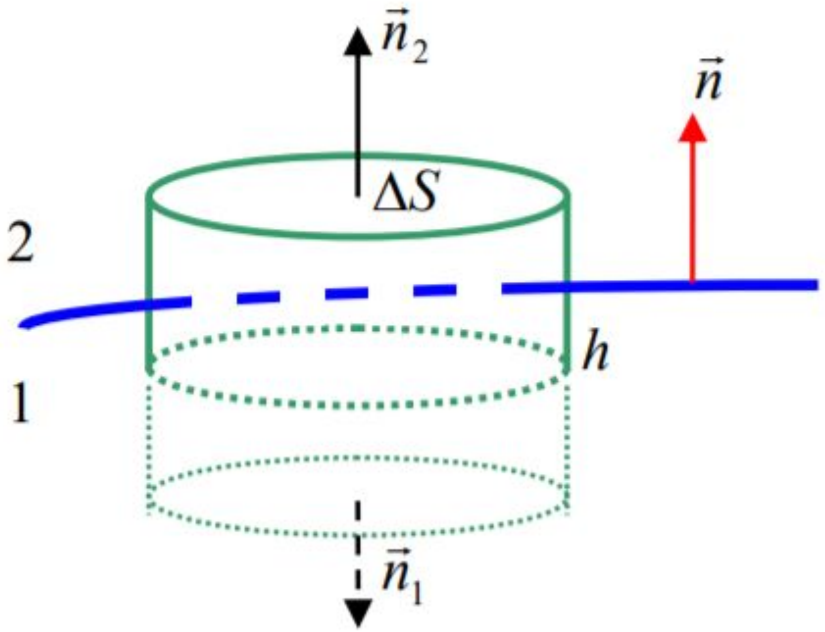
$$\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \vec{D}$$

$$\vec{P_i} = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij}\vec{E_j}$$

$$\begin{cases} P_x = \varepsilon_0(\chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z) \\ P_y = \varepsilon_0(\chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z) \\ P_z = \varepsilon_0(\chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z) \end{cases}$$

$$\vec{D_i} = \varepsilon_0 \sum_j \varepsilon_{ij}\vec{E_j}$$

$$\chi_{ij} = \chi_{ji} \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$



$$\oint \vec{E}d\vec{S} = E_{2n_2}\Delta S - E_{1n_1}\Delta S + \Phi_{\text{бок}}$$

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = E_{2n_2}\Delta S - E_{1n_1}\Delta S + \Phi_{\text{бок}} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma + \sigma')$$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma + \sigma')$$

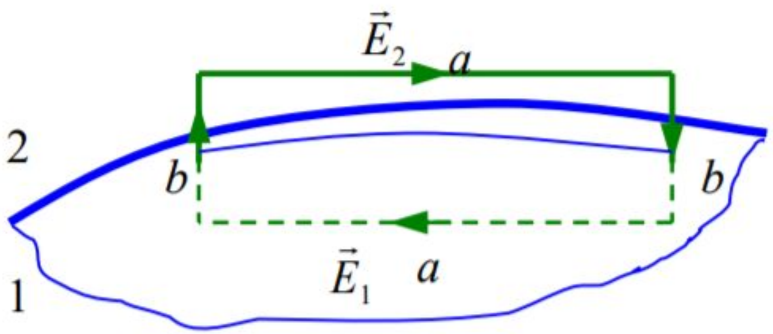
$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$$

нормальная составляющая вектора $\vec{E}$ терпит разрыв на границе двух диэлектриков из-за наличия поверхностных зарядов

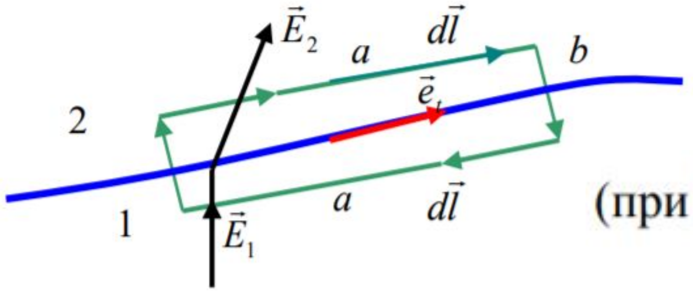
$$\boxed{\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{q + q'}{\varepsilon_o}}$$

ПОЛИТЕХ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
ОТКРЫТЫЙ ПОЛИТЕХ



$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = aE_{2t} - aE_{1t} + \langle E_n \rangle b - \langle E_n \rangle b = 0$$



(при $b \to 0$): $E_{2t} = E_{1t}$

тангенциальные составляющие вектора напряженности
электрического поля непрерывны, т.е. не меняются при переходе через границу диэлектриков.

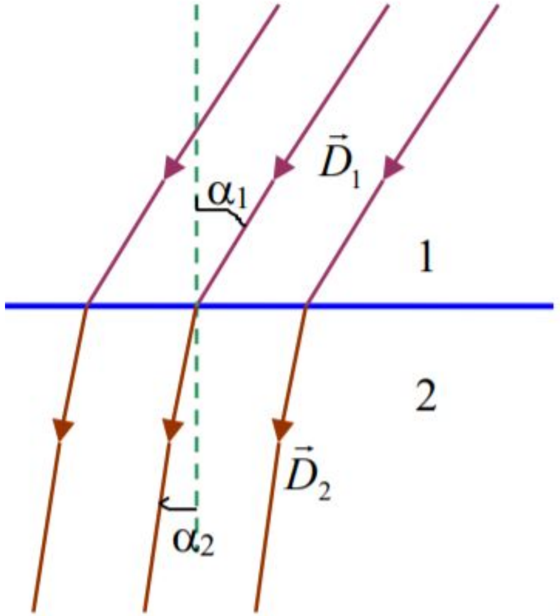
$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}$$

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{P_{1t}}{\varepsilon_1 - 1} = \frac{P_{2t}}{\varepsilon_2 - 1}$$

Граничные условия



$$\sigma = 0$$

$$E_{2t} = E_{1t} \qquad E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$D_{1n} = D_{2n}, \qquad \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{D_{2t}/D_{2n}}{D_{1t}/D_{1n}} = \frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

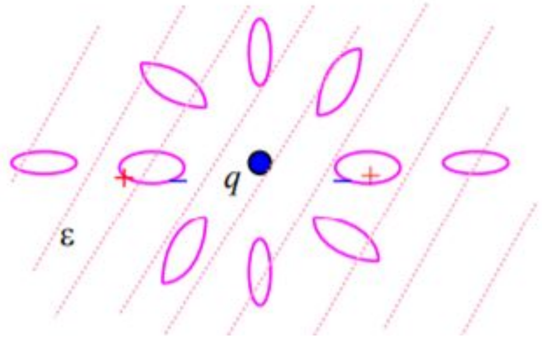
ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
ОТКРЫТЫЙ ПОЛИТЕХ

1. Поле точечного заряда в однородном изотропном диэлектрике

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = D 4\pi r^2 = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad E = \frac{q}{4\pi\, \varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

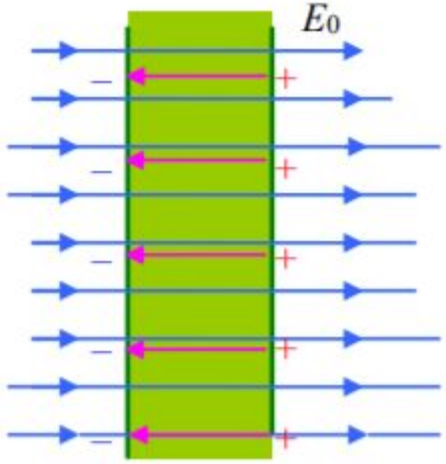
$$\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$$

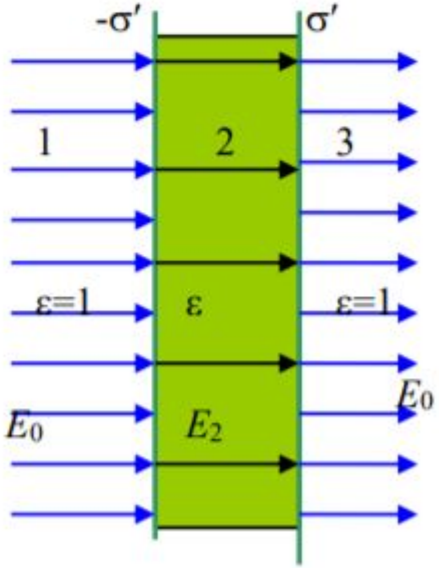


$$D_1 = D_2 = D_3$$

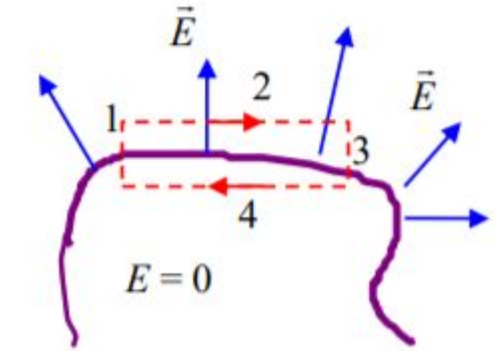
$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = E_1 = E_0$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon} = \frac{D_1}{\varepsilon} = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

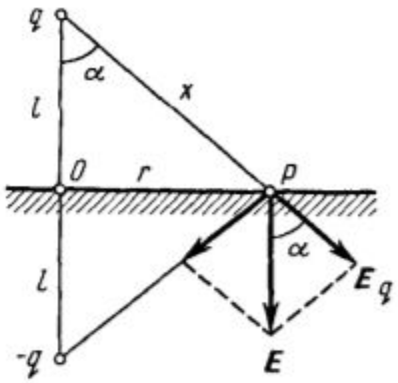




ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
ОТКРЫТЫЙ ПОЛИТЕХ

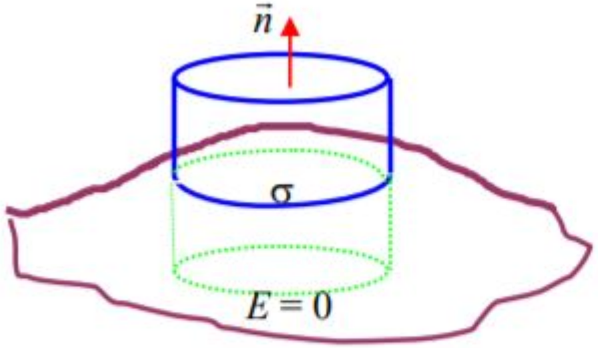


$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0 = \sum_{i=1}^{4}\int_i \vec{E}d\vec{l}$$



$$E = 2E_q \cos\alpha = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\frac{l}{x}.$$

$$\sigma = -\frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{3/2}},$$



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
ОТКРЫТЫЙ ПОЛИТЕХ

Электроемкостью проводника называется физическая величина, определяемая как отношение заряда q проводника к его потенциалу φ:

$$C = \frac{q}{\varphi}([1Ф] - 1 \text{ фарад})$$

Уединенный проводник.

$C = \frac{q}{\varphi}$ Емкость уединенного проводника

Найдем емкость уединенного проводника, имеющего форму шара:

$$\varphi = \int_R^\infty \vec{E}\,d\,\vec{r} = \int_R^\infty \frac{kq}{r^2}\,dr = \text{kq}\left(-\frac{1}{r}\right)_R^\infty = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{c}$$

$C = 4\pi\varepsilon_0 R$

1 фарад (1Ф). Это огромная емкость. Для сравнения: емкость планеты Земля 0.7 мФ.

Емкость сферического конденсатора

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

$$U = \int_a^b E_r\,\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{ab}{b-a}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}$$