Показательные неравенства.

Определение. *Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется* ***показательным неравенством.***

Решение показательных неравенств в основном сводится к решению неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$) или $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)}$).

Для решения таких неравенств используются следующие утверждения:

1) если $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то при $a > 1$ следует $f(x) > g(x)$;

2) если $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то при $0 < a < 1$ следует $f(x) < g(x)$.

При решении показательных неравенств (или их систем) следует учитывать общие свойства неравенств, свойства монотонности показательной функции и допустимые значения переменных.

ПРИМЕР

1. Решим неравенство $5^{3x-2} < 5^{x+3}$.

Решение. Согласно свойству монотонности показательной функции при основании, большем 1, меньшему значению функции соответствует меньшее значение показателя степени, т. е. $3x - 2 < x + 3$. Отсюда $2x < 5$ или $x < 2{,}5$.

Ответ: $(-\infty; 2{,}5)$.

ПРИМЕР

2. Найдем наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $3^{\frac{x}{2}} < 9$.

Решение. Сделаем преобразование и получим неравенство, равносильное данному: $3^{\frac{x}{2}} < 3^2$. Отсюда следует, что $\frac{x}{2} < 2$ или $x < 4$.

Решением исходного неравенства является промежуток $(-\infty; 4)$, тогда наибольшим целым значением переменной, удовлетворяющим исходному неравенству, будет $x = 3$.

Ответ: 3.

ПРИМЕР

3. Найдем наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $(x+1)^{x^2-36} < 1$.

Решение. Согласно определению показательной функции выражение, стоящее в левой части данного неравенства, имеет смысл лишь при условии, что $x + 1 > 0$, и причем, как основание степени оно должно быть отличным от 1, т. е. $x + 1 > 1$ или $0 < x + 1 < 1$. Из-за того, что $x + 1 > 0$, должно быть выполнено условие: $x > -1$.

Рассмотрим два случая, когда $x + 1 > 1$ и $0 < x + 1 < 1$.

1) При $x + 1 > 1$, т. е. при $x > 0$ имеем:

$$\begin{cases}(x+1)^{x^2-36} < 1,\\ x > 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}(x+1)^{x^2-36} < (x+1)^0,\\ x > 0.\end{cases}$$

Из неравенства $(x+1)^{x^2-36} < (x+1)^0$ на основании свойства показательной функции можно заключить, что $x^2 - 36 < 0$.

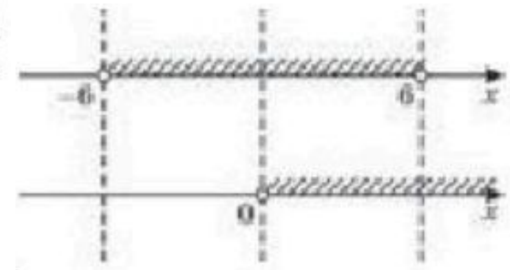
Рассмотрим систему неравенств: $\begin{cases}x^2 - 36 < 0,\\ x > 0\end{cases}$ или $\begin{cases}(x-6)(x+6) < 0,\\ x > 0.\end{cases}$

Изображая отдельно решение каждого неравенства системы на координатной прямой, определяем, что множеством решений системы является промежуток (0; 6) (рис. 66.1).

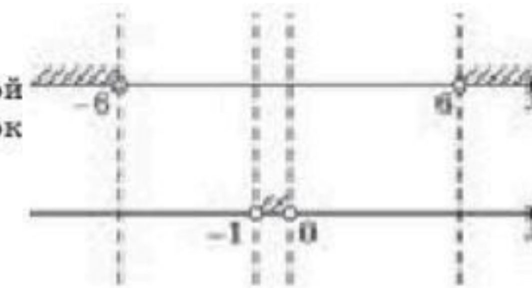
2) При $0 < x + 1 < 1$, т. е. $-1 < x < 0$,

имеем: $\begin{cases}x^2 - 36 > 0,\\ -1 < x < 0\end{cases}$ или $\begin{cases}(x-6)(x+6) > 0,\\ -1 < x < 0.\end{cases}$

Рис. 66



1)



2)

Аналогично решаем систему как в первом случае.

Из рисунка 66.2 видно, что нет ни одного значения x, удовлетворяющего одновременно неравенствам системы.

Остается заключить, что наибольшее целое x находится только на промежутке (0; 6), и оно равно 5.

Ответ: 5.

ПРИМЕР

4. Найдем наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $3^{\sqrt{x+1}+1} - 28 + 3^{2-\sqrt{x+1}} < 0$.

Решение. Введем обозначение $3^{\sqrt{x+1}} = y$, тогда исходное неравенство примет вид: $3y - 28 + \frac{9}{y} < 0$.

Обе части последнего неравенства умножим на y (при этом знак неравенства не изменится, так как y, по определению показательной функции, всегда больше нуля). Тогда получим: $3y^2 - 28y + 9 < 0$. Решая неравенство методом интервалов, получим: $\frac{1}{3} < y < 9$ (рис. 67).

Рис. 67

Следовательно, значение выражения $3^{\sqrt{x+1}}$ расположено на интервале $\left(\frac{1}{3};9\right)$.

Чтобы найти значение x, решим двойное неравенство: $\frac{1}{3} < 3^{\sqrt{x+1}} < 9$ или $3^{-1} < 3^{\sqrt{x+1}} < 3^2$. Так как $3 > 1$, следовательно, показательная функция $y = 3^x$ — возрастающая, то получаем равносильное неравенство: $-1 < \sqrt{x+1} < 2$.

По свойству арифметического корня неравенство $\sqrt{x+1} > -1$ является очевидным при $x > -1$. Остается лишь рассмотреть неравенство $\sqrt{x+1} < 2$ или $x + 1 < 4$, решив которое, имеем: $x < 3$. Учитывая область допустимых значений исходного неравенства ($x > -1$), получим окончательный результат $-1 < x < 3$.

Наибольшее целое значение x на этом промежутке: $x = 2$.

Ответ: 2.

Домашнее задание:

Краткий конспект

Решить:№25.1-25.3 (все первые номера)

Упражнения

25.1. Решите неравенства:

1) $3^x > \frac{1}{27}$;
2) $2^x < \frac{1}{8}$;
3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$;
4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{16}$;
5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} < 25$;
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 9$.

25.2. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству:

1) $5^{x-1} < 25$;
2) $3^{3-x} \geqslant 9$;
3) $6^{2x} \leqslant \frac{1}{36}$;
4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \geqslant 4$;
5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \leqslant 81$;
6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$.

25.3. Решите системы неравенств:

1) $\begin{cases} 5^x > 25, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} < \frac{1}{27}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 > \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}, \\ 3^{4x} > 81. \end{cases}$