Лекция №1

Методы проектного управления в инновационном менеджменте

Вопросы:

- **Критерии оптимального выбора**
- **Математическая постановка задач планирования**
- **Геометрический метод решения задач планирования**
- **Производственная задача**
- **Транспортная задача**
- **Сетевое планирование работ**

Управление — это целенаправленное воздействие на управляемый объект (организацию, подразделение, сотрудников, процессы) со стороны субъекта управления (менеджеров, руководителей) в условиях ограничений и в соответствии с выбранным критерием

Планирование — оптимальное распределение ресурсов — оптимальное распределение ресурсов для достижения поставленных целей — оптимальное распределение ресурсов для достижения поставленных целей, деятельность (совокупность процессов — оптимальное распределение ресурсов для достижения поставленных целей, деятельность (совокупность

Процесс выбора товара в многокритериальных задачах на конечном множестве альтернатив, в условиях полной определенности о свойствах товара

3. Холодильники

Страна-изготовитель	Модель	Вес, кг	Гарантия, лет	Срок службы, лет	Габариты, см×см×см	Объем камер: морозильной, л	Объем камер: холодильной, л	Цена, долл.
Россия	Stinol	78	3	15	185×60×60	80	235	310
Таиланд	Sharp	69	1	10	170×60×70	96	270	750
Южная Корея	Samsung	56	2	10	160×60×65	93	280	450
Испания	Bosch	52	2	10	155×55×60	54	194	410
Южная Корея	LG	69	1	10	170×60×63	110	230	600
Южная Корея	Daewoo	71	1	7	175×75×75	138	280	840
Швеция	Electrolux	75	2	15	175×60×60	127	186	680

Шаг №1 Формализация качественных свойств

Исходные данные многокритериальной задачи

Альтернативы	Цели (критерии)									
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камеры	Объем холодильной камеры	Цена долл.
Stinol	1	78	3	15	185	60	60	80	235	310
Sharp	2	69	1	10	170	60	70	96	270	750
Sumsung	2	56	2	10	160	60	65	93	280	450
Bosh	3	52	2	10	155	55	60	54	194	410
LG	2	69	1	10	170	60	60	110	230	600
Daewoo	2	71	1	7	175	60	63	138	280	840
Electrolux	3	75	2	15	175	75	75	127	186	680
Стремление	max	min	max	max	max	min	min	max	max	min
Стремление	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
min	1	52	1	7	155	55	60	54	186	310
max	3	78	3	15	185	75	75	138	280	840

Критерии могут иметь различные масштабы и шкалы измерения, прежде, чем приступить к решению многокритериальной задачи, их необходимо привести к одной единице измерения (обычно к безразмерному виду). Этот процесс называется нормализацией. Предлагается следующий способ получения безразмерной формы критериев:

$$f_j^H(A_i) = \frac{f_j(A_i) - \min_i\{f_j(A_i)\}}{\max_i\{f_j(A_i)\} - \min_i\{f_j(A_i)\}} \qquad j = \overline{1,n},\ \min_i\{f_j(A_i)\} \neq \max_i\{f_j(A_i)\}$$

Шаг №2 нормализация данных

Исходные данные многокритериальной задачи

Альтернативы	Цели (критерии)									
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камры	Объем холодильной камеры	Цена долл.
Stinol	1	78	3	15	185	60	60	80	235	310
Sharp	2	69	1	10	170	60	70	96	270	750
Sumsung	2	56	2	10	160	60	65	93	280	450
Bosh	3	52	2	10	155	55	60	54	194	410
LG	2	69	1	10	170	60	60	110	230	600
Daewoo	2	71	1	7	175	60	63	138	280	840
Electrolux	3	75	2	15	175	75	75	127	186	680
Стремление	max	min	max	max	max	min	min	max	max	min
Стремление	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1
min	1	52	1	7	155	55	60	54	186	310
max	3	78	3	15	185	75	75	138	280	840

Номализованные данные многокритериальной задачи

Альтернативы	Цели (критерии)									
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камры	Объем холодильной камеры	Цена долл.
Stinol	0	-1	1	1	1	-0,25	0	0,3095238	0,5212766	0
Sharp	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	-0,66667	0,5	0,89361702	-0,830188679
Sumsung	0,5	-0,15385	0,5	0,375	0,166667	-0,25	-0,33333	0,4642857	1	-0,264150943
Bosh	1	0	0,5	0,375	0	0	0	0	0,08510638	-0,188679245
LG	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	0	0,6666667	0,46808511	-0,547169811
Daewoo	0,5	-0,73077	0	0	0,666667	-0,25	-0,2	1	1	-1
Electrolux	1	-0,88462	0,5	1	0,666667	-1	-1	0,8690476	0	-0,698113208
Стремление	max	min	max	max	max	min	min	max	max	min

Метод равномерной оптимальности

	Номализованные данные многокритериальной задачи									
Альтернативы	Цели (критерии)									
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камры	Объем холодильной камеры	Цена долл.
Stinol	0	-1	1	1	1	-0,25	0	0,3095238	0,5212766	0
Sharp	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	-0,66667	0,5	0,89361702	-0,830188679
Sumsung	0,5	-0,15385	0,5	0,375	0,166667	-0,25	-0,33333	0,4642857	1	-0,264150943
Bosh	1	0	0,5	0,375	0	0	0	0	0,08510638	-0,188679245
LG	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	0	0,6666667	0,46808511	-0,547169811
Daewoo	0,5	-0,73077	0	0	0,666667	-0,25	-0,2	1	1	-1
Electrolux	1	-0,88462	0,5	1	0,666667	-1	-1	0,8690476	0	-0,698113208
Стремление	max	min	max	max	max	min	min	max	max	min

Альтернативы, рынки	Цели (критерии)									Метод равномерной оптимальности
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камры	Объем холодильной камеры	Цена долл.	$f(A^*) = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(A_i) \right\}$
Stinol	0	-1	1	1	1	-0,25	0	0,3095238	0,5212766	0	2,580800405
Sharp	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	-0,66667	0,5	0,89361702	-0,830188679	0,367915522
Sumsung	0,5	-0,15385	0,5	0,375	0,166667	-0,25	-0,33333	0,4642857	1	-0,264150943	2,00462195
Bosh	1	0	0,5	0,375	0	0	0	0	0,08510638	-0,188679245	1,771427138
LG	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	0	0,6666667	0,46808511	-0,547169811	1,058735808
Daewoo	0,5	-0,73077	0	0	0,666667	-0,25	-0,2	1	1	-1	0,985897436
Electrolux	1	-0,88462	0,5	1	0,666667	-1	-1	0,8690476	0	-0,698113208	0,452985694

Метод приоритетов

	Номализованные данные многокритериальной задачи									
Альтернативы	Цели (критерии)									
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камры	Объем холодильной камеры	Цена долл.
Stinol	0	-1	1	1	1	-0,25	0	0,3095238	0,5212766	0
Sharp	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	-0,66667	0,5	0,89361702	-0,830188679
Sumsung	0,5	-0,15385	0,5	0,375	0,166667	-0,25	-0,33333	0,4642857	1	-0,264150943
Bosh	1	0	0,5	0,375	0	0	0	0	0,08510638	-0,188679245
LG	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	0	0,6666667	0,46808511	-0,547169811
Daewoo	0,5	-0,73077	0	0	0,666667	-0,25	-0,2	1	1	-1
Electrolux	1	-0,88462	0,5	1	0,666667	-1	-1	0,8690476	0	-0,698113208
Стремление	max	min	max	max	max	min	min	max	max	min

=СУММПРОИЗВ (O32:X32;$O$39:$X$39)

Альтернативы	Цели (критерии)										Метод приоритетов
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камры	Объем холодильной камеры	Цена долл.	$f(A^*) = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(A_i) \right\}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \alpha_j > 0$
Stinol	0	-1	1	1	1	-0,25	0	0,309524	0,521277	0	0,288720027
Sharp	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	-0,66667	0,5	0,893617	-0,83019	-0,07975689
Sumsung	0,5	-0,15385	0,5	0,375	0,166667	-0,25	-0,33333	0,464286	1	-0,26415	0,149797124
Bosh	1	0	0,5	0,375	0	0	0	0	0,085106	-0,18868	0,164753948
LG	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	0	0,666667	0,468085	-0,54717	0,018184588
Daewoo	0,5	-0,73077	0	0	0,666667	-0,25	-0,2	1	1	-1	-0,100940171
Electrolux	1	-0,88462	0,5	1	0,666667	-1	-1	0,869048	0	-0,69811	0,035544958
Приоритет	0,1	0,066667	0,1	0,15	0,066667	0,066667	0,066667	0,066667	0,066667	0,25	1

Метод справедливого компромисса

Номализованные данные многокритериальной задачи

Альтернативы, рынки	Цели (критерии)									
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камры	Объем холодильной камеры	Цена долл.
Stinol	0	-1	1	1	1	-0,25	0	0,3095238	0,5212766	0
Sharp	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	-0,66667	0,5	0,89361702	-0,830188679
Sumsung	0,5	-0,15385	0,5	0,375	0,166667	-0,25	-0,33333	0,4642857	1	-0,264150943
Bosh	1	0	0,5	0,375	0	0	0	0	0,08510638	-0,188679245
LG	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	0	0,6666667	0,46808511	-0,547169811
Daewoo	0,5	-0,73077	0	0	0,666667	-0,25	-0,2	1	1	-1
Electrolux	1	-0,88462	0,5	1	0,666667	-1	-1	0,8690476	0	-0,698113208
min	0	-1	0	0	0	-1	-1	0	0	-1

Для свойств $f_j(A_i) < 0$

$$f_j^{ck}(A_i) = 1 + f_j(A_i)$$

Альтернативы, рынки	Цели (критерии)									*Метод справедливого компромиса*
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камры	Объем холодильной камеры	Цена долл.	$f(A^*) = \max_i \left\{ \prod_{j=1}^{n} f_j(A_i) \right\}$
Stinol	0	0	1	1	1	0,75	1	0,3095238	0,5212766	1	**0**
Sharp	0,5	0,346154	0	0,375	0,5	0,75	0,333333	0,5	0,89361702	0,169811321	**0**
Sumsung	0,5	0,846154	0,5	0,375	0,166667	0,75	0,666667	0,4642857	1	0,735849057	**0,002258465**
Bosh	1	1	0,5	0,375	0	1	1	0	0,08510638	0,811320755	**0**
LG	0,5	0,346154	0	0,375	0,5	0,75	1	0,6666667	0,46808511	0,452830189	**0**
Daewoo	0,5	0,269231	0	0	0,666667	0,75	0,8	1	1	0	**0**
Electrolux	1	0,115385	0,5	1	0,666667	0	0	0,8690476	0	0,301886792	**0**

Метод идеальной точки

Альтернативы	Цели (критерии)									
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камры	Объем холодильной камеры	Цена долл.
Stinol	0	-1	1	1	1	-0,25	0	0,3095238	0,5212766	0
Sharp	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	-0,66667	0,5	0,89361702	-0,830188679
Sumsung	0,5	-0,15385	0,5	0,375	0,166667	-0,25	-0,33333	0,4642857	1	-0,264150943
Bosh	1	0	0,5	0,375	0	0	0	0	0,08510638	-0,188679245
LG	0,5	-0,65385	0	0,375	0,5	-0,25	0	0,6666667	0,46808511	-0,547169811
Daewoo	0,5	-0,73077	0	0	0,666667	-0,25	-0,2	1	1	-1
Electrolux	1	-0,88462	0,5	1	0,666667	-1	-1	0,8690476	0	-0,698113208
max	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0

Пересчет

$$f_j^{ИТ}(A_i) = \max_i\{ f_j(A_i)\} - f_j(A_i)$$

Альтернативы, рынки	Цели (критерии)										*Метод идиальной точки*
	Страна	Вес	Гарантия	Срок службы	Высота	ширина	толщина	объем морозильной камры	Объем холодильной камеры	Цена долл.	$f(A^*) = \min_i\left\{\max_j\{\max_i\{f_j(A_i)\} - f_j(A_i)\}\right\}$
Stinol	1	1	0	0	0	0,25	0	0,6904762	0,4787234	0	1
Sharp	0,5	0,653846	1	0,625	0,5	0,25	0,666667	0,5	0,10638298	0,830188679	1
Sumsung	0,5	0,153846	0,5	0,625	0,833333	0,25	0,333333	0,5357143	0	0,264150943	0,833333333
Bosh	0	0	0,5	0,625	1	0	0	1	0,91489362	0,188679245	1
LG	0,5	0,653846	1	0,625	0,5	0,25	0	0,3333333	0,53191489	0,547169811	1
Daewoo	0,5	0,730769	1	1	0,333333	0,25	0,2	0	0	1	1
Electrolux	0	0,884615	0,5	0	0,333333	1	1	0,1309524	1		1

Математическая модель задачи линейного программирования

В общем случае задача математического программирования может быть сформулирована следующим образом: найти вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, доставляющий экстремальное значение (максимум или минимум) целевой функции Z, т.е.

$$\max(\min) Z = f(x_1, \dots, x_n)$$

при ограничениях

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \le b_j, \quad j = \overline{1,m},$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Линейное программирование (ЛП) — раздел математического программирования, в котором рассматриваются задачи оптимизации, в которых целевая функция Z и все функции $g_j (j = \overline{1,m})$, входящие в систему ограничений, линейны (первой степени) относительно переменных $x_i (i = \overline{1,n})$.

В случае n переменных $x_1, \dots, x_n$ математическая постановка задачи линейного программирования может быть записана в следующем виде (т.н. *стандартная форма* задачи линейного программирования):

$$\max(\min) z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n, \quad \Big\} \text{– целевая функция}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1, \\ &a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n \le b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m, \end{aligned}\right\} \text{– ограничения}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}. \quad \Big\} \text{– условия неотрицательности переменных}$$

Математическая модель задачи линейного программирования

В общем случае задача математического программирования может быть сформулирована следующим образом: найти вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, доставляющий экстремальное значение (максимум или минимум) целевой функции Z, т.е.

$$\max(\min) Z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

при ограничениях

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) \le b_j, \quad j = \overline{1, m},$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Линейное программирование (ЛП) — раздел математического программирования, в котором рассматриваются задачи оптимизации, в которых целевая функция Z и все функции $g_j (j = \overline{1, m})$, входящие в систему ограничений, линейны (первой степени) относительно переменных $x_i (i = \overline{1, n})$.

В случае n переменных $x_1, \ldots, x_n$ математическая постановка задачи линейного программирования может быть записана в следующем виде (т.н. *стандартная форма* задачи линейного программирования):

$$\left.\max(\min) z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n,\ \right\} \text{– целевая функция}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \le b_1, \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \le b_m, \end{array}\right\} \text{– ограничения}$$

$$\left. x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n}. \right\} \text{– условия неотрицательности переменных}$$

Трактовка задачи линейного программирования как задачи о наилучшем использовании ресурсов

Рассматривается некоторая производственная единица, которая исходя из конъюнктурных возможностей рынка, технических или технологических возможностей и имеющихся ресурсов (финансовых, временных и т.п.) может выпускать n различных видов продукции (товаров), обозначаемыми индексами $i\ (i=\overline{1,n})$. Предприятие при производстве этих видов продукции вынуждено ограничиваться имеющимися видами материальных запасов, технологий, других производственных факторов (сырья, рабочей силы, оборудования и т.п.). Все эти виды факторов, необходимых для производства (и, следовательно, ограничивающих производство), называют *ресурсами*. Пусть число ресурсов равно m, им приписывается индекс $j\ (j=\overline{1,m})$. Они ограничены и их количества равны соответственно $b_1,\ldots,b_m$ соответствующих единиц. Вектор $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_m)$ называется *вектором ресурсов*.

Известна мера полезности (экономическая выгода) производства продукции каждого вида, исчисляемая, например, по цене товара, его прибыльности, издержкам производства, степени удовлетворения потребителей и т.п. Пусть в качестве такой меры рассматривается цена реализации $c_i\ (i=\overline{1,n})$. Вектор $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)$ называется *вектором цен*.

Известны также коэффициенты a_{ij}, показывающие сколько единиц i-го ресурса необходимо для производства единицы продукции j-го вида. Эти коэффициенты называются *технологическими коэффициентами*, Через $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ обозначим план производства, показывающий в каких количествах нужно производить указанные виды продукции.

Тогда задача нахождения производственного плана, максимизирующего объем реализации при имеющихся ограничениях является задачей линейного программирования указанного выше вида (1).

$$
\begin{aligned}
&\max(\min) z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n, && \} - \text{целевая функция}\\
&a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, && \\
&a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, && \} - \text{ограничения}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
&a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, && \\
&x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}. && \} - \text{условия неотрицательности переменных}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Свойство *линейности* модели (1) формально означает линейность всех входящих в нее функций (целевой функции и ограничений). Линейность предполагает выполнение следующих свойств:

1. *Пропорциональность* предполагает, что значения левых частей неравенств ограничений и целевой функции прямо пропорциональны значениям переменных;
2. *Аддитивность* означает, что общий вклад всех переменных в значение целевой функции и левых частей ограничений является прямой суммой вкладов от различных переменных.

Вектор (план) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений называется **допустимым решением (планом)**.

Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется **оптимальным решением (планом)**, а само экстремальное значение целевой функции — **значением задачи**.

Оптимальный план будем обозначать $\mathbf{x}^*$, экстремальное значение целевой функции (значение задачи) $z^* = z(\mathbf{x}^*)$.

Отметим, что, оптимальное решение в задаче линейного программирования, вообще говоря, не обязательно существует, возможны следующие случаи:

1. Оптимального решения не существует;
2. Существует единственное оптимальное решение;
3. Имеется бесконечное множество оптимальных решений (доставляющих одно и то же значение целевой функции).

Задача об использовании сырья

Компания производит два вида красок: на экспорт и для реализации на внутреннем рынке. Краски обоих видов поступает в продажу: доход от продажи одной тонны краски на экспорт составляет $5000, а тонны краски на внутреннем рынке — $4000. Для производства обоих видов красок используются сырье двух типов — А и В. Максимально возможные ежедневные запасы сырья составляют 24 и 6 тонн, соответственно. Исходные данные: расход сырья для производства одной тонны краски каждого вида, максимально возможные запасы сырья и доход от продажи одной тонны краски каждого вида приведены в Табл. .

Табл. Исходные данные для задачи о производстве красок

	Расход сырья (в тоннах) на тонну красок		*Максимально возможный ежедневный запас сырья (в тоннах)*
	На экспорт (Вид №1)	Внутренний рынок (Вид №2)	
Сырье вида А	6	4	24
Сырье вида В	1	2	6
Доход (в $1000) на 1 тонну	5	4	

После изучения рынка сбыта отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски вида №2 до 2 тонн (из–за отсутствия надлежащего спроса), а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски вида №2 не превышало более чем на одну тонну производства краски вида №1.

Компания хотела бы определить, каким образом она может увеличить свой ежедневный доход

Задача об использовании сырья

Табл. Исходные данные для задачи о производстве топлива

	Расход сырья (в тоннах) на тонну красок		*Максимально возможный ежедневный запас сырья (в тоннах)*
	На экспорт (Вид №1)	Внутренний рынок (Вид №2)	
Сырье вида А	6	4	24
Сырье вида В	1	2	6
Доход (в $1000) на 1 тонну	5	4	

Решение.

Задача (модель) линейного программирования, как и любая задача исследования операций, включает в себя три основные элемента, подлежащие определению и формализации:

1. Переменные, значения которых подлежат изменению;
2. Целевая функция, которую необходимо оптимизировать;
3. Ограничения, которым должны удовлетворять переменные.

Введем обозначения

x_1 — ежедневный объем производства краски на экспорт;

x_2 — ежедневный объем производства краски для внутреннего рынка

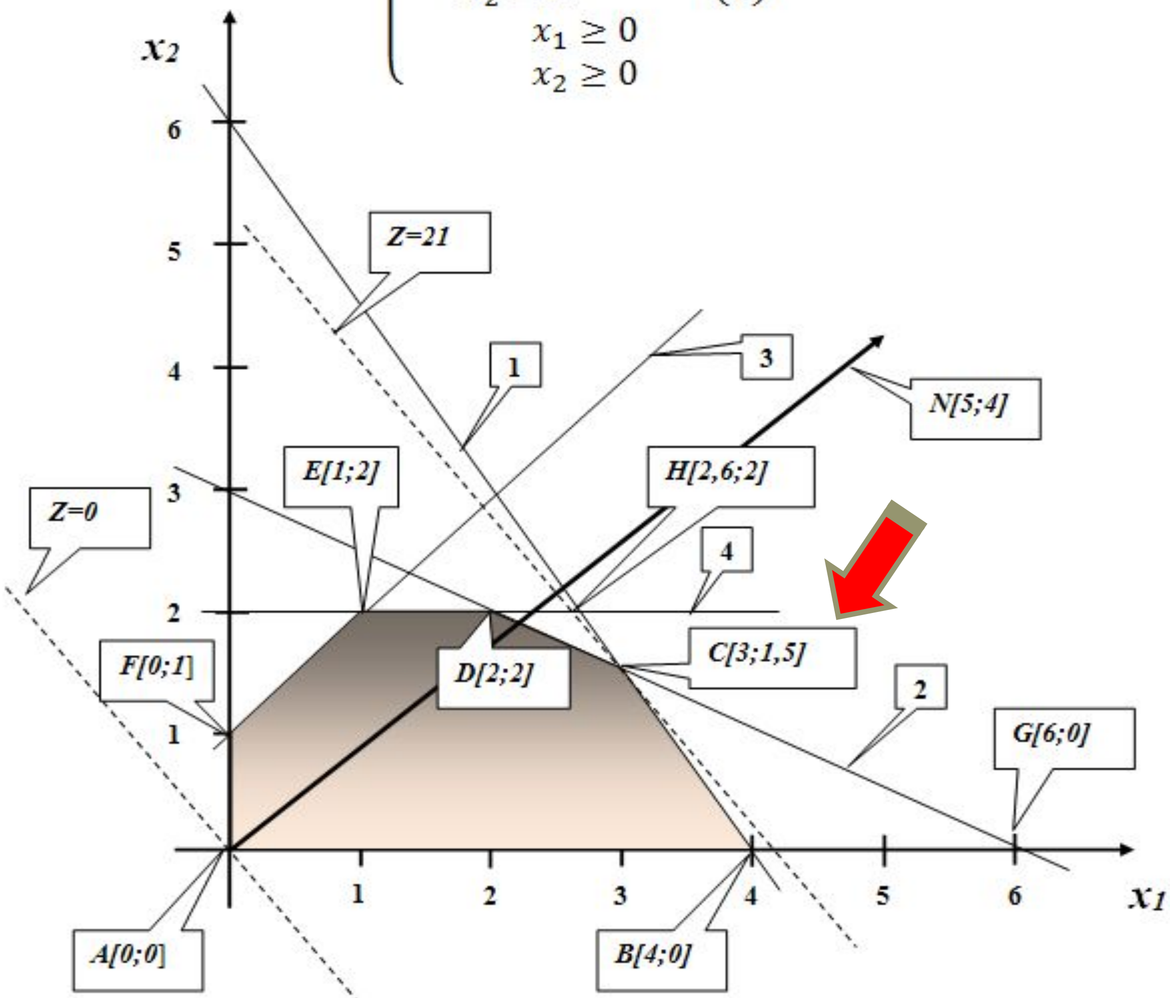
$$\max Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \le 6 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1 & (3) \\ x_2 \le 2 & (4) \\ x_1 \ge 0 & \\ x_2 \ge 0 & \end{cases}$$

Задача об использовании сырья (графический метод решения)

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2$$

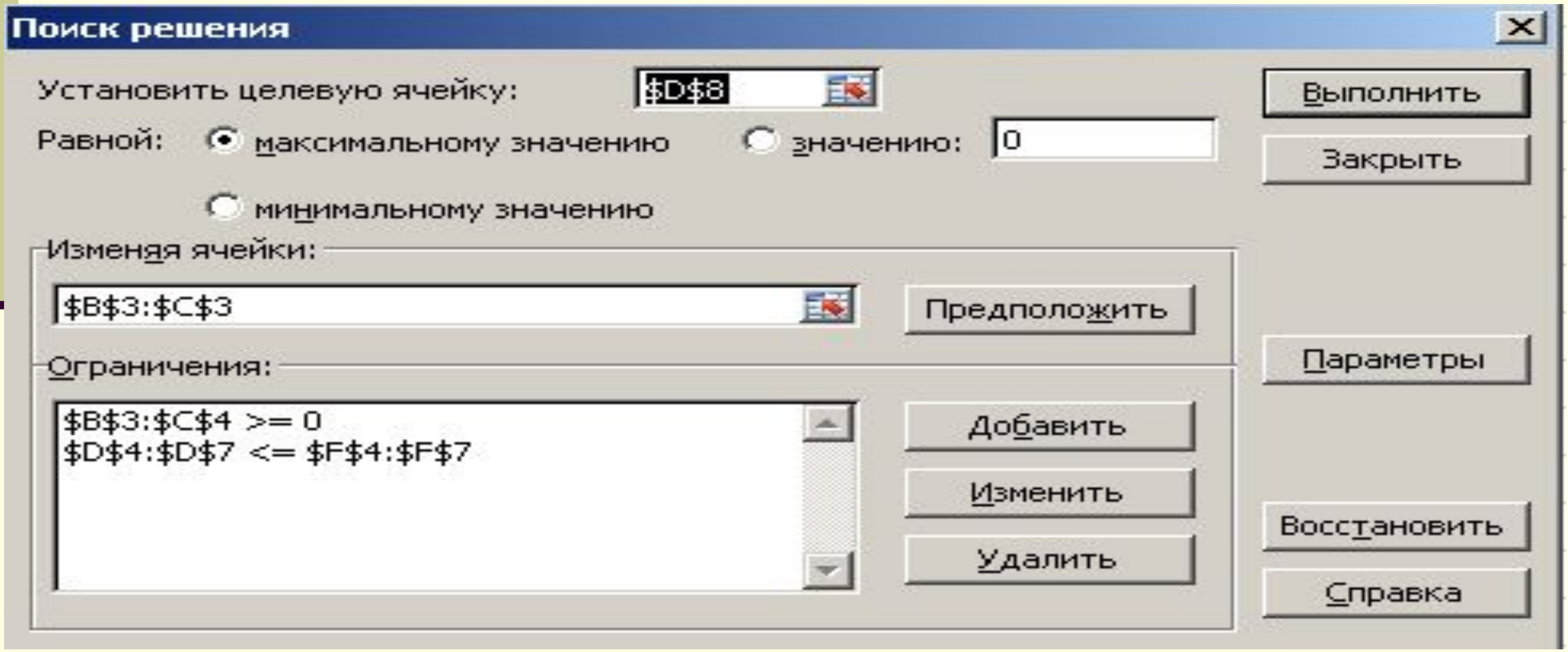
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \le 6 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1 & (3) \\ x_2 \le 2 & (4) \\ x_1 \ge 0 & \\ x_2 \ge 0 & \end{cases}$$



Задача об использовании сырья (решение средствами MS Excel)

D8 =СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B8:C8)

	A	B	C	D	E	F
1–2	Название ограничений	Краска вида №1 x1	Краска вида №2 x2	Получено	Сравнения	В наличии
3	План производства	3	1,5			
4	Сырье А	6	4	24	≤	24
5	Сырье В	1	2	6	≤	6
6	Спрос 1	-1	1	-1,5	≤	1
7	Спрос 2	0	1	1,5	≤	2
8	ЦФ: Z(x)	5	4	21	⇒	max



Более детальное изучение спроса позволило выявить дополнительные закономерности

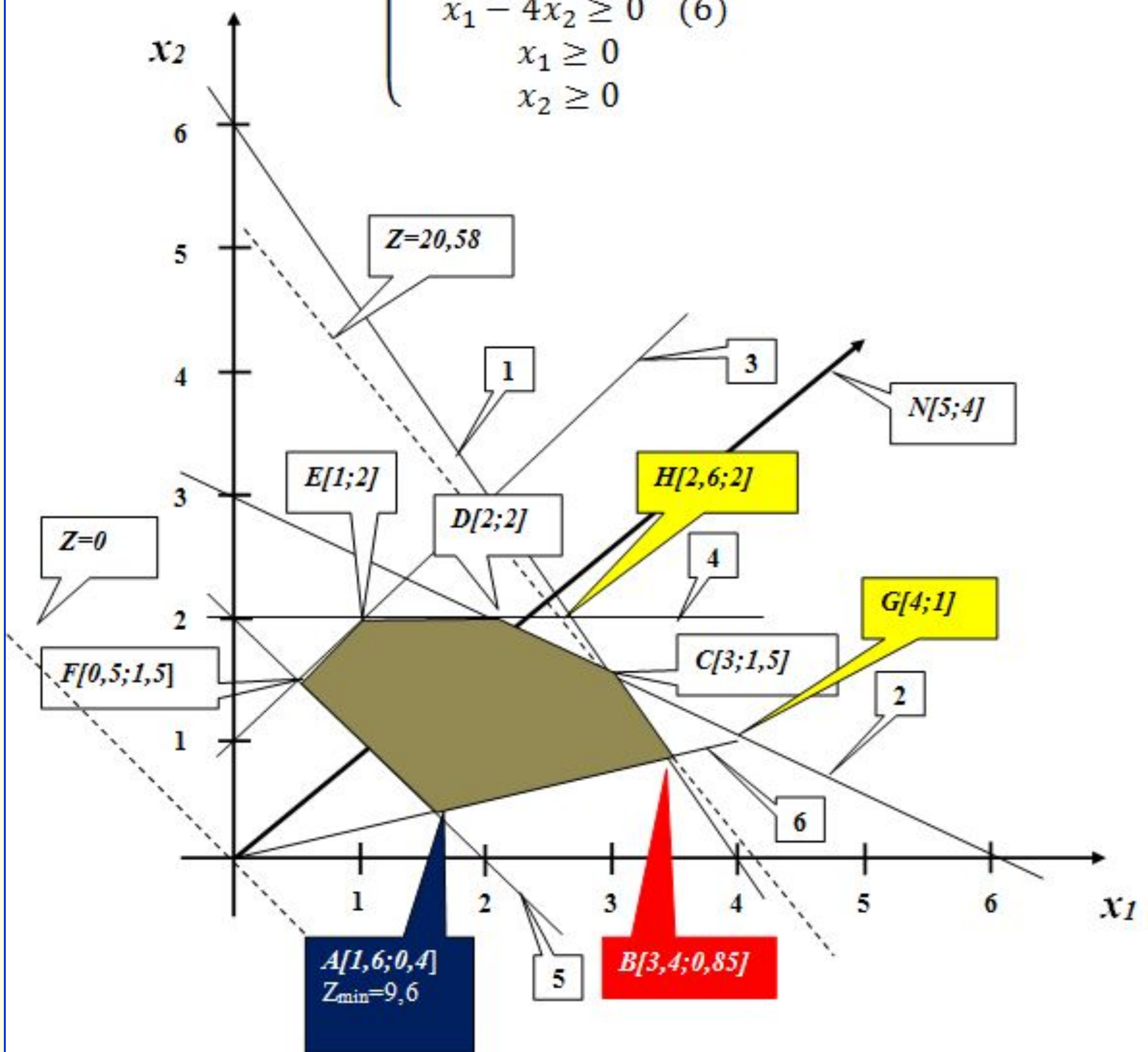
1. Сумма произведенной продукции должна превышать 2 тонны
2. Объем краски на экспорт должен превосходить более чем в 4 раза объем краски вида №2

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 & (2) \\ -x_1 + x_2 \leq 1 & (3) \\ x_2 \leq 2 & (4) \\ x_1 + x_2 \geq 2 & (5) \\ x_1 - 4x_2 \geq 0 & (6) \\ x_1 \geq 0 & \\ x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Z max=20,58
x1=3,4; x2=0,85

Z min=9,6
x1=1,6; x2=0,4



Задача об использовании сырья (решение средствами MS Excel)

D10 =СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B10:C10)

	A	B	C	D	E	F
1–2	Название ограничений	Краска вида №1 x1	Краска вида №2 x2	Получено	Сравнения	В наличии
3	План производства	3,428571429	0,857142857			
4	Сырье A	6	4	24	≤	24
5	Сырье B	1	2	5,142857143	≤	6
6	Спрос 1	-1	1	-2,571428571	≤	1
7	Спрос 2	0	1	0,857142857	≤	2
8	Спрос 3	1	1	4,285714286	≥	2
9	Спрос 4	1	-4	0	≥	0
10	ЦФ: Z(x)	5	4	20,57142857	⇒	max

Поиск решения

Установить целевую ячейку: $D$10

Равной: (•) максимальному значению ( ) значению: 0

( ) минимальному значению

Изменяя ячейки: $B$3:$C$3

Ограничения:

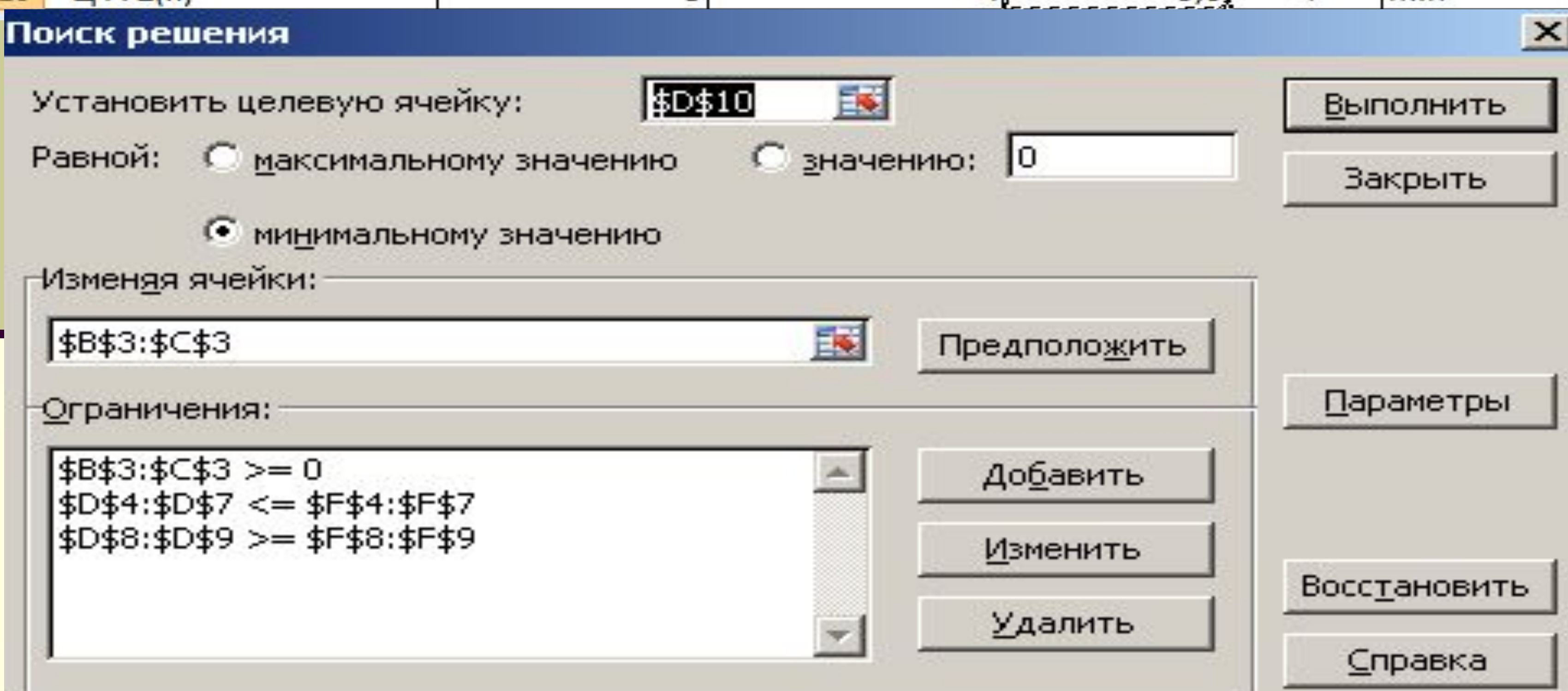
$B$3:$C$3 >= 0
$D$4:$D$7 <= $F$4:$F$7
$D$8:$D$9 >= $F$8:$F$9

Выполнить | Закрыть | Предположить | Параметры | Добавить | Изменить | Удалить | Восстановить | Справка

Задача об использовании сырья (решение средствами MS Excel)

D10 =СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B10:C10)

	A	B	C	D	E	F
1–2	Название ограничений	Краска вида №1 x1	Краска вида №2 x2	Получено	Сравнения	В наличии
3	План производства	1,6	0,4			
4	Сырье A	6	4	11,2	≤	24
5	Сырье B	1	2	2,4	≤	6
6	Спрос 1	-1	1	-1,2	≤	1
7	Спрос 2	0	1	0,4	≤	2
8	Спрос 3	1	1	2	≥	2
9	Спрос 4	1	-4	2,22045E-16	≥	0
10	ЦФ: Z(x)	5	4	9,6	⇒	min



Производственная задача

Задача №1

Торговое предприятие, реализует три группы товаров A, B, C. Плановые нормативы затрат ресурсов на одну тысячу рублей товарооборота, доход от продажи товаров на 1 тыс. руб. товарооборота, а также объем ресурсов заданы в таблице. Требуется определить плановый объем продажи товаров различных групп и структуру товарооборота так, чтобы доход предприятия был максимальным

Виды материально денежных ресурсов (МДР)	*Норма затрат МДР на 1тыс. руб. товарооборота*			Объем ресурсов b_i
	Группа А	Группа В	Группа С	
Рабочее время продавцов (чел. час)	0,1	0,2	0,4	1100
Площадь торговых залов ($м^2$)	0,05	0,02	0,02	120
Площадь складских помещений ($м^2$)	3	1	2	8000
Доход (тыс. рублей)	3	5	4	max

Решение

Математическая модель задачи

Определить вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$, где

x_1 – объем продаж (ед.) товаров группы А

x_2 – объем продаж (ед.) товаров группы В

x_3 – объем продаж (ед.) товаров группы С,

который удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 \le 1100 \\ 0,05x_1 + 0,02x_2 + 0,02x_3 \le 120 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8000 \end{cases}$$

и обеспечивает максимальное значение целевой функции

$$F(\overline{X}) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow max$$

Производственная задача

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 \le 1100 \\ 0,05x_1 + 0,02x_2 + 0,02x_3 \le 120 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8000 \end{cases}$$

Система ограничений

x1	x2	x3	Всего	Знак	Итого
0,1	0,2	0,4	1100	<=	1100
0,05	0,02	0,02	120	<=	120
3	1	2	6125	<=	8000
3	5	4	27625	max	max

Симплекс таблица

План	БП	ЗБП	Значения коэффициентов при						Dmin
			x1	x2	x3	p1	p2	p3	
1	p1	1100	0,1	0,2	0,4	1	0	0	5500
	p2	120	0,05	0,02	0,02	0	1	0	6000
	p3	8000	3	1	2	0	0	1	8000
	F(x)	0	-3	-5	-4	0	0	0	
2	x2	5500	0,5	1	2	5	0	0	11000
	p2	10	0,04	0	-0,02	-0,1	1	0	250
	p3	2500	2,5	0	0	-5	0	1	1000
	F(x)	27500	-0,5	0	6	25	0	0	

<u>Детали работы с симплекс таблицей</u>

1. На каждой итерации находим ведущий столбец (ВС), используя минимальное, отрицательное значение цели.
2. На каждой итерации определяем значения D=Xвс/Xзбп
3. На каждой итерации определяем строку ведущую (СВ), которая соответствует строке, где D=Dmin
4. На каждой итерации определяем ведущий элемент (ВЭ) стоит на пересечении ВС и СВ

Симплекс таблица

А ОЭ

План	БП	ЗБП	Значения коэффициентов при x1	x2	x3	p1	p2	p3
1	p1	1100	0,1	0,2	0,4	1	0	0
	p2	120	0,05	0,02	0,02	0	1	0
	p3	8000	3	1	2	0	0	1
	F(x)	0	-3	-5	-4	0	0	0
2	x2	5500	0,5	1	2	5	0	0
	p2	10	0,04	0	-0,02	-0,1	1	0
	p3	2500	2,5	0	0	-5	0	1
	F(x)	27500	-0,5	0	6	25	0	0

СЭ С

Правило прямоугольника

НЭ

$$27500 = 0 - \frac{1100 \times -5}{0,2}$$

Расчет элементов последующей итерации предполагает следующее:

1. Базисная переменная итерации заменяется на $X_{вс}$;
2. Заполняются новые элементы ведущего столбца, причем НЭ, соответствующий опорному, принимает значение 1 остальные 0;
3. Заполняются новые элементы соответствующие строке ведущей, используя формулу

$$НЭ = \frac{СЭ}{ОЭ}$$

4. Остальные элементы рассчитываются по правилу прямоугольника

$$НЭ = СЭ - \frac{А \times С}{ОЭ}$$

Производственная задача

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 \le 1100 \\ 0,05x_1 + 0,02x_2 + 0,02x_3 \le 120 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8000 \end{cases}$$

$$F(\bar{X}) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to max$$

Система ограничений

x1	*x2*	*x3*	*Всего*	*Знак*	*Итого*
0,1	0,2	0,4	1100	<=	1100
0,05	0,02	0,02	120	<=	120
3	1	2	6125	<=	8000
3	5	4	27625	max	max

Симплекс таблица

План	БП	ЗБП	Значения коэффициентов при						Dmin
			x1	*x2*	*x3*	*p1*	*p2*	*p3*	
2	x2	5500	0,5	1	2	5	0	0	11000
	p2	10	0,04	0	-0,02	-0,1	1	0	250
	p3	2500	2,5	0	0	-5	0	1	1000
	F(x)	27500	-0,5	0	6	25	0	0	
3	x2	5375	0	1	2,25	6,25	-12,5	0	
	x1	250	1	0	-0,5	-2,5	25	0	
	p3	1875	0	0	1,25	1,25	-62,5	1	
	F(x)	27625	0	0	5,75	23,75	12,5	0	

Процесс расчета заканчивается, когда на очередной итерации в стоке цель нет отрицательных коэффициентов

Симплекс таблица

План	БП	ЗБП	Значения коэффициентов при						Dmin
			x1	*x2*	*x3*	*p1*	*p2*	*p3*	
2	x2	5500	0,5	1	2	5	0	0	11000
	p2	10	0,04	0	-0,02	-0,1	1	0	250
	p3	2500	2,5	0	0	-5	0	1	1000
	F(x)	27500	-0,5	0	6	25	0	0	
3	x2	5375	0	1	2,25	6,25	-12,5	0	
	x1	250	1	0	-0,5	-2,5	25	0	
	p3	1875	0	0	1,25	1,25	-62,5	1	
	F(x)	27625	0	0	5,75	23,75	12,5	0	

Выводы:

1. Оптимальный план продаж

$$\bar{X} = (250, 5375, 0, 0, 0, 1875)$$
$$F(\bar{X}) = 27\ 625 \text{ тыс. рублей } \rightarrow max$$

Следовательно, для получения максимального дохода 27625 тыс. рублей необходим следующий план продажи

- товары группы А -250 единиц;
- товары группы В -5375 единиц;
- товары группы С -0 единиц

2. В оптимальном плане среди базисных переменных находится дополнительная переменная *p3* что означает – площадь складских помещений недоиспользована на 1875 м^2, так как эта переменная входит в третье ограничение

Симплекс таблица

План	БП	ЗБП	Значения коэффициентов при						Dmin
			x1	x2	x3	p1	p2	p3	
2	x2	5500	0,5	1	2	5	0	0	11000
	p2	10	0,04	0	-0,02	-0,1	1	0	250
	p3	2500	2,5	0	0	-5	0	1	1000
	F(x)	27500	-0,5	0	6	25	0	0	
3	x2	5375	0	1	2,25	6,25	-12,5	0	
	x1	250	1	0	-0,5	-2,5	25	0	
	p3	1875	0	0	1,25	1,25	-62,5	1	
	F(x)	27625	0	0	5,75	23,75	12,5	0	

<u>Предельные значения</u> (**нижняя и верхняя граница**) изменения каждого из дефицитных ресурсов, для которых имеется решения прямой и обратной задач определяется соотношением

$$\Delta b_i^- = \max_{d_{ij}>0}\left\{-\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\} \le \Delta b_i \le \min_{d_{ij}<0}\left\{-\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\} = \Delta b_i^+,$$

где

Δb_i – величина изменения i – го ресурса

Δb_i^- - величина уменьшения i – го ресурса

Δb_i^+ - величина увеличения i – го ресурса

x_j^* - компоненты оптимального плана

d_{ij} - коэффициенты структурных сдвигов

1. Время работы продавцов (ресурс $b_1 = 1100$)

$$\max_{d_{ij}>0}\left\{-\frac{5375}{6{,}25}; -\frac{1875}{1{,}25}\right\} = -860 \le \Delta b_1 \le \min_{d_{ij}<0}\left\{-\frac{250}{-2{,}5}\right\} = 100$$

интервал изменения $b_1 = [240; 1200]$

2. Площадь торговых залов (ресурс $b_2 = 120$)

$$\max_{d_{ij}>0}\left\{-\frac{250}{25}\right\} = -10 \le \Delta b_2 \le \min_{d_{ij}<0}\left\{-\frac{5375}{-12{,}5}; -\frac{1875}{-62{,}5}\right\} = 30$$

интервал изменения $b_2 = [110; 150]$

3. Третья группа товаров x_3 не вошла в оптимальный план

$$\max_{d_{ij}<0}\left\{\frac{250}{-0{,}5}\right\} = -500 \le x_3 \le \min_{d_{ij}>0}\left\{\frac{5375}{2{,}25}; \frac{1875}{1{,}25}\right\} = 1500$$

в продажу можно вводить товары этой группы до 1500 единиц двойственные оценки при этом сохранят устойчивость

Субоптимальные Планы

Вариант 1

Предприятие наняло дополнительных продавцов и рабочее время увеличилось на 50 чел. час.

Базисные переменные (БП)	Значения БП	Коэффициенты структурных сдвигов (КСС)	Произведение КСС на $\Delta b_1 = 50$	Расчет варианта плана
x_2	5375	6,25	312,5	5 687,5
x_1	250	-2,5	-125	125
x_6	1875	1,25	62,5	1 937,4
$F(X_3)$	27 625	23,75	1 187,5	28 812,5

Вариант 2

Площадь торговых залов уменьшилась на 5 м^2

Базисные переменные (БП)	Значения БП	Коэффициенты структурных сдвигов (КСС)	Произведение КСС на $\Delta b_2 = -5$	Расчет варианта плана
x_2	5375	-12,4	62,5	5 437,5
x_1	250	25	-125	125
x_6	1875	-62,5	312,55	2 187,5
$F(X_3)$	27 625	12,5	-62,6	27 562,5

Вариант 3

В продажу требуется включить третью группу товаров в количестве 100 ед.

Базисные переменные (БП)	Значения БП	Коэффициенты структурных сдвигов (КСС)	Произведение КСС на $\Delta x_3 = 100$	Расчет варианта плана
x_2	5375	2,5	225	5150
x_1	250	-0,5	-50	300
x_6	1875	1,25	125	1750
$F(X_3)$	27 625	5,75	575	27 050

Транспортная задача

Математическая модель задачи

Пусть имеется $m(i=\overline{1,m})$ поставщиков, располагающих некоторым однородным продуктом в объемах по a_i единиц, и $n(j=\overline{1,n})$ получателей с объемами потребления по b_j единиц. Задана матрица $C=\|c_{ij}\|$, где c_{ij} — стоимость перевозки единицы продукции от i-го поставщика j-му потребителю. Возникает задача определения плана перевозок $X=\|x_{ij}\|$, где x_{ij} — количество единиц продукции, поставляемой по коммуникации (i, j), который бы минимизировал суммарную стоимость всех перевозок.

Математическая модель задачи будет иметь вид

$$\min: Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

при ограничениях: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i=\overline{1,m};$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j=\overline{1,n};$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,n}.$$

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, то задача называется закрытой (сбалансированной), в противном случае — открытой.

Переход к закрытой форме задачи.

В случае если запасы поставщиков больше потребностей потребителей $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводят $(n+1)$-го фиктивного потребителя, запросы которого равны излишку запаса, т.е.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Тарифы c_{in+1} считаются равными нулю. Получим расширенную закрытую задачу. Поставки x_{in+1} в оптимальном плане расширенной задачи покажут остатки продукции на складах поставщиков.

Если потребности превышают запасы $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят $(m+1)$ -го фиктивного поставщика. Его запасы считают равными недостающей продукции:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Тарифы $c_{m+1\,j}$ равны некоторому большому положительному числу. В расширенной задаче получим баланс потребностей и запасов. Поставки $x_{m+1\,j}$ в оптимальном плане расширенной задачи покажут объемы недостачи продукции.

Решение транспортной задачи

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:
а) определение исходного опорного решения;
б) построение последовательных итераций, т.е. приближение к оптимальному решению.
Решение считается оптимальным, если найденная неотрицательная матрица X удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \\ L(X) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \end{cases}$$

Теорема: для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Транспортная задача

Постановка задачи.

У фирмы есть 3 электростанции, которые снабжают электроэнергией 4 города, причем каждая из станций может поставлять электроэнергию в любой из городов. Мощности электростанций (в млн. квт/ч), пиковые потребности в электроэнергии для каждого из городов (в млн. квт/ч) приведены в Табл. 1 и Табл. 2 соответственно. В Табл. 3 приведены данные о стоимости поставки 1 млн. квт/ч от каждой из электростанций для каждого города. Фирме необходимо составить план поставки электроэнергии для обеспечения потребностей городов (с учетом пиковых потребностей) с наименьшими затратами.

Табл. 1 Мощности электростанций (млн. квт/ч)

Станция	*Мощность*
Станция 1	35
Станция 2	50
Станция 3	40

Табл. 2 Пиковые потребности городов в электроэнергии (млн. квт/ч)

Город	*Пиковая потребность*
Город 1	45
Город 2	20
Город 3	30
Город 4	30

Табл. 3 Стоимость поставки 1 млн. квт/ч

	Город 1	*Город 2*	*Город 3*	*Город 4*
Станция 1	8	6	10	9
Станция 2	9	12	13	7
Станция 3	14	9	16	5

План решения транспортной задачи

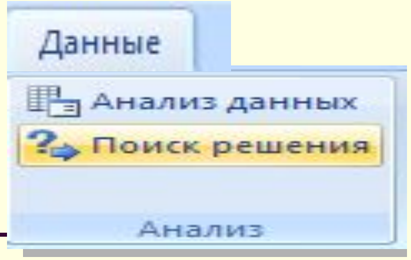
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3			Стоимость поставки 1 млн. Квт/ч						
4				Потребитель					
5			Город 1	Город 2	Город 3	Город 4			
6		Станция 1	8	6	10	9			
7	Поставщик	Станция 2	9	12	13	7			
8		Станция 3	14	9	16	5			Суммарная стоимость
9									1020
10			Объем поставки (в млн Квт.ч)						
11				Потребитель					
12			Город 1	Город 2	Город 3	Город 4	Всего поставлено		Максимально возможный объем поставки (Мощность станции)
13		Станция 1	0	10	25	0	35	≤	35
14	Поставщик	Станция 2	45	0	5	0	50	≤	50
15		Станция 3	0	10	0	30	40	≤	40
16		Всего получено	45	20	30	30			
17			≥	≥	≥	≥			
18		Максимальная (пиковая) потребность (в млн. Квт. ч)	45	20	30	30			

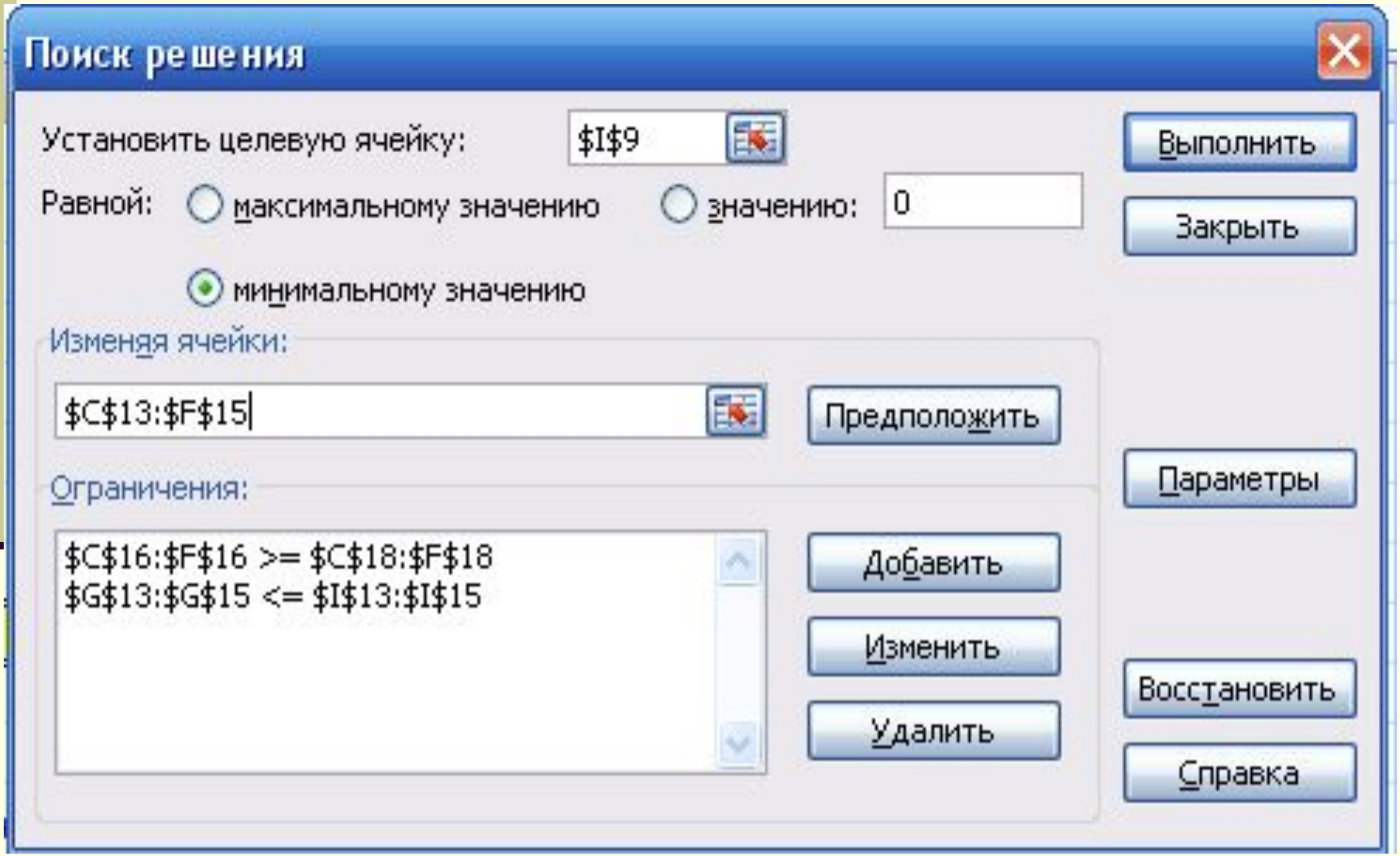
=СУММПРОИЗВ(C6:F8;C13:F15)

=СУММ(C13:F13)

=СУММ(F13:F16)

Средство решения транспортной задачи





2. *Задача о рюкзаке (динамическое программирование)*

Постановка задачи

Самолет загружается предметами *N* различных типов с весом *wj* и стоимостью *cj*. Максимальная грузоподъемность равна *W* = 10 тонн. Определить план загрузки, максимальную стоимость груза, вес которого не более *W* = 10 тонн.

Тип j	Вес w_j	Стоимость c_j
1	2	65
2	3	100
3	1	30

$$Z(X) = \sum_{j=1} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le W,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$x_j \text{ — целые.}$$

Этап j связан с загрузкой предметов j-го типа в количестве x_j единиц (x_j — управляемая переменная).

Состояние загружаемого самолета S_j на этапе j определяется через ограничение математической модели. В алгоритме прямой прогонки состояния

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} w_i x_i, \ \ j = \overline{1, n}; \ \ 0 \le S_j \le W; \ \ S_n = W.$$

Шаг №1

S_3	c_3x_3											Opt	
	x3 (w3=1)											$F_3(S_3)$	x_3*
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
0	0											0	0
1	0	30										30	1
2	0	30	60									60	2
3	0	30	60	90								90	3
4	0	30	60	90	120							120	4
5	0	30	60	90	120	150						150	5
6	0	30	60	90	120	150	180					180	6
7	0	30	60	90	120	150	180	210				210	7
8	0	30	60	90	120	150	180	210	240			240	8
9	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270		270	9
10	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	300	10

Шаг №2

S2	c2x2+F3(S2-w2 x2)				Opt	
	x2 (w2=3)				F2 (S2)	x2*
	0	1	2	3		
0	0+0= 0				0	0
1	0+30= 30				30	0
2	0+60= 60				60	0
3	0+90= 90	100+0= 100			100	1
4	0+120= 120	100+30= 130			130	1
5	0+150= 150	100+60= 160			160	1
6	0+180= 180	100+90= 190	200+0= 200		200	2
7	0+210= 210	100+120= 220	200+30= 230		230	2
8	0+240= 240	100+150= 250	200+60= 260		260	2
9	0+270= 270	100+180= 280	200+90= 290	300+0= 300	300	3
10	0+300= 300	100+210= 310	200+120= 320	300+30= 330	330	3

S2	c2x2+F3(S2-w2 x2)				0pt	
	x2 (w2=3)				F2 (S2)	x2*
	0	1	2	3		
0	0+0= 0				0	0
1	0+30= 30				30	0
2	0+60= 60				60	0
3	0+90= 90	100+0= 100			100	1
4	0+120= 120	100+30= 130			130	1
5	0+150= 150	100+60= 160			160	1
6	0+180= 180	100+90= 190	200+0= 200		200	2
7	0+210= 210	100+120= 220	200+30= 230		230	2
8	0+240= 240	100+150= 250	200+60= 260		260	2
9	0+270= 270	100+180= 280	200+90= 290	300+0= 300	300	3
10	0+300= 300	100+210= 310	200+120= 320	300+30= 330	330	3

Шаг №3

S1	c1x1+F3(S1-w1 x1)						0pt	
	x1 (w1=2)						F1 (S1)	x1*
	0	1	2	3	4	5		
0	0+0= 0						0	0
1	0+30= 30						30	0
2	0+60= 60	65+0= 65					65	1
3	0+100= 100	65+30= 95					100	0
4	0+130= 130	65+60= 125	130+0= 130				130	2
5	0+150= 160	65+100= 165	130+30= 160				165	1
6	0+200= 200	65+130= 195	130+60= 190	195+0= 195			200	3
7	0+230= 230	65+150= 225	130+100= 230	195+30= 225			230	0,2
8	0+260= 260	65+200= 265	130+130= 260	195+60= 255	260+0= 260		265	1
9	0+300= 300	65+230= 295	130+150= 290	195+100 295	260+30= 290		300	0
10	0+330= 330	65+260= 325	130+200= 330	195+130 325	260+60= 320	325+0= 325	330	0,2

Результат решения задачи

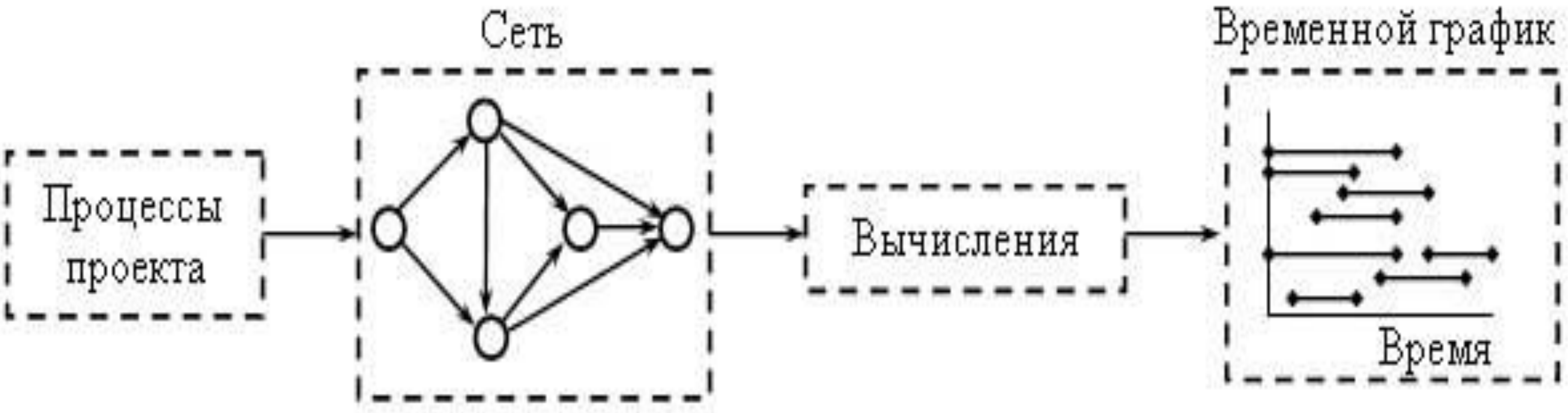
	x1	*x2*	*x3*	*итого вес*	*Максимальная стоимость*
План №1	0	3	1	10	330
План №2	2	2	0	10	330
Вес	2	3	1		

Сетевое планирование представляет из себя частный случай применения теории графов

Основу сетевой модели составляет график – наглядное представление плана работ

Сетевое Планирование включает три основных этапа:

1. Структурное планирование;
2. Календарное планирование;
3. Оперативное управление



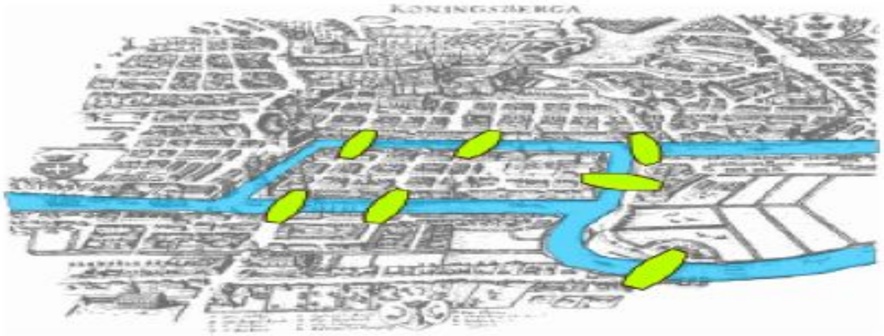
Теория графов – это область дискретной математики, где изучаемое множество представляется в виде <u>графа</u>

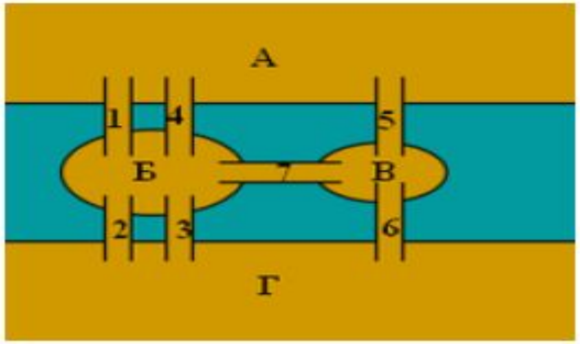
Граф – это геометрическая схема, на которой показано, как множество точек соединено попарно множеством непрерывных линий.

Задача о кёнигсбергских мостах

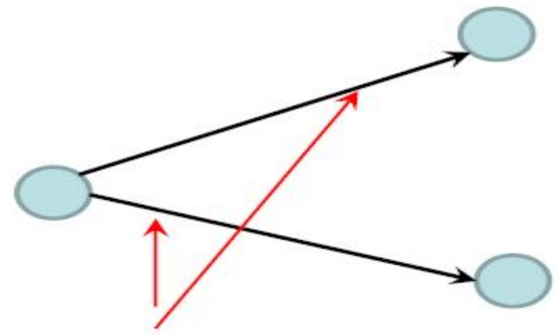
Философ Иммануил Кант, гуляя по городу Кенигсбергу, поставил задачу (1736) о семи кенигсбергских мостах:

Можно ли пройти по всем этим мостам и при этом вернуться в исходную точку так, чтобы по каждому мосту пройти только один раз.



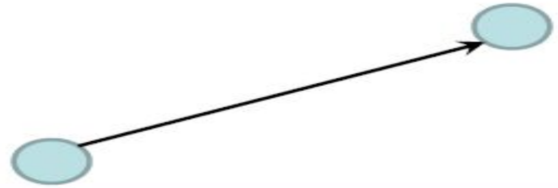


Граф определяется заданием двух множеств – множества точек и множества связей между парами вершин



Ребра (дуги) графа – это линии, соединяющие вершины, между которыми существует связь

Ориентированный граф – это когда в парах составляющих множество, указывается, какая вершина является первой, то есть в каком направлении идет связь.

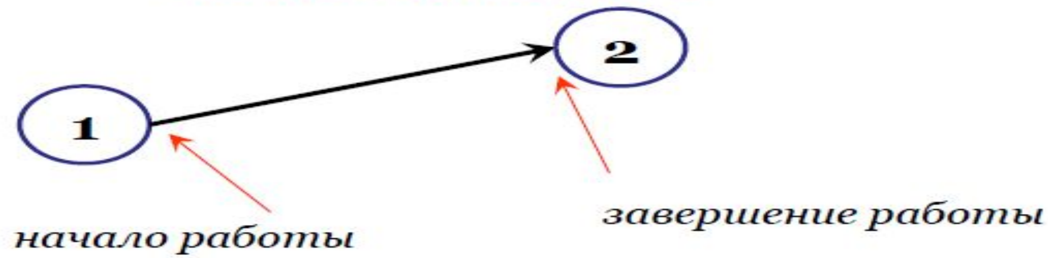


Ребра ориентированного графа изображаются стрелками

Событие - это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Например, фундамент залит бетоном, старение отливок завершено, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени.

Работа – это протекающий во времени процесс, требующий для своего осуществления материальных и трудовых затрат

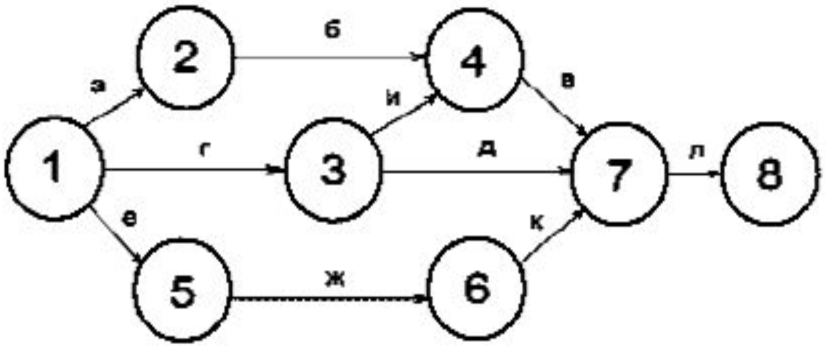
Каждая работа имеет предшествующее событие и определенным событием заканчивается



По своей физической природе работы можно рассматривать как:
действие: разработка чертежа, изготовление детали, заливка фундамента бетоном, изучение конъюнктуры рынка;
процесс: старение отливок, выдерживание вина, травление плат;
ожидание: ожидание поставки комплектующих, пролеживание детали в очереди к станку.
По количеству затрачиваемого времени работа может быть:
действительной, т.е. требующей затрат времени;
фиктивной, т.е. формально не требующей затрат времени и представляющей связь между какими-либо работами, например сдача отчета о технико-экономических показателях работы цеха вышестоящему

2. Правила построения сетевых графиков

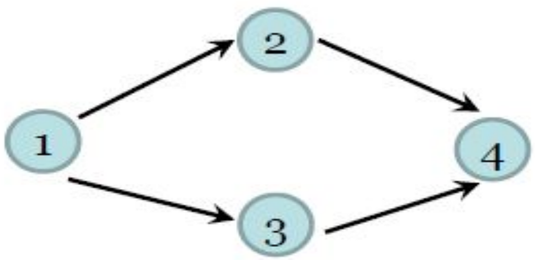
1. Начальное событие помещается в левой, а конечное – в правой части чертежа сети



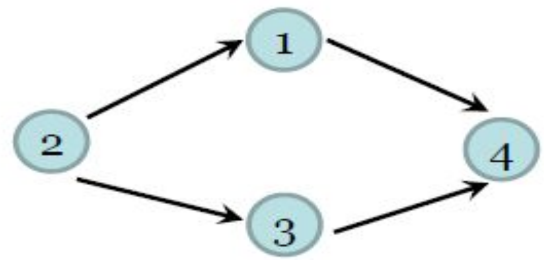
2. Только начальное событие не имеет входящих стрелок, и только конечное событие не имеет выходящих стрелок

2. Правила построения сетевых графиков

3. Нумеровать события необходимо так, чтобы каждое последующее из них приобретало возрастающий номер по отношению к предыдущему



правильная нумерация



неправильная нумерация

Графический способ упорядочения графа реализуется по ***алгоритму Фалкерсона***:

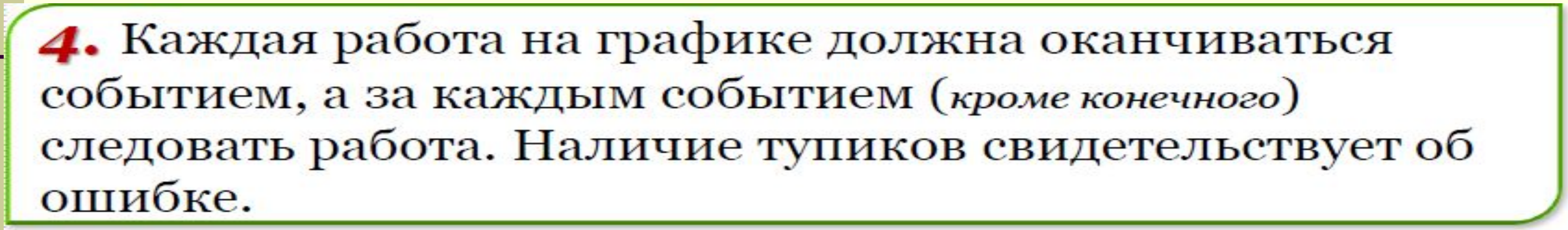
1-ый шаг) выделяем вершины, не имеющие "предков", и последовательно нумеруем их в произвольном порядке;

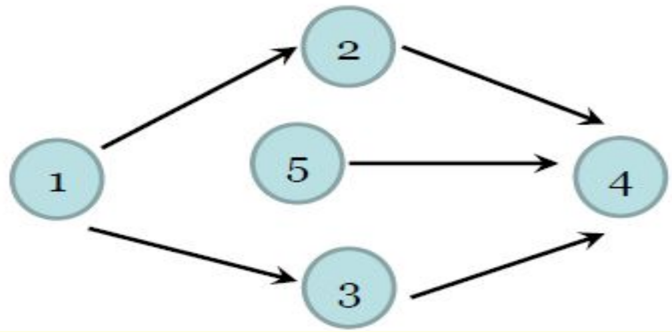
2-ой шаг) мысленно вычеркиваем из графа все вершины, имеющие номера, и дуги, из них выходящие;

3-ий шаг) в получившемся графе повторяем процедуры 1-ого и 2-ого шагов до тех пор, пока все вершины не будут пронумерованы.

Граф называется ***связанным***, если две любые его вершины

2. Правила построения сетевых графиков


4. Каждая работа на графике должна оканчиваться событием, а за каждым событием (*кроме конечного*) следовать работа. Наличие тупиков свидетельствует об ошибке.



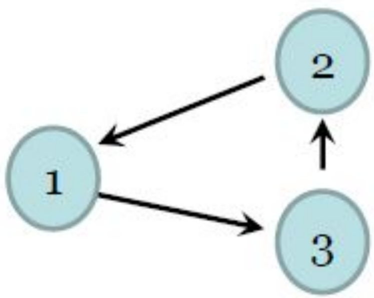
не должно быть *висячих* событий (т.е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного;

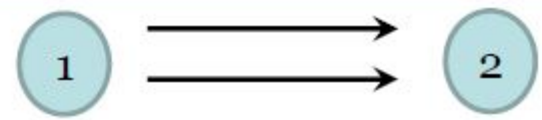
2. Правила построения сетевых графиков

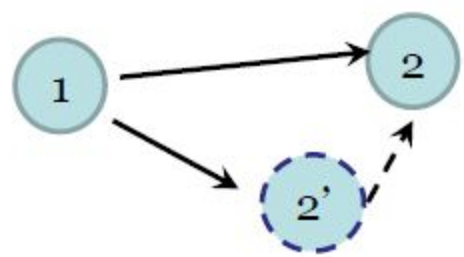
5. ***Замкнутый цикл*** свидетельствует об ошибке, то есть, если в сети стрелки возвращаются к событию из которого они вышли

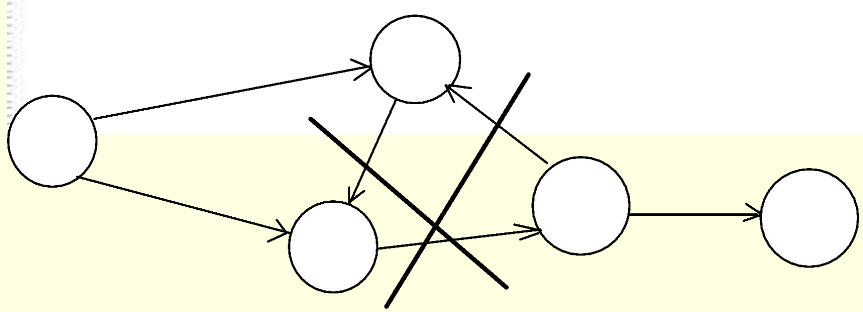
6. Любые два события должны быть связаны непосредственно не более чем одной работой.

При обнаружении параллельных работ вводится фиктивное событие и фиктивная работа



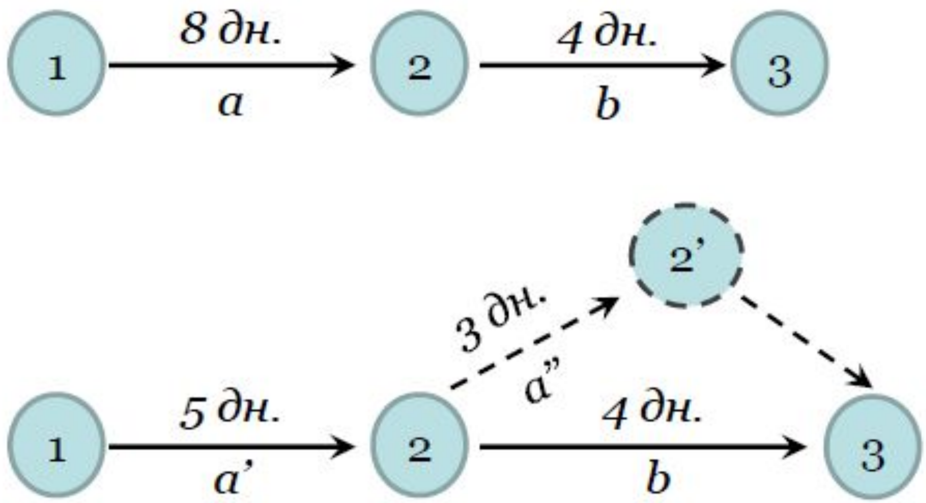






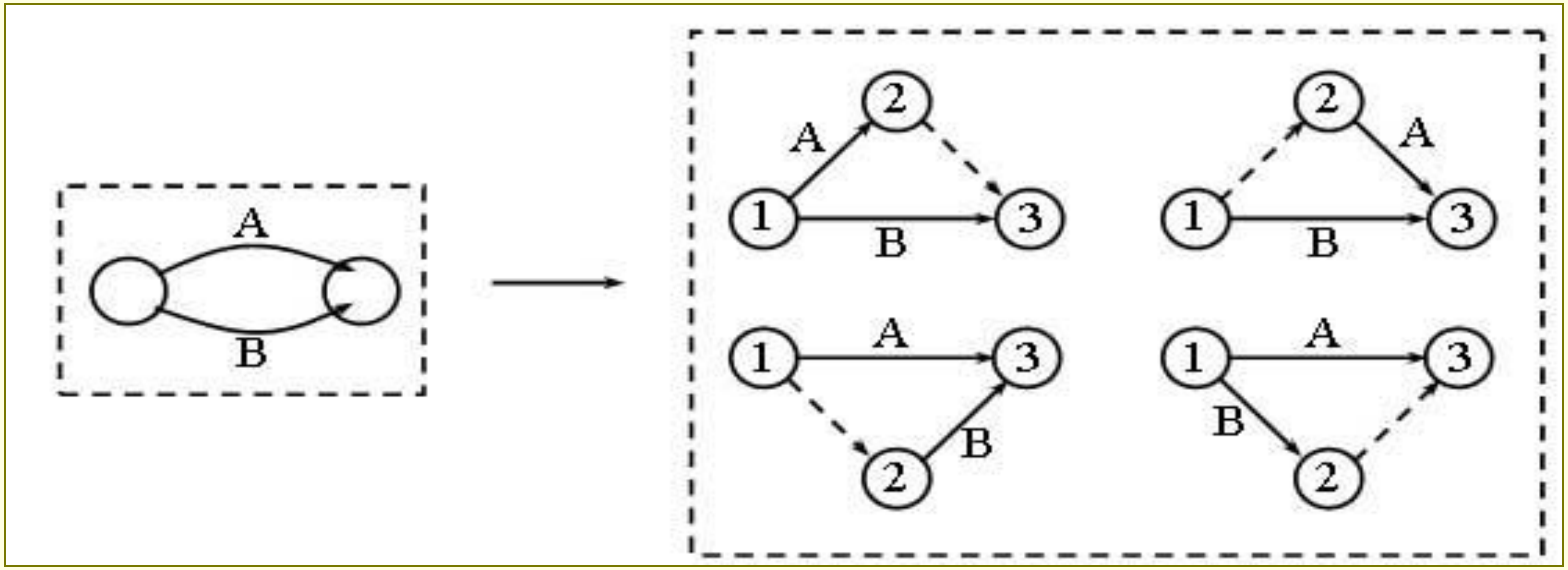
2. Правила построения сетевых графиков

7. Если для начала некоторой работы достаточно выполнить не всю предшествующую работу, а лишь часть её, то эта предшествующая работа разбивается на две или несколько самостоятельных, следующих одна за другой работ.



2. Правила построения сетевых графиков

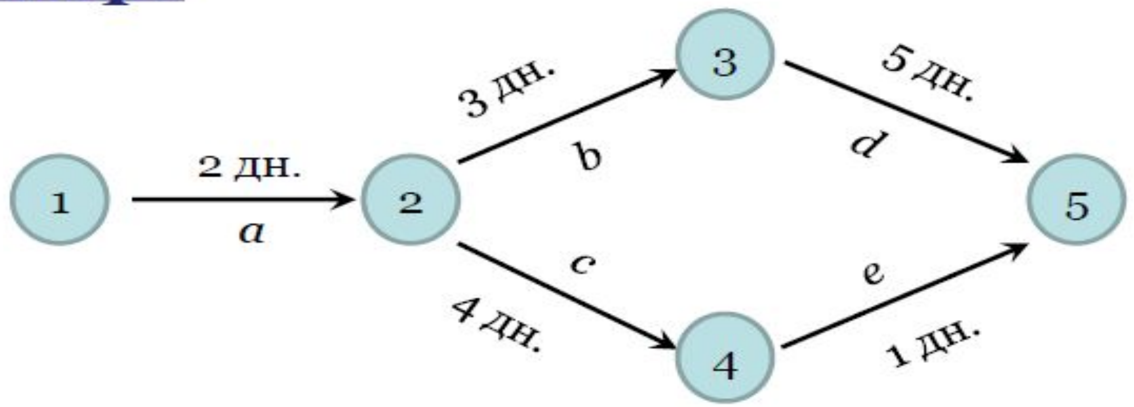
8. Между одними и теми же событиями не должно быть параллельных работ, т.е. работ с одинаковыми кодами



2. Правила построения сетевых графиков

Полный путь - это путь от исходного до завершающего события. ***Критический путь*** - максимальный по продолжительности полный путь. Работы, лежащие на критическом пути, называют *критическими*.

Пример:



Путь 1 - 1→ 2 → 3 → 5 = 10 дней (*критический путь*)
Путь 2 - 1 → 2 → 4 → 5 = 7 дней (*не критический путь*)

Способы сокращения критического пути:

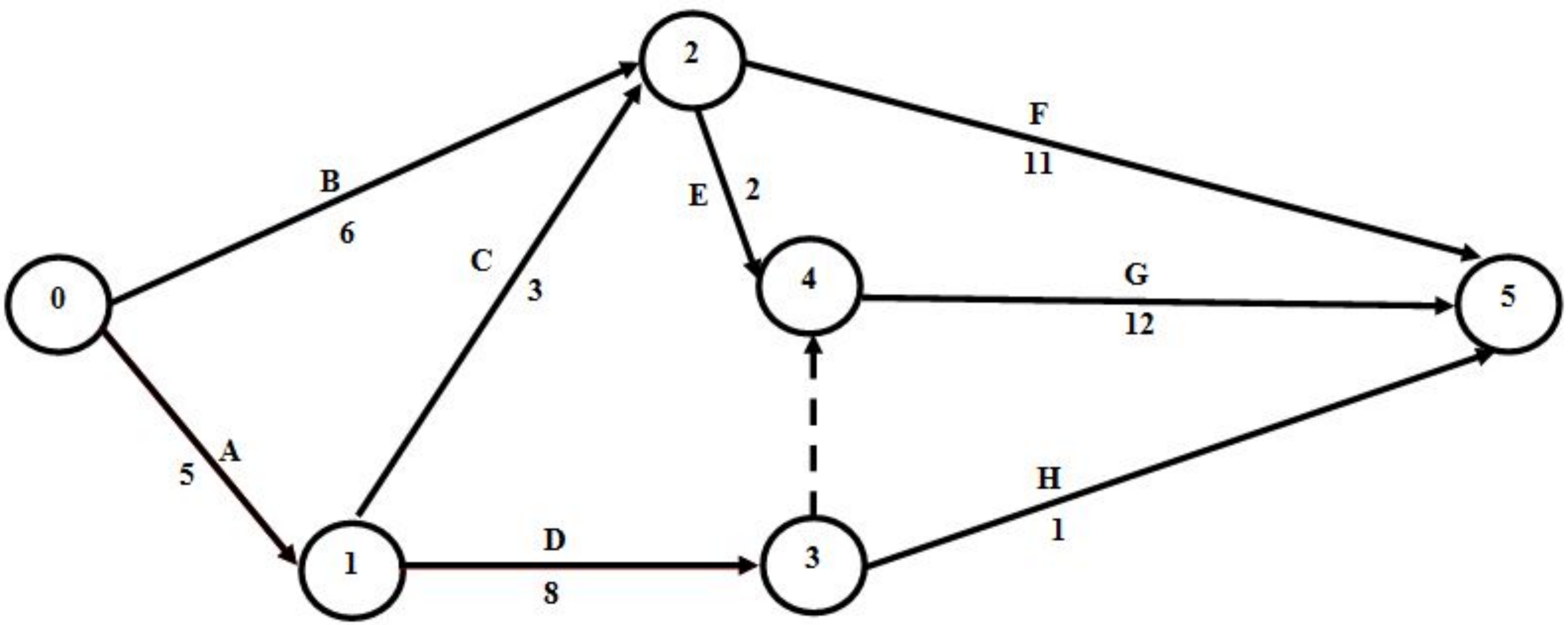
1. Перераспределение ресурсов
2. Изменение организации работ
3. Переброска ресурсов на критический путь в период ожидания, если позволяет технология

3. Расчет параметров сетевого графика

Издатель имеет контракт с автором на издание книги. Ниже представлена последовательность работ, приводящая к реализации проекта издания книги. Необходимо выполнить сетевое планирование работ для этого проекта.

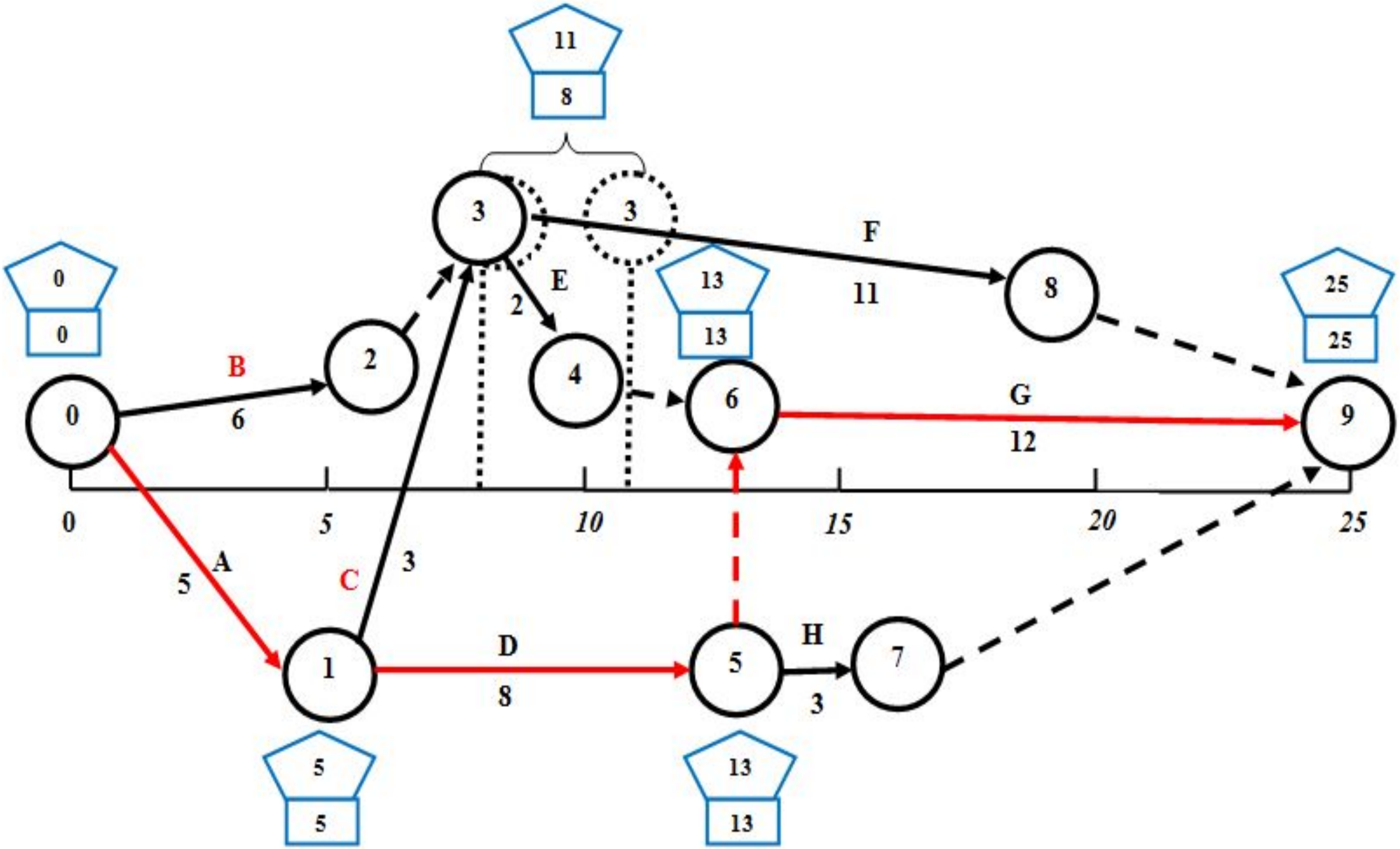
Шифр работы	Содержание работы	Работы до текущей	Длительность (недели)
A	Прочтение рукописи книги редактором.	—	5
B	Разработка обложки книги	—	6
C	Пробная верстка отдельных страниц книги	A	3
D	Подготовка иллюстраций	A	8
E	Просмотр автором редакторских правок	B,C	2
F	Верстка книги	B,C	11
G	Печать и брошюровка книги	E,D	12
H	Проверка автором иллюстраций	D	1

Шаг №1. Построение структуры сети



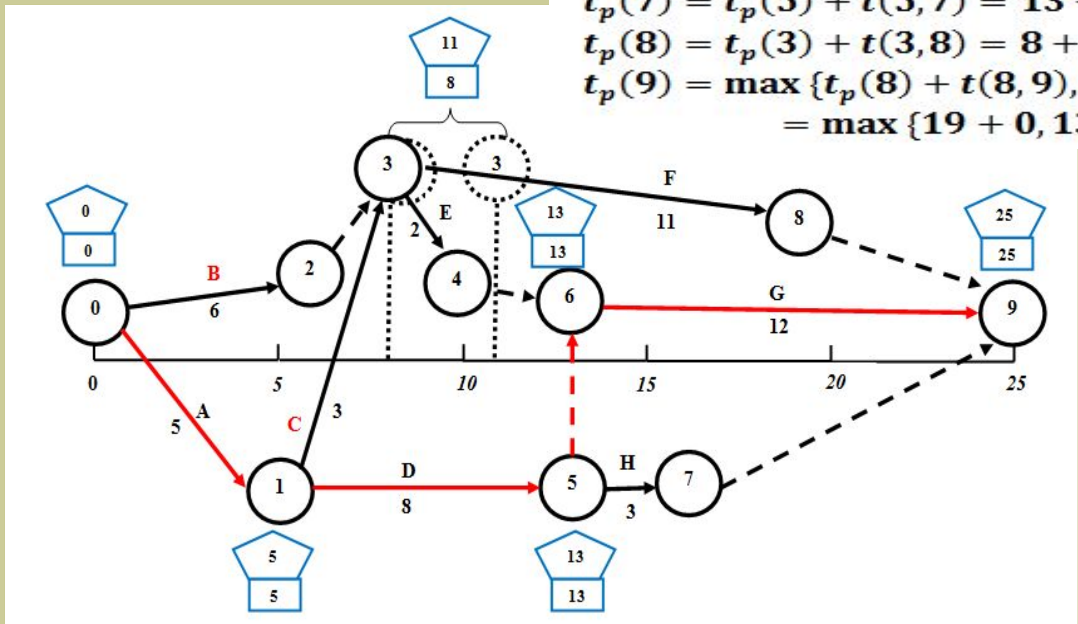
3. Расчет параметров сетевого графика

Шаг №2. Совмещение структуры сети проекта с временными параметрами событий



Шаг №3. Расчет раннего срока свершения событий (проход вперед)

$$t_p(0) = 0$$
$$t_p(1) = t_p(0) + t(0,1) = 0 + 5 = 5$$
$$t_p(2) = t_p(0) + t(0,2) = 0 + 6 = 6$$
$$t_p(3) = \max\{t_p(1) + t(1,3), t_p(2) + t(2,3)\} = \max\{5 + 3, 6 + 0\} = 8$$
$$t_p(4) = t_p(3) + t(3,4) = 8 + 2 = 10$$
$$t_p(5) = t_p(1) + t(1,5) = 5 + 8 = 13$$
$$t_p(6) = \max\{t_p(4) + t(4,6), t_p(5) + t(5,6)\} = \max\{10 + 0, 13 + 0\} = 13$$
$$t_p(7) = t_p(5) + t(5,7) = 13 + 3 = 16$$
$$t_p(8) = t_p(3) + t(3,8) = 8 + 11 = 19$$
$$t_p(9) = \max\{t_p(8) + t(8,9), t_p(6) + t(6,9), t_p(7) + t(7,9),\}$$
$$= \max\{19 + 0, 13 + 12, 16 + 0\} = 25$$



Ранний срок $t_p(j)$ ***свершения события*** j - это ранний срок, необходимый для выполнения всех работ, предшествующих данному событию:

$$t_p(j) = \max_{(i,j)\in U_j^+}\left(t_p(i) + t(i,j)\right),$$

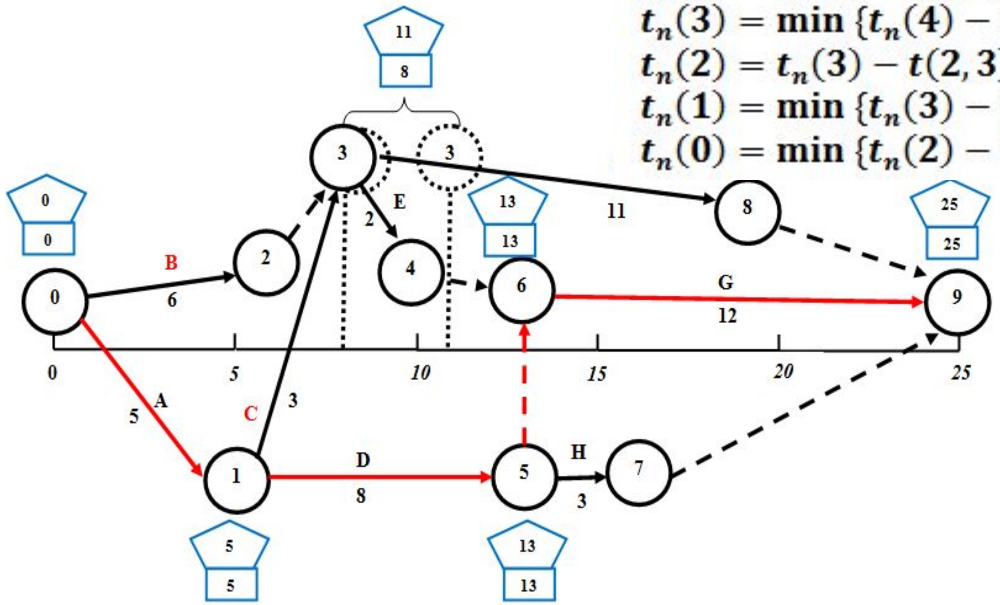
где $t_p(i)$ - ранний срок свершения события i;

$t(i,j)$ - продолжительность работы (i,j);

U_j^+ - множество работ, входящих в событие j.

Шаг №4. Расчет позднего срока свершения событий (проход назад)

$$t_n(9) = 25$$
$$t_n(8) = t_n(9) - t(8,9) = 25 - 0 = 25$$
$$t_n(7) = t_n(9) - t(7,9) = 25 - 0 = 25$$
$$t_n(6) = t_n(9) - t(6,9) = 25 - 12 = 13$$
$$t_n(5) = \min\{t_n(6) - t(5,6), t_n(7) - t(5,7)\} = \min\{13 - 0, 25 - 3\} = 13$$
$$t_n(4) = t_n(6) - t(4,6) = 13 - 0 = 13$$
$$t_n(3) = \min\{t_n(4) - t(3,4), t_n(8) - t(3,8)\} = \min\{13 - 2, 25 - 8\} = 11$$
$$t_n(2) = t_n(3) - t(2,3) = 11 - 0 = 11$$
$$t_n(1) = \min\{t_n(3) - t(1,3), t_n(5) - t(1,5)\} = \min\{11 - 3, 13 - 8\} = 5$$
$$t_n(0) = \min\{t_n(2) - t(0,2), t_n(1) - t(0,1)\} = \min\{11 - 6, 5 - 5\} = 0$$



Поздним сроком $t_n(i)$ _свершения события_ i называется самый позд-
ий момент времени, после которого остается столько времени до критиче-
кого срока, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за
тим событием:

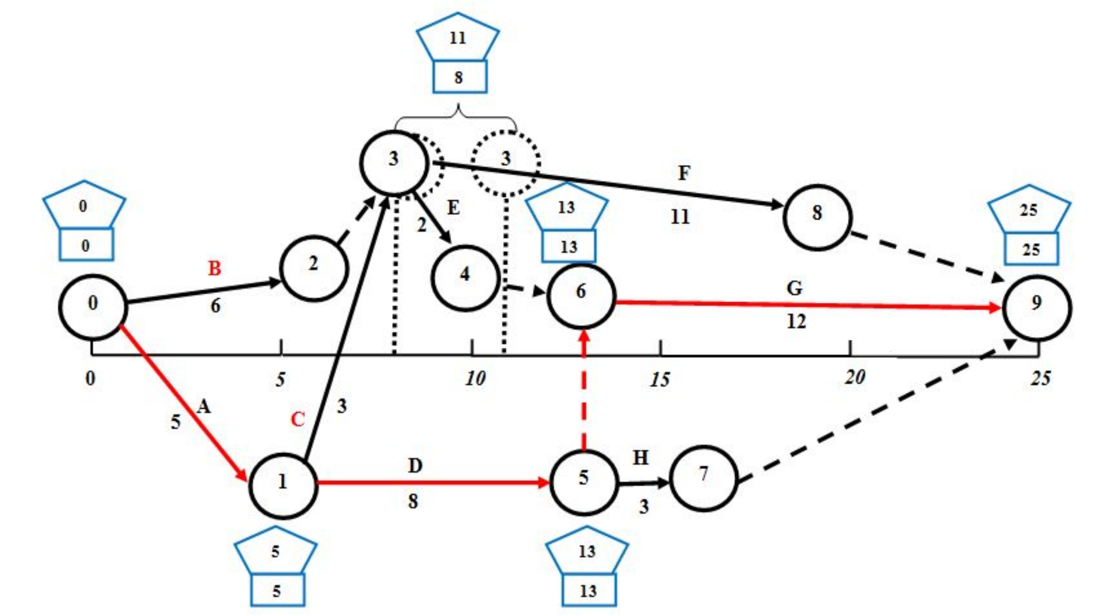
$$t_n(i) = \min_{(i,j)\in U_i^-}(t_n(j) - t(i,j)),$$

где $t_n(j)$ - поздний срок свершения события j;

$t(i,j)$ - продолжительность работы (i,j);

U_i^- - множество работ, выходящих из события i.

Шаг №5. Расчет резерва времени событий



Полные пути и их продолжительности:

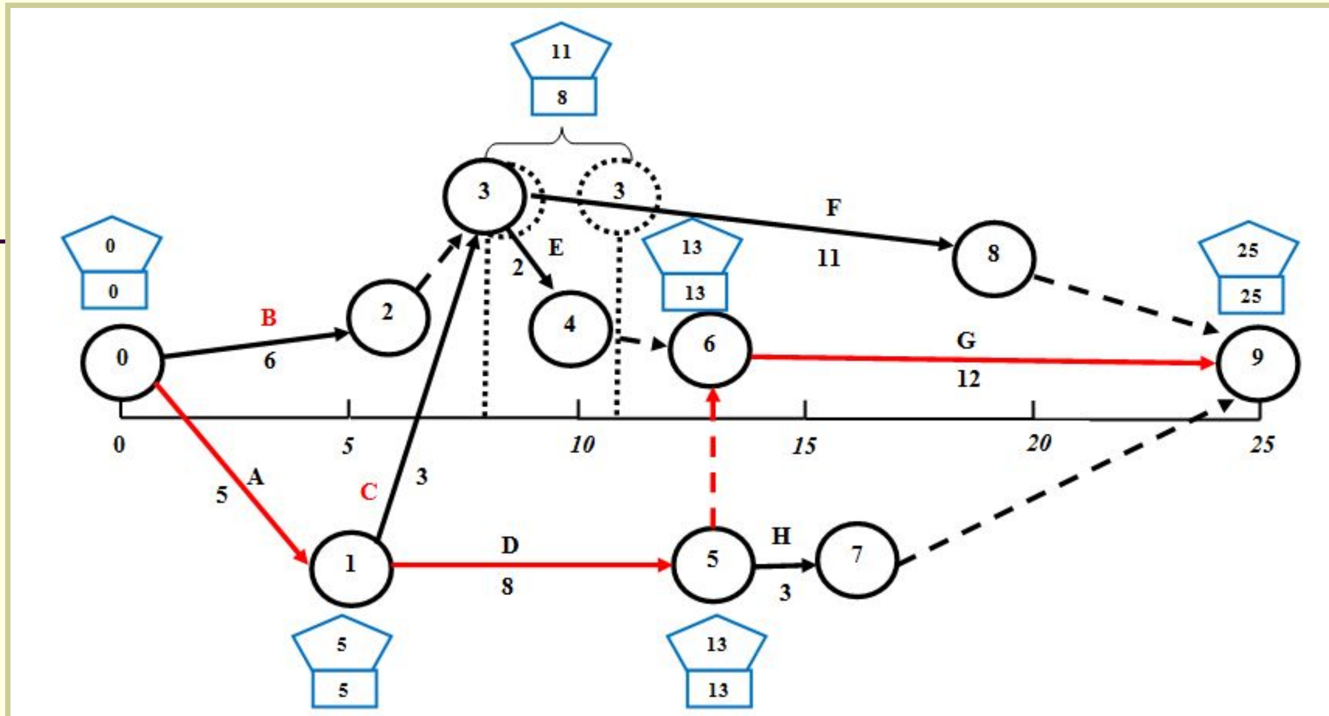
1) *0 – 1 – 3 – 8 – 9* ⇒ *5+3+11+0=19*;
2) *0 – 1 –3–4–6–9*⇒ *5+3+2+0+12=22*;

Критический срок (путь)

3) *0 – 1 –5–6–9*⇒ *5+8+0+12=25*;
4) *0 – 1 –5–7–9*⇒ *5+8+3+0=16*
5) *0 – 2 – 3 – 8 – 9* ⇒ *6+0+11+0=17*
6) *0 – 2 – 3 – 4 –6 –9* ⇒ *6+0+2+0+12=20*

События	Ранний срок свершения события $t_p(j)$	Поздний срок свершения события $t_n(j)$	Резерв времени события *R(j)*
0	*0*	*0*	*0*
1	*5*	*5*	*0*
2	6	11	5
3	8	11	3
4	10	13	3
5	*13*	*13*	*0*
6	*13*	*13*	*0*
7	16	25	9
8	19	25	6
9	*25*	*25*	*0*

Шаг №6. Расчет резерва времени работ и определение работ с красным флажком



Работы лежащие вне критического пути	Длительность процесса $t(i,j)$	Полный резерв времени работ $R_н(i,j)=t_н(j)-t_р(i)-t(i,j)$	Свободный запас времени работ $R_с(i,j)=t_р(j)-t_р(i)-t(i,j)$
B (0-2-3)	0	11-6-0=5	8-6-0=2
C (1-3)	3	11-5-3=3	8-5-3=0
E (3-4-6)	0	13-10-0=3	13-10-0=3
F (3-8-9)	0	25-19-0=6	25-19-0=6
H (5-7-9)	0	25-16-0=9	25-16-0=9

Шаг №6. Расчет резерва времени работ и определение работ с красным флажком

Резервы времени работы (i,j) подразделяются на полный $R_n(i,j)$ и свободный $R_c(i,j)$.

Полный резерв времени работы - это максимальное количество времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, не изменяя длительности критического срока:

$$R_n(i,j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i,j).$$

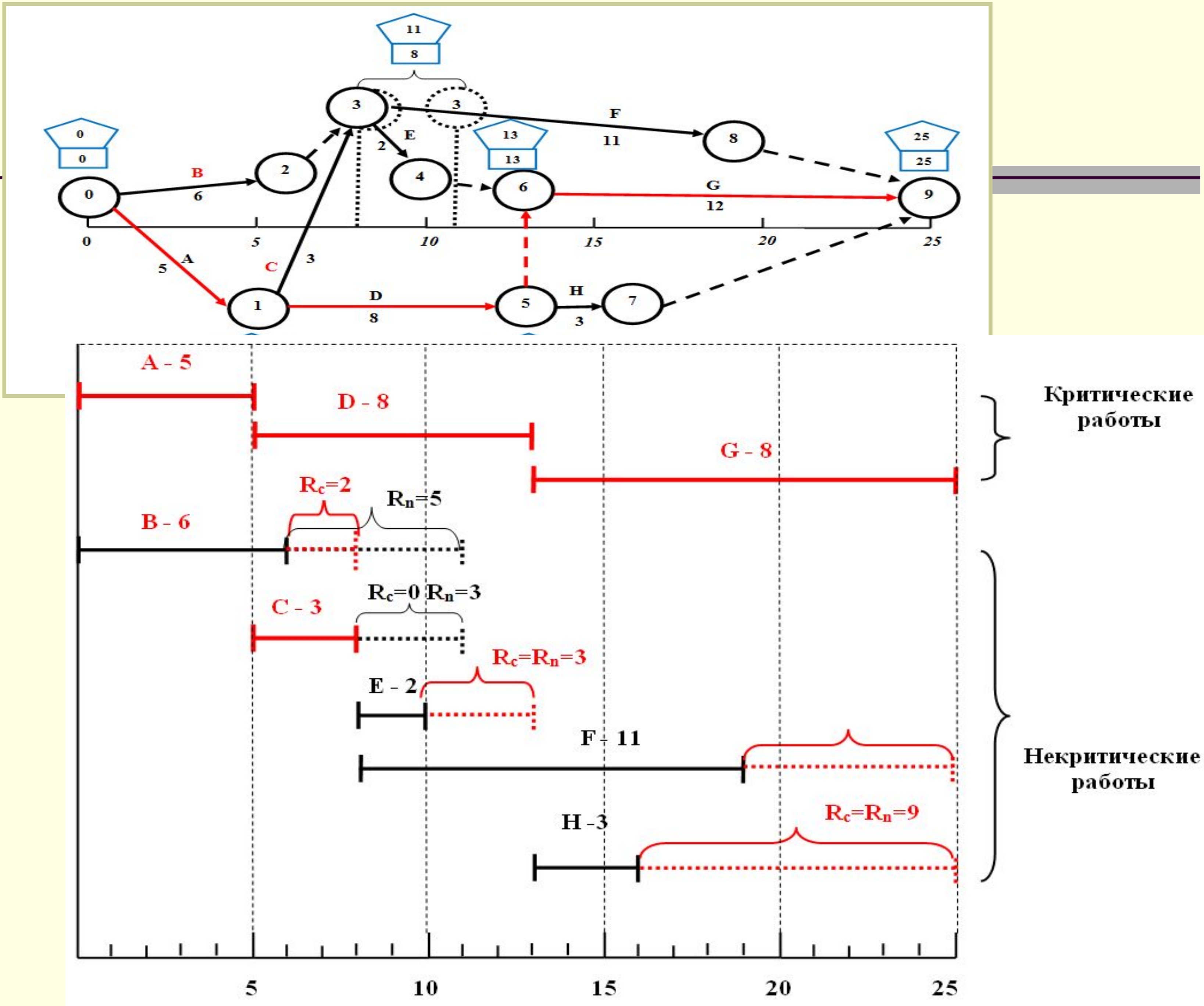
Свободный резерв времени работы - это максимальное количество времени, на которое можно увеличить продолжительность данной работы, не изменяя при этом ранних сроков начала последующих работ при условии, что непосредственно предшествующее событие наступило в свой ранний срок:

$$R_c(i,j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i,j).$$

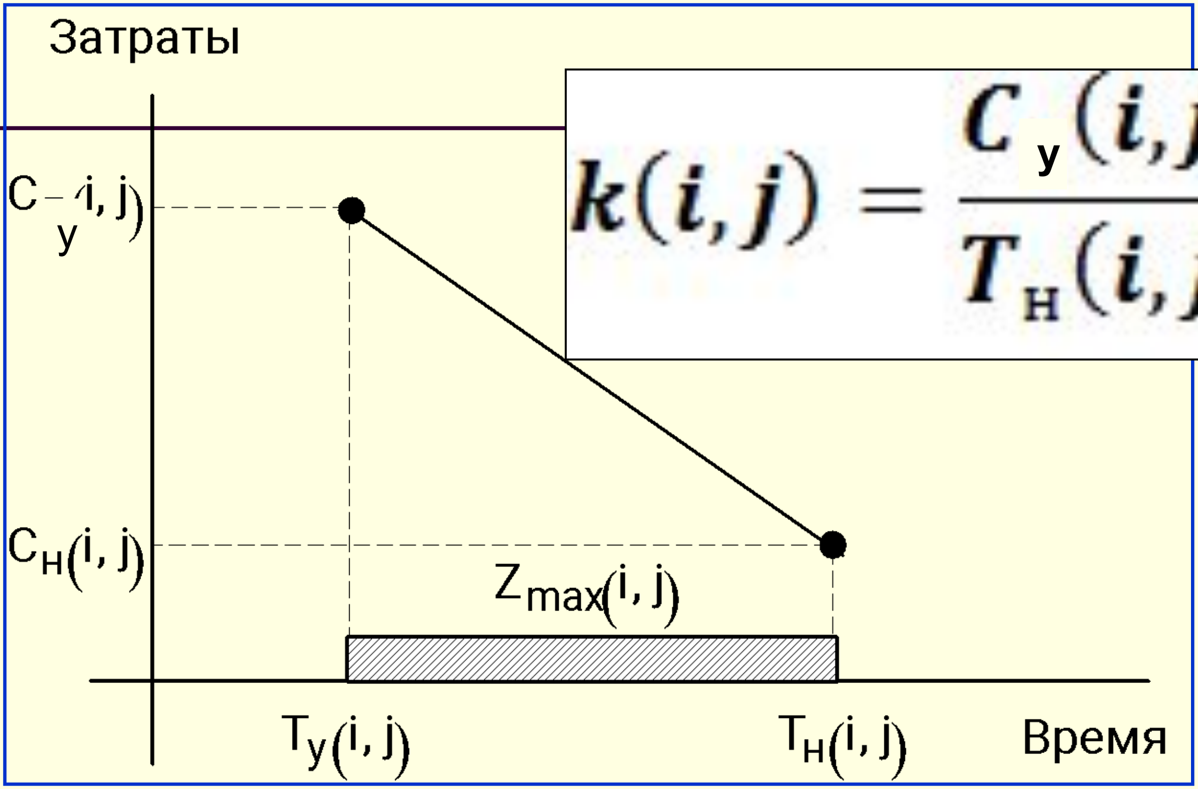
Если работа лежит вне критического пути и $R_n(i,j) > R_c(i,j)$, то она помечается красным флажком. Такие работы могут начинаться без нарушений следования со сдвигом, не превышающим свободный запас времени относительно самого раннего момента события i.

Если работа лежит вне критического пути и $R_n(i,j) = R_c(i,j)$, то она без нарушений следования может выполняться в любое время внутри максимального интервала между событиями i и j.

Шаг №7 Построение календарного графика выполнения работ



Расчет коэффициента нарастания затрат



$$k(i,j) = \frac{C_у(i,j) - C_н(i,j)}{T_н(i,j) - T_у(i,j)}$$

$C_н(i,j)$ - стоимость выполнения работы (i,j), имеющей нормальную продолжительность $T_н(i,j)$;

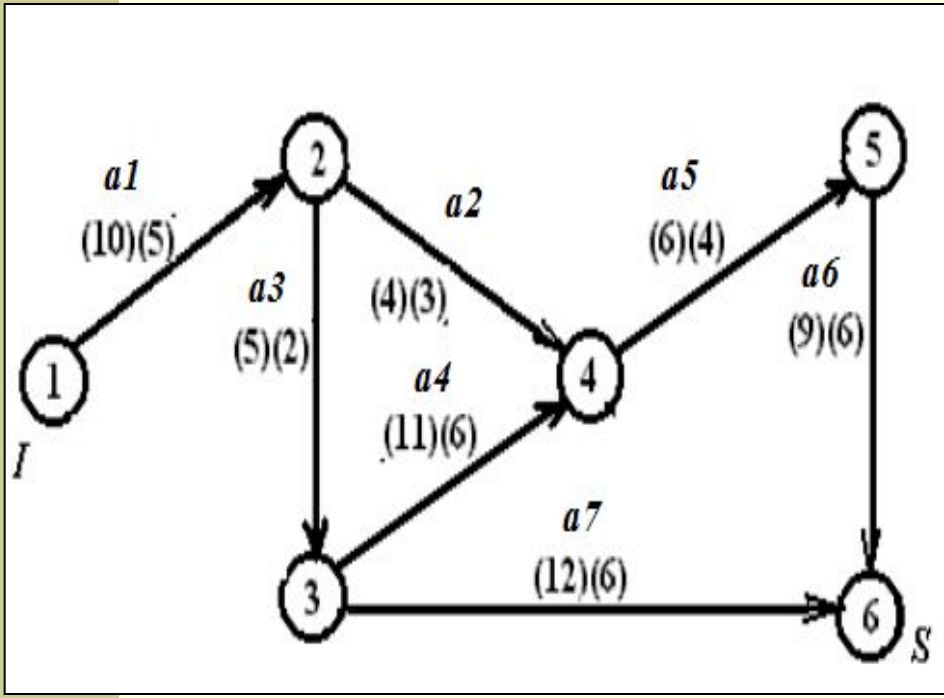
$C_у(i,j$ - стоимость выполнения работы (i,j), имеющей ускоренную продолжительность $T_у(i,j)$;

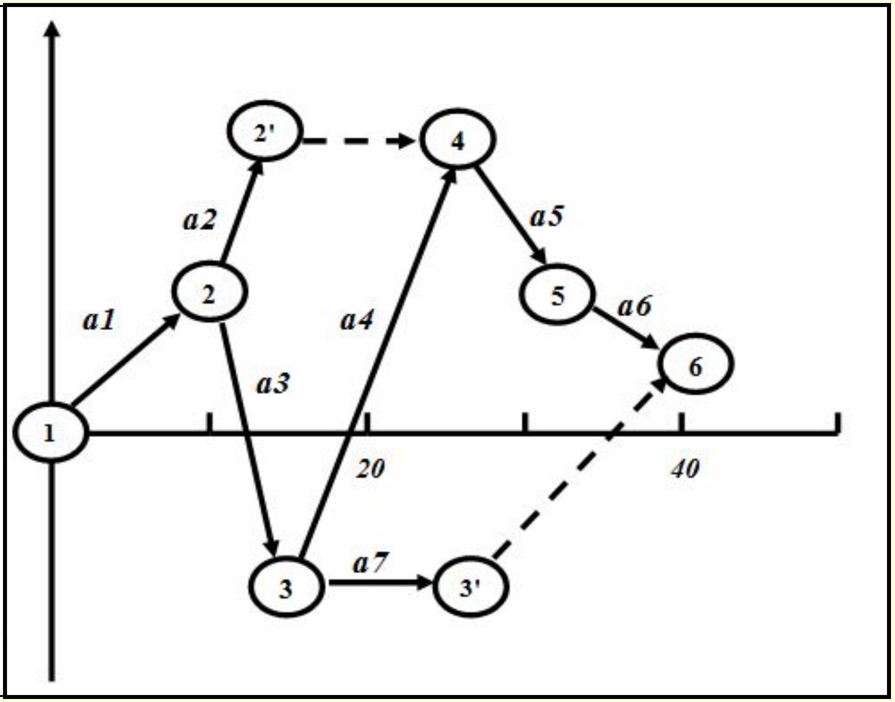
Пример проведения оптимизации

Требуется **оптимизировать по критерию минимизации затрат** сетевой график при заданной продолжительности выполнения всего комплекса работ за **25 суток**

Код	Работы	Опора ai	Нормальный вариант		Ускоренный вариант		k(i,j) – нарастания затрат
			Время (сутки)	Затраты (у.е.)	Время (сутки)	Затраты (у.е.)	
a1	Закупка дополнительного оборудования	—	10	150	5	225	15
a2	Изготовление деталей	a1	4	100	3	120	20
a3	Подготовка документации	a1	5	70	2	100	10
a4	Составление инструкций	a2, a3	11	260	6	435	35
a5	Сборка блоков	a2, a4	6	50	4	100	25
a6	Компоновка изделия	a5	9	180	6	300	40
a7	Установка дополнительного оборудования	a3	12	250	6	430	30

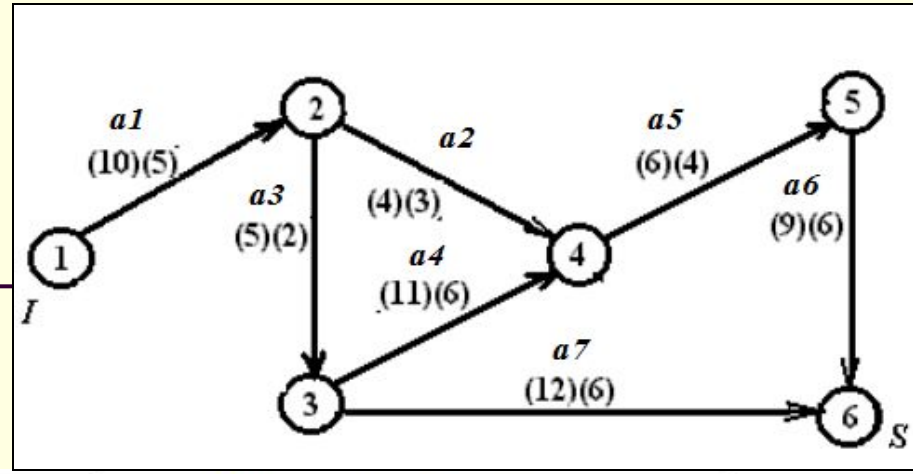
Построение структуры сетевого графика и определение критического пути





Полные пути	Продолжительность (сутки)	
	Нормальный режим	Ускоренный режим
1 – 2 – 3 – 6	27	13
1 – 2 – 4 – 5 - 6	29	18
1 – 2 - 3 - 4 - 5 - 6	41	23

Способ №1
Шаг№1-7

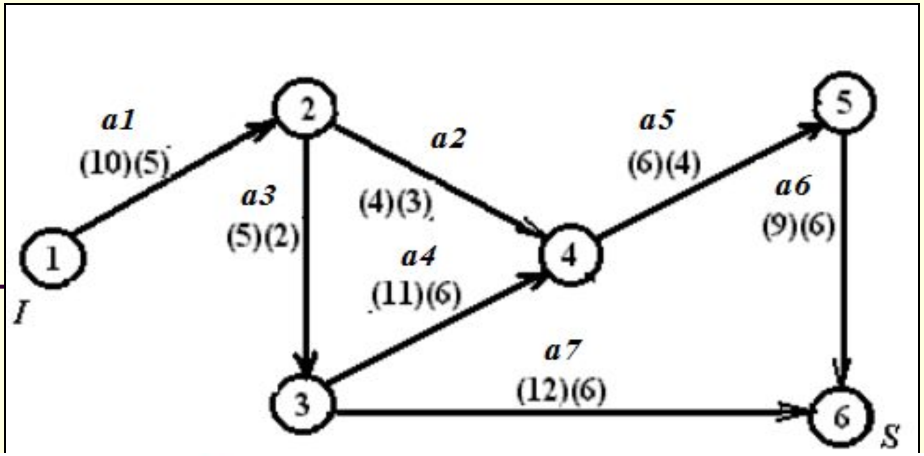


№ шага	Суточный прирост затрат	Работа	Количество сокращаемых суток (максимально возможное)	Продолжительность полного пути			Общий прирост затрат
				1-2-3-6	1-2-4-5-6	1-2-3-4-5-6	
0	-	-	-	27	29	41	-
1	10	2-3	(3) **3**	24	-	38	30
2	15	1-2	(5) **5**	19	24	33	75
3	20	2-4	(1) -	-	-	-	-
4	25	4-5	(2) **2**	-	22	31	50
5	30	3-6	(6) -	-	-	-	-
6	35	3-4	(5) **5**	-	-	26	175
7	40	5-6	(3) **1**	-	21	25	40
В С Е Г О							370

При снижении продолжительности выполнения всего комплекса работ с 41 суток до 25 суток оптимальные затраты составляют **1060+370=1430** (у.е.).

Способ №2

Шаг№1-7



№ шага	Суточный прирост затрат	Работа	Количество наращиваемых суток (максимально возможное)	Продолжительность полного пути			Общее снижение затрат
				1-2-3-6	1-2-4-5-6	1-2-3-4-5-6	
0	-	-	-	13	18	23	-
1	40	5-6	(3) **2**	-	20	25	-80
2	35	3-4	(5) -	-	-	-	-
3	30	3-6	(6) **6**	19	-	-	-180
4	25	4-5	(2) -	-	-	-	-
5	20	2-4	(1) **1**	-	21	-	-20
6	15	1-2	(5) -	-	-	-	-
7	10	2-3	(3) -	-	-	-	-
В С Е Г О							-280

Итак, при повышении продолжительности выполнения всего комплекса ускоренного режима работ до 25 суток оптимальные затраты составляют **1710-280=1430 (у.е.)**.

ПРОВЕРКА: способ №1 1430=1430 Способ №2