

# ТЕМА 4.

## Элементы теории графов

# Основные разделы:

- 4.1 Основные определения и понятия
- 4.2 Способы задания графа
- 4.3 Операции над графами и их свойства
- 4.4 Деревья
- 4.5 Обходы
- 4.6 Алгоритмы на графах

Теория графов как математическая дисциплина сформировалась в середине 30-х гг. XX ст. Термин «граф» впервые появился в книге выдающегося венгерского математика Д. Кёнига в 1936 г.

При использовании понятия «граф» в математике чаще всего имеют в виду графическое определение (задание) связей между объектами произвольной природы.



Денеш Кёнинг (1884-1944)

# Применение

- Анализ и синтез цепей и систем;
- проектирование каналов связи и исследование процессов передачи информации;
- построение контактных схем и исследование конечных автоматов;
- календарное планирование промышленного производства;

# Применение

- сетевое планирование и управление;
- тактические и логические задачи, головоломки, занимательные игры;
- выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях;
- задачи идентификации в органической химии
- моделирование жизнедеятельности и нервной системы живых организмов,
- исследование связей между людьми и группами людей.

# Связь с другими разделами математики

- теория множеств,
- теория матриц,
- теория групп,
- математическая логика,
- численный анализ,
- теория вероятностей,
- топология,
- комбинаторный анализ

# 4.1 Основные определения и понятия

- Пусть  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  – непустое множество и  $E = \{ \langle v_i, v_j \rangle \}$  – набор пар элементов множества  $V$ , причем в парах могут быть одинаковые элементы и допускается повторение пар. Тогда совокупность  $(V, E)$  называется графом  $G$ . Будем обозначать этот граф как  $G(V, E)$ . Элементы множества  $V$  называются вершинами графа, а элементы множества  $E$  – ребрами.

# Основные определения и понятия

- Ребра графа могут представляться как неупорядоченными парами  $\{v_i, v_j\}$ , так и упорядоченными  $(v_i, v_j)$ . В последнем случае ребро называется ориентированным, или **дугой**,  $v_i$  – начальной вершиной (началом),  $v_j$  – конечной вершиной (концом) данной дуги. Ребро  $\{v_i, v_i\}$  и дуга  $(v_i, v_i)$  называется **петлей**.



- Граф, состоящий из вершин и соединяющих их ребер, называется **неориентированным**, а граф, состоящий из вершин и соединяющих их дуг – **ориентированным** (орграфом). Графы, содержащие как ребра, так и дуги, именуются **смешанными**.
- Геометрической интерпретацией графа является рассматриваемая в евклидовом пространстве фигура, состоящая из точек и соединяющих их линий, являющихся либо дугами эллипсов, либо отрезками прямых.
- Если все линии фигуры направлены, то это геометрическая интерпретация орграфа, если все линии ненаправленные – геометрическая интерпретация неориентированного графа.
- Геометрическая интерпретация смешанного графа

На рис. 4.1 представлена геометрическая интерпретация смешанного графа  $G(V, E)$  на плоскости, где

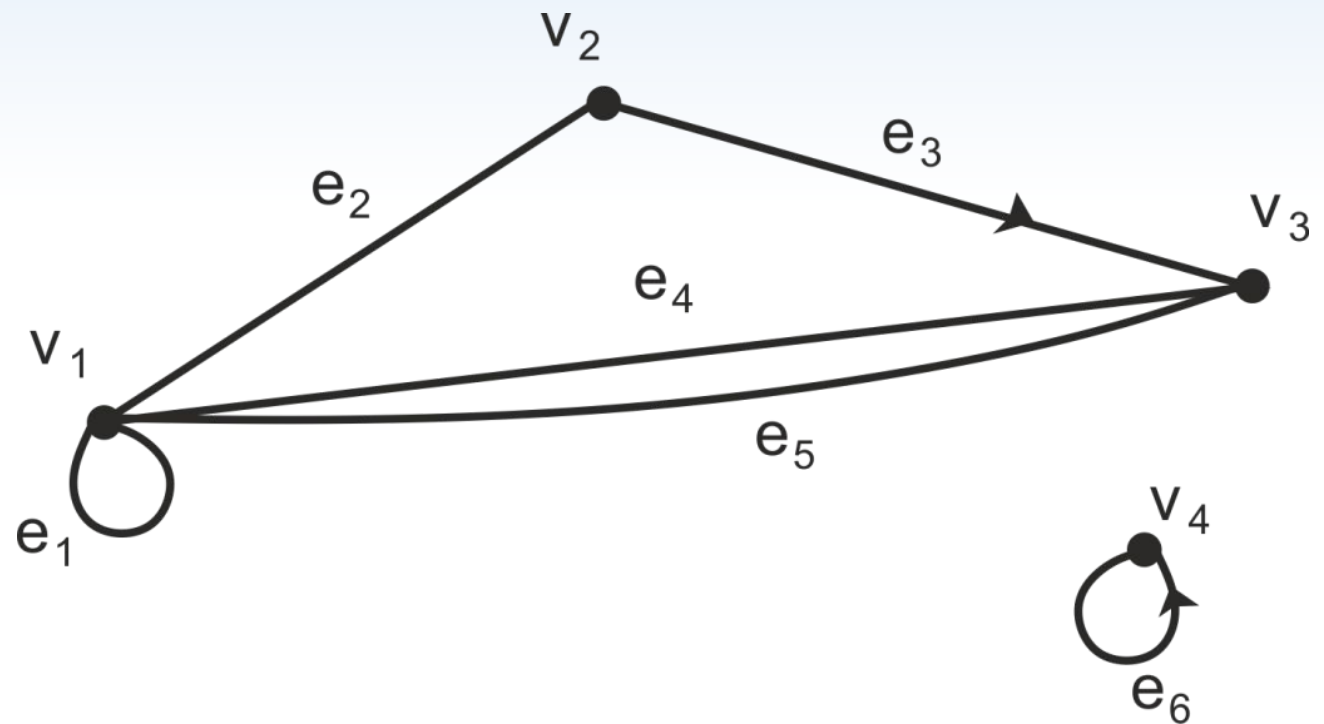
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\},$$

$$e_1 = \{v_1, v_1\}, \quad e_2 = \{v_1, v_2\},$$

$$e_3 = (v_2, v_3), \quad e_4 = \{v_1, v_3\},$$

$$e_5 = \{v_1, v_3\}, \quad e_6 = (v_4, v_4).$$



# Определения

- Одинаковые ребра (дуги), соединяющие одни и те же вершины, называются кратными или *мультиребрами*.

На рис. 4.1 ребра  $e_4$  и  $e_5$  – кратные.

Граф, содержащий кратные ребра и без петель, называется *мультиграфом*.

Граф, содержащий петли, называется *псевдографом*. На рис. 4.1 изображен смешанный псевдограф.

Граф без петель и кратных ребер называется *простым* или *обыкновенным*.

# Смежность и инцидентность

- Говорят, что ребро  $\langle v_i, v_j \rangle$  и вершина  $v_i$  (а также  $v_j$ ) **инцидентны** друг другу и эти вершины являются концами ребра  $\langle v_i, v_j \rangle$ .
- Две вершины графа называются **смежными**, если они соединены ребром. Два ребра являются **смежными**, если они имеют общую вершину.
- Дуги называются **смежными**, если конец одной из них совпадает с началом другой.

# Путь, цепь, контур

- Некоторая последовательность смежных дуг называется **путем**, а последовательность смежных ребер называется **цепью**.
- Замкнутый путь называется **контуром**, а замкнутая цепь — **циклом**
- Путь (цепь) называется **простым**, если он проходит через дуги (ребра) графа по одному разу. В противном случае путь (цепь) называется **составным**. Аналогично определяются простые контуры и циклы.
- Путь (цепь) называется **элементарным**, если он проходит через вершины графа по одному разу.

# Путь, цепь, контур

Цепь (цикл) называется *гамильтоновой*, если она проходит через все вершины графа по одному разу.

Цепь (цикл) называется *эйлеровой*, если она проходит через все ребра по одному разу. Аналогично определяются гамильтоновы и эйлеровы путь и контур.

# СВЯЗНОСТЬ

• **Подграфом** графа  $G(V, E)$  называется граф  $G'(V', E')$ , такой что  $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ . **Частичным графом** называется подграф  $G'(V', E')$  содержащий все вершины графа  $G(V, E)$ . **Связным** граф называется, если две любые его вершины можно соединить цепью. Максимальные связные подграфы графа называются его **компонентами**.

Ребро графа называется **перешейком**, если его удаление приводит к тому, что граф становится несвязным. Граф из одних перешейков называется **деревом**.

# Степень вершины графа

- **Степенью вершины** графа называют число дуг (ребер), инцидентных данной вершине. Степень обозначается  $d(v_i)$  или  $|\text{deg}(v)|$ . Для ориентированного графа различают **полустепень захода**  $d^+$  — число дуг, входящих в данную вершину, и **полустепень исхода**  $d^-$  — число дуг, выходящих из данной вершины. Степень вершины ориентированного графа составит сумма полустепеней исхода и захода.

$$d(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i).$$



# Число ребер графа

• Число ребер графа  $N$  связано со степенями его вершин следующим соотношением:

$$N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d(v_i).$$

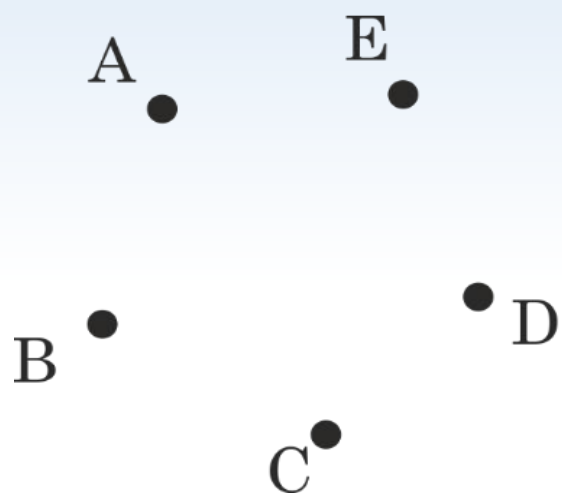
где  $n$  — число вершин графа.

Отсюда следует справедливость следующих утверждений:

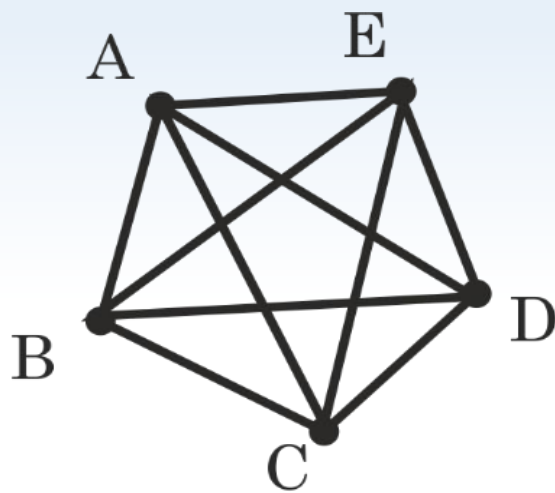
# Следствия

- сумма степеней вершин любого графа четна;
- для любого графа число вершин, имеющих нечетные степени, четно;
- для **однородного** графа, т. е. графа, все степени вершин которого одинаковы и равны  $s$ ,  
$$N = 1/2 * n * s;$$
- для **полного** графа  $K_n$ , т. е. графа, в котором каждая пара вершин соединена ребром или дугой,  
 $d(v_i) = n - 1, N = 1/2 * n(n - 1).$
- для **нуль-графа** степени всех вершин равны 0.

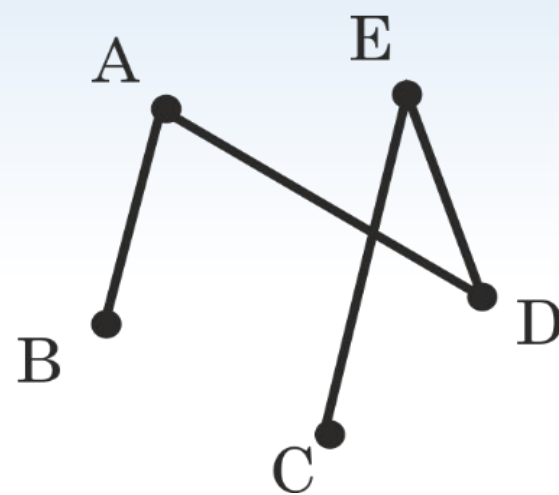
# Примеры



Нуль-  
граф



Полный граф  
 $K_5$



Дерево-  
цепь

Однородным графом является и полный двудольный граф  $K_{m,m} = G(V_1, V_2, E)$ ,  $|V_1| = |V_2| = m$ , подграфы которого  $G_1(V_1, \emptyset)$  и  $G_2(V_2, \emptyset)$  – нуль-графы и все вершины подмножеств  $V_1$  и  $V_2$  попарно соединены ребрами.  
На рисунке граф  $K_{3,3}$

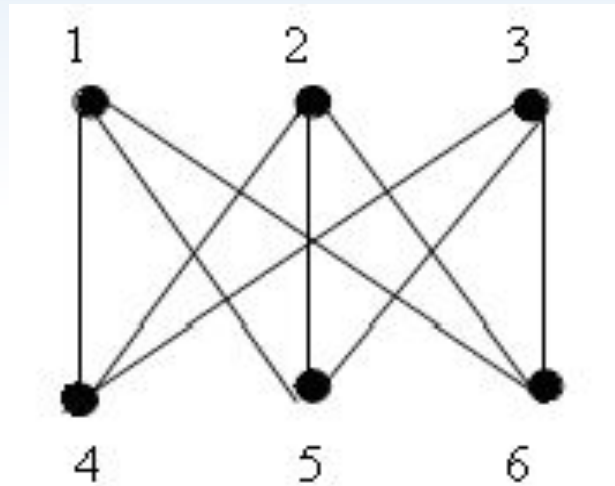


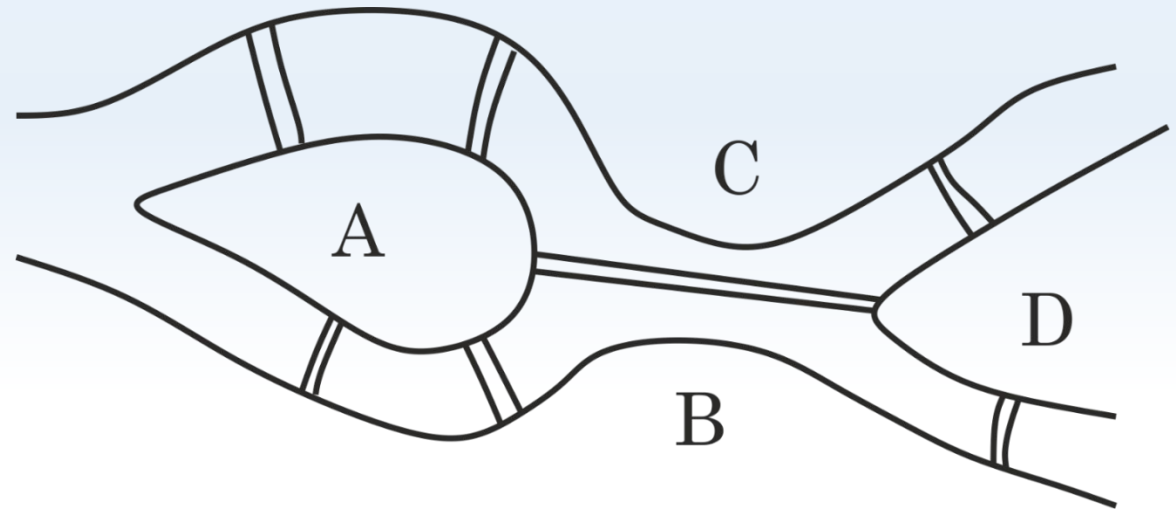
Рис.13

# Определение двудольного графа $K_{m,n} = G(V_1, V_2, E)$ ,

- Двудольный граф  $K_{m,n} = G(V_1, V_2, E)$ , - это граф  $G(V, E)$ , такой что множество  $V$  разбито на два непересекающихся подмножества  $V_1$  и  $V_2$ ,  $|V_1| = m$ ,  $|V_2| = n$ , причем всякое ребро из  $E$  соединяет вершину из  $V_1$  с вершиной из  $V_2$ . Множества  $V_1$  и  $V_2$  называются долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества  $V_1$  и  $V_2$ , то он называется полным двудольным графом.

# Эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы

- Рассмотрим *задачу о кенигсбергских мостах*, сформулированную Эйлером. Река Прегель делит г. Кенигсберг на четыре части: A, B, C, D, соединенные между собой семью мостами. Требуется определить, можно ли, выйдя из какой-либо части города, пройти по всем мостам по одному разу и вернуться в исходную часть города.



# Эйлеров цикл

**Теорема 1.** Чтобы неориентированный граф обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы он был связан, и все вершины графа имели четные степени.

Для существования эйлерова контура на ориентированном графе необходимым и достаточным условием являются связность графа и равенство полустепеней захода и исхода в каждой вершине. Очевидно, что степени вершин графа четны.

Граф, соответствующий задаче Эйлера о кенигсбергских мостах, не удовлетворяет теореме. Он не содержит эйлерова цикла.

# Эйлерова цепь

**Теорема 2.** Неориентированный граф содержит эйлерову цепь, соединяющую вершины  $A$  и  $B$  в том, и только в том случае, если граф связен, и только эти вершины  $A$  и  $B$  являются вершинами с нечетными степенями, а степени всех остальных вершин четны.



# Алгоритм построения эйлерова цикла

- 1) Выходим из произвольной вершины  $v_0$ , каждое пройденное ребро вычеркиваем.
- 2) Никогда не идти по ребру, которое в рассматриваемый момент является перешейком, а также не выбирать ребра, идущего в  $v_0$ , пока есть другие возможности.

# Гамильтонов цикл

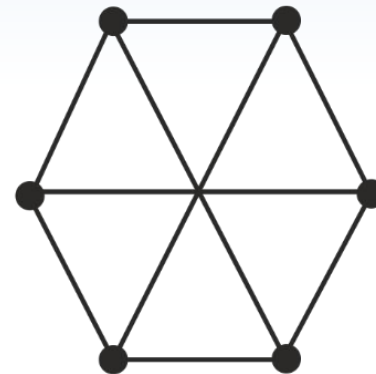
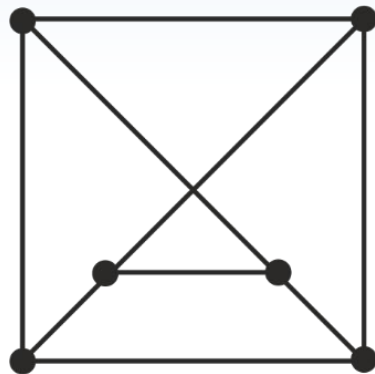
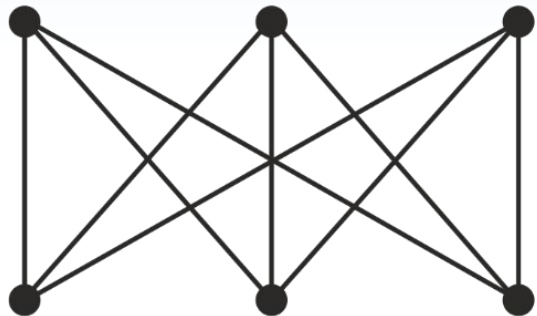
- Задача об определении гамильтоновых линий в общем виде не решена.
- К числу задач, требующих определения гамильтонова цикла, относится **задача о коммивояжере**. Бродячий торговец, предлагая товар, посещает ряд городов, причем каждый город он посещает единственный раз, после чего вновь возвращается в исходный пункт. Требуется определить кратчайший путь коммивояжера, если расстояния между городами заданы. Города можно представить как вершины связного неориентированного графа, в котором каждой паре вершин  $v_i, v_j$  приписывается расстояние  $l(v_i, v_j)$ .

# Изоморфизм графов

- Два графа  $G$  и  $H$  называются *изоморфными* (записывается  $G \cong H$ ), если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность.

Например, графы на рис. 4.4. изоморфны.

$K_{3,3}$ :



Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу.

# Свойства изоморфных графов

- Для изоморфных графов верно следующее:

$$G1 \cong G2 \Rightarrow |V(G1)| = |V(G2)|,$$

$$|E(G1)| = |E(G2)|,$$

$$\{\deg(v) | v \in V(G1)\} = \{\deg(v) | v \in V(G2)\}.$$

# Планарность. Плоские графы

Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости без пересечения ребер.

***Плоский граф*** - планарный граф, уложенный на плоскости.

# Гомеоморфизм графов

Говорят, что граф  $G' (V', E')$  получен из графа  $G (V, E)$  операцией подразделения ребра  $\langle v_i, v_j \rangle$ , если

$$V' = V \cup \{u\},$$

$$E' = E \cup \{\langle v_i, u \rangle, \langle u, v_j \rangle\} \setminus \{\langle v_i, v_j \rangle\}.$$

Два графа  $G_1$  и  $G_2$  называются гомеоморфными, если существует такой граф  $G'$ , который может быть получен как из графа  $G_1$ , так и из графа  $G_2$  операцией разбиения ребра конечное число раз.

# Теорема Понтрягина-Куратовского

**Теорема 3.** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графам  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .

# Числа, характеризующие граф

- **Цикломатическим числом графа** называется число

$\delta = N - n + q$ , где  $N$  — число ребер графа,  $n$  — число его вершин,  $q$  — число компонент связности. Для связного графа  $\delta = N - n + 1$ .

**Теорема 4.** Цикломатическое число графа равно наибольшему количеству независимых циклов.

**Следствия:**

1) Связный граф  $G$  не имеет циклов тогда и только тогда, когда  $\delta = 0$ . Такой граф есть дерево.

2) Связный граф  $G$  имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда  $\delta = 1$ .

Цикломатическое число связного графа можно определить как число ребер, которое нужно удалить, чтобы граф стал деревом.



# Хроматическое число графа

• Предположим, что каждая вершина графа  $G$  окрашена в какой-либо цвет так, что никакие две смежные вершины не окрашены одинаково. Если при этом потребовалось  $k$  красок, то граф называется хроматическим порядка  $k$ . Минимальное число  $k$ , при котором граф остается  $k$ -хроматическим, называется хроматическим числом и обозначается  $\chi$ .

# Задача о раскраске географической карты

- Задача о раскраске географической карты связана с определением хроматического числа графа. Любую географическую карту можно изобразить в виде графа  $G(V, E)$ , где вершинами являются страны, а ребрами связаны страны, граничащие между собой. Такой граф является плоским. С помощью ЭВМ доказана теорема о том, что граф, соответствующий любой географической карте, имеет хроматическое число не больше 4.

## 4.2. Способы задания графа

- 1) Графически;
- 2) На языке теории множеств;
- 3) Матричным способом;
- 4) Списками.

# Матрица смежности

- *Матрицей смежности* данного графа  $G(V, E)$  называется квадратная матрица  $A(G)$  порядка  $n$ , где  $n$  — мощность множества  $V$  ( $n = |V|$ ), элемент  $a_{ij}$  которой определяется следующим образом:

Для неориентированного графа:

$a_{ij}$  равен числу ребер, соединяющих вершины  $v_i$  и  $v_j$  (при этом петли считаем дважды).

Для ориентированного графа:

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если из вершины } v_i \text{ в } v_j \text{ выходит } k \text{ дуг} \\ 0, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ несмежны.} \end{cases}$$

# Для орграфа:

- **Полустепень исхода** вершины  $v_i$  равна сумме чисел, стоящих в  $i$ -ой строке.
- **Полустепень захода** вершины  $v_i$  равна сумме чисел, стоящих в  $i$ -ом столбце.
- **Изолированной** вершине соответствуют строка и столбец, состоящие из нулей.
- Единицы, стоящие на главной диагонали матрицы смежности орграфа, соответствуют *петлям* при данной вершине.

Сумма чисел в матрице смежности орграфа равна числу дуг орграфа.

Транспонированной матрице смежности соответствует граф с противоположной ориентацией (для орграфа).

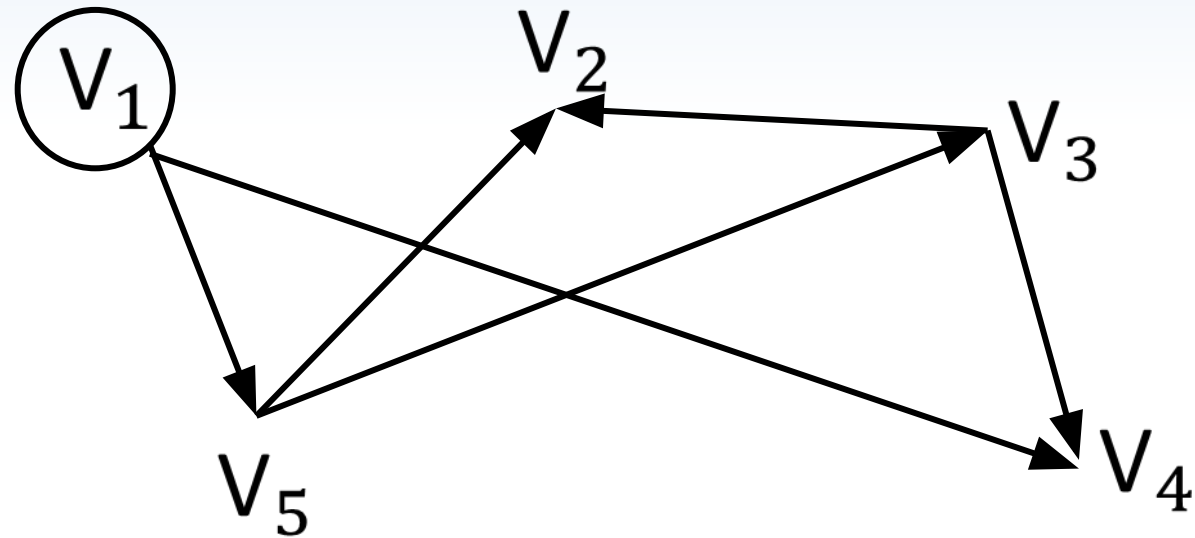
# Для неорграфа:

- Матрица смежности симметрична, сумма элементов, стоящих в  $i$ -ой строке, равна сумме элементов, стоящих в  $i$ -ом столбце, и, соответственно, степени  $i$ -ой вершины.
- Сумма чисел в матрице смежности неорграфа равна удвоенному числу ребер графа.

# Матрица смежности

• **Матрица смежности** полностью задает граф. Любая квадратная матрица, состоящая из единиц и нулей, может быть рассмотрена как матрица смежности, задающая некоторый простой граф  $G$ . Так, матрице  $M$  соответствует граф, изображенный на рисунке 4.5:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |



# Матрица инцидентности

- **Матрица инцидентности** неориентированного графа  $G(V, E)$ , — матрица  $B(G)$  порядка  $n \times m$  ( $n = |V|, m = |E|$ ), элементы которой определяются следующим образом:
  - $b_{ij} = 1$ , если  $v_i$  и  $e_j$  инцидентны;
  - $b_{ij} = 0$ , если  $v_i$  и  $e_j$  не инцидентны.



# Матрица инцидентности ориентированного графа $\vec{G}(V, \vec{E})$

— матрица  $B(\vec{G})$  порядка  $n \times m$  ( $n = |V|, m = |E|$ ),  
элементы которой определяются следующим образом:

$b_{ij} = 1$ , если  $v_i$  — начало дуги  $e_j$ ,

$b_{ij} = -1$ , если  $v_i$  — конец дуги  $e_j$ ;

$b_{ij} = 0$ , если  $v_i$  и  $e_j$  неинцидентны.

# Матрица инцидентности

- **Замечание 1.** Если граф содержит петли, то значение соответствующего элемента  $b_{ij}$  выбирается в зависимости от дальнейшего применения этой матрицы. В нашем случае, будем использовать запись  $b_{ij} = 2$  для неориентированного графа и запись  $b_{ij} = \pm 1$  для орграфа.
- **Замечание 2.** Если ребра графа пронумерованы, то  $i$ -й столбец матрицы инцидентности соответствует  $i$ -му ребру. Если ребра графа (орграфа) непомечены, то при составлении матрицы инцидентности будем придерживаться следующего правила: сначала перечисляем ребра (дуги) инцидентные (исходящие из) первой вершины в вершины ее окрестности (в порядке возрастания номеров вершин), затем из второй и т.д.

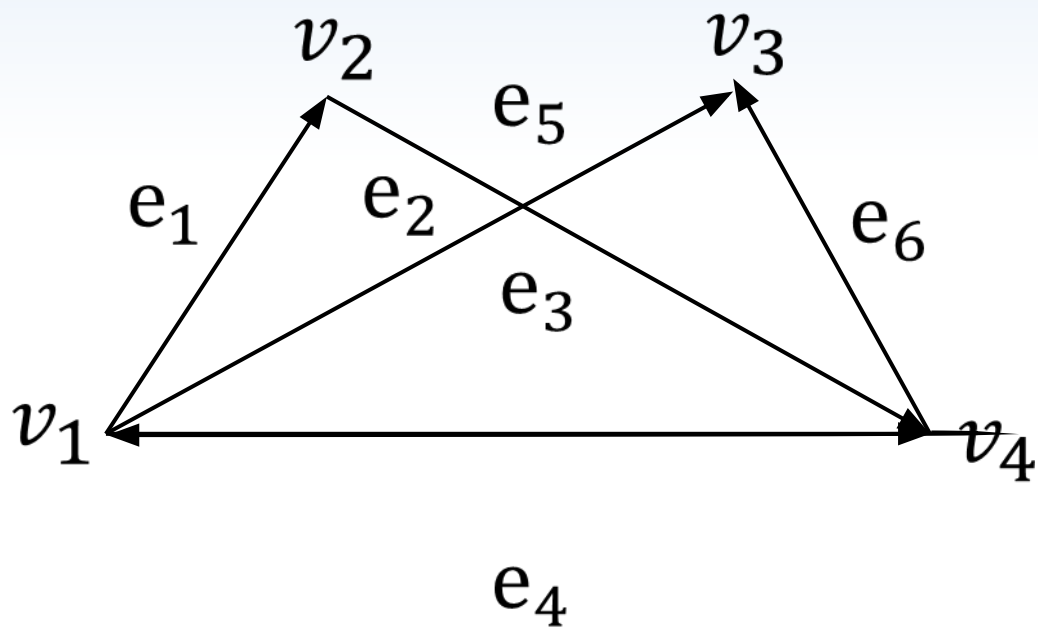
# Матрица инцидентности

- **Замечание 3.** Сумма положительных элементов в  $i$ -й строке матрицы инцидентности орграфа равна полустепени исхода  $i$ -й вершины, а сумма отрицательных элементов — полустепени захода. Для неориентированного графа сумма элементов в  $i$ -й строке равна степени  $i$ -й вершины.

# Матрица инцидентности

• **ПРИМЕР:** Напишем матрицу инцидентности для графа, изображенного на рис 4.6.

Для этого пронумеруем дуги:  $e_1, e_2, \dots, e_6$ , матрица инцидентности будет иметь следующий вид:



$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Задание списком смежностей

$V_1 : V_2', V_3', V_4$

$V_2 : V_4$

$V_3 :$

$V_4 : V_1', V_3$

# Задание списком инцидентностей (ребер)

$e_1 : v_{1'}, v_2$

$e_2 : v_{1'}, v_3$

$e_3 : v_{1'}, v_4$

$e_4 : v_{4'}, v_1$

$e_5 : v_{2'}, v_4$

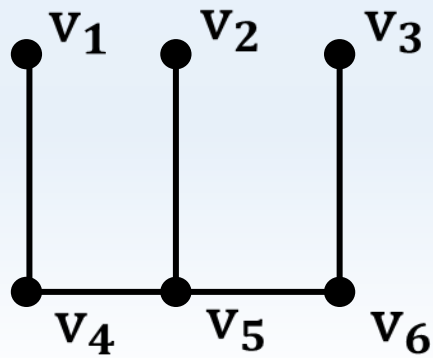
$e_6 : v_{4'}, v_3$

## 4.3 Операции на графах и их свойства

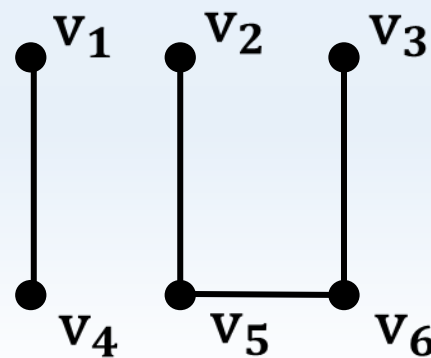
1. Удаление ребра;
2. Удаление вершины;
3. Добавление вершины;
4. Добавление ребра;
5. Отождествление вершин;
6. Стягивание ребра;
7. Размножение вершины;
8. Расщепление вершины;
9. Дублирование вершины;
10. Разбиение ребра (гомеоморфизм);
11. Дополнение графов;
12. Объединение графов;
13. Пересечение графов;
14. Соединение графов;
15. Композиция графов;
16. Произведение графов.

# 1-4 Операции добавления и удаления

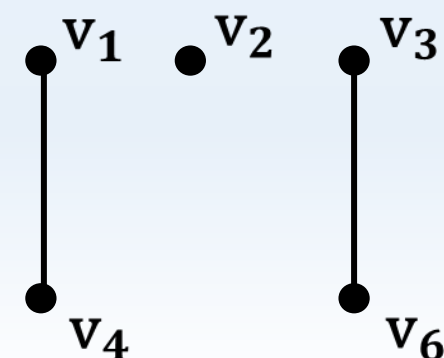
- Граф  $G$  и графы, полученные применением к  $G$  операций удаления и добавления: удаление ребра  $(v_4, v_5)$ ; удаление вершины  $v_5$ ; добавление вершины  $v_7$ ; добавление ребра  $(v_2, v_3)$ .



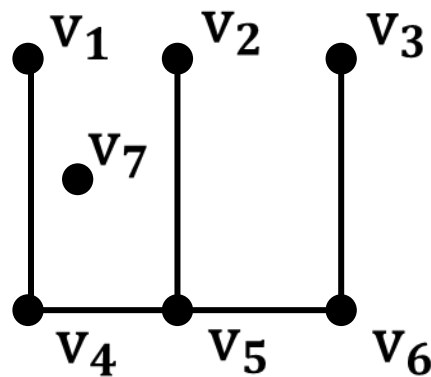
$G$



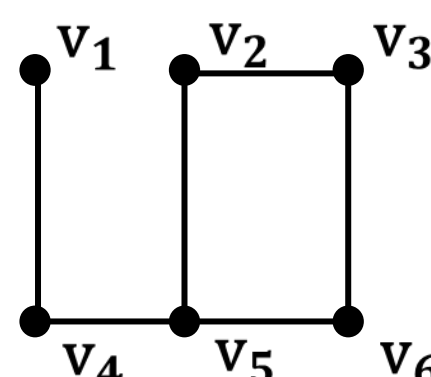
$G_1$



$G_2$



$G_3$



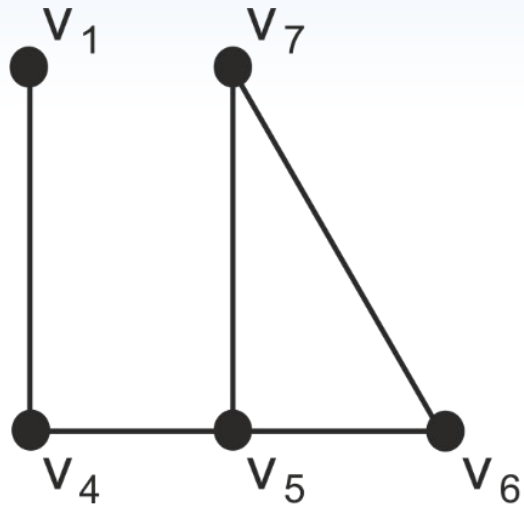
$G_4$



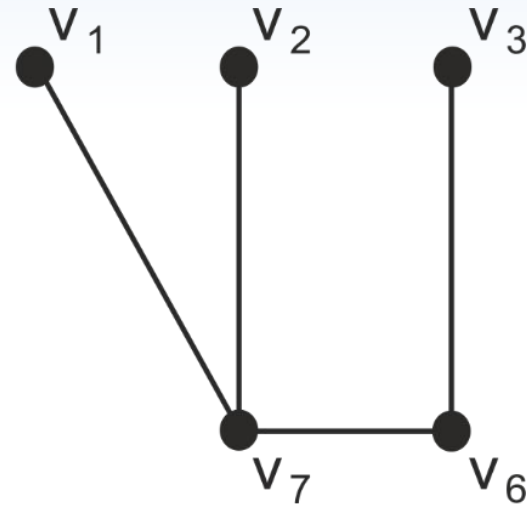
# 5-6 Операция отождествления вершин

- *Отождествление вершин  $u, v$* : удалим их, добавим новую вершину  $w$  и ребра  $(w, v_i)$  вместо ребер  $(u, v_i)$  и  $(v, v_i)$ .

Графы, полученные применением к  $G$  операций отождествление вершин  $v_2, v_3$  и стягивание ребра  $(v_4, v_5)$ .



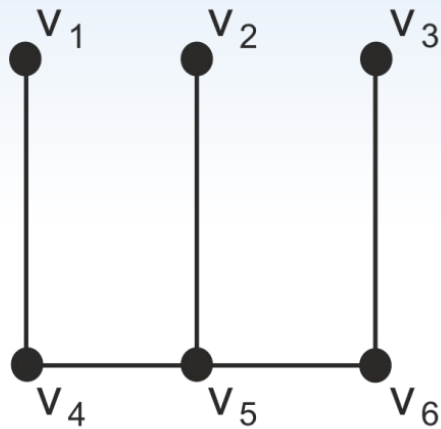
$G_5$



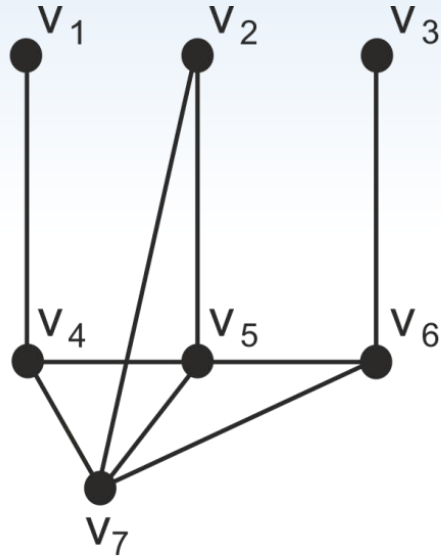
$G_6$

# Операции на графах 7-9

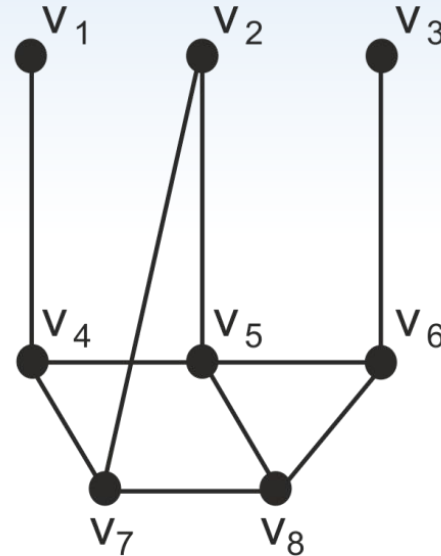
- Размножение вершины  $v_5$  графа  $G$ , расщепление вершины  $v_7$  графа  $G_7$ , дублирование вершины  $v_7$  графа  $G_7$  (графы  $G_7$ ,  $G_8$  и  $G_9$  соответственно).



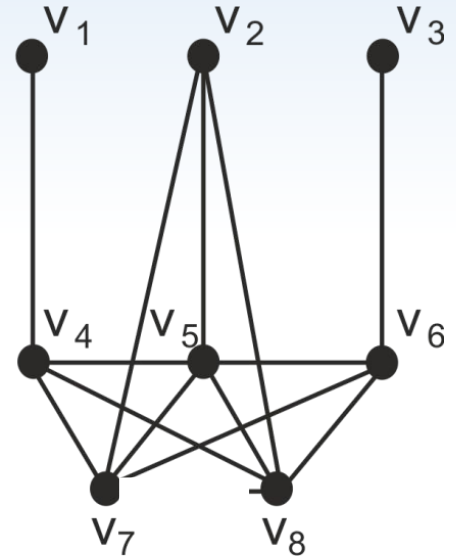
$G$



$G_7$



$G_8$



$G_9$

# Операции на графах 7-9

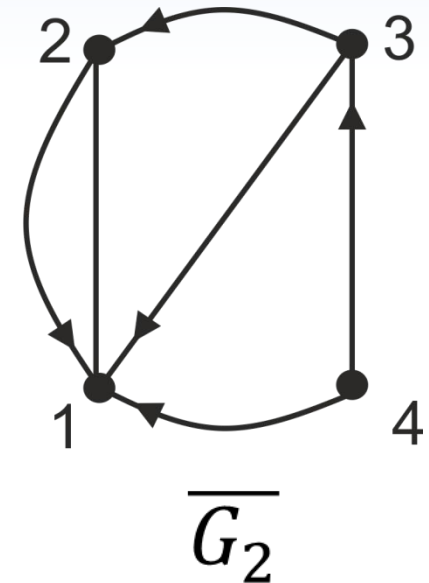
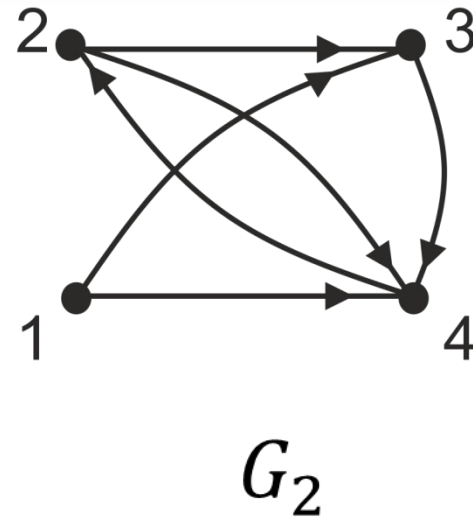
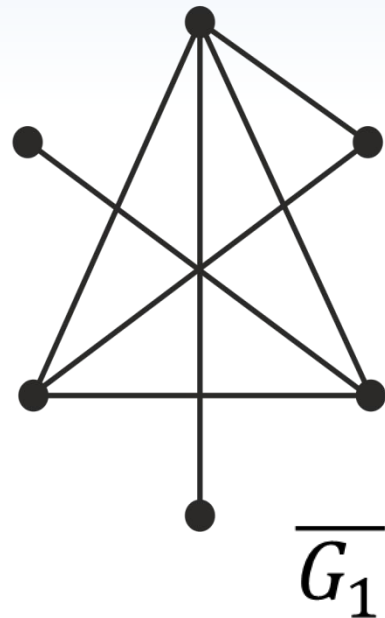
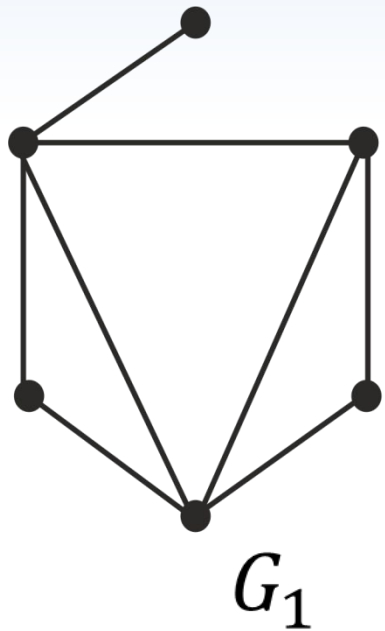
- *Размножение вершины  $v$* : добавим новую вершину  $u$ , новое ребро  $(v, u)$ , новые ребра  $(u, v_i)$ , где  $v_i \in \Gamma(v)$ .

*Расщепление вершины  $v$* :  $\Gamma(v) = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ; удалим  $v$ , добавим  $u$  и  $w$ , добавим  $(u, v_i)$ , где  $v_i \in \Gamma_1$ , и  $(w, v_i)$ , где  $v_i \in \Gamma_2$ , и ребро  $(u, w)$ .

*Дублирование вершины  $v$* : добавим вершину  $u$  и ребра  $(u, v_i)$ , где  $v_i \in \Gamma(v)$ .

# 11 - Дополнение графов

Пусть  $G (V, E)$  – обыкновенный граф. Дополнение графа  $\bar{G}$  (также обыкновенный граф) имеет в качестве множества вершин множество  $V$ . Любые две несовпадающие вершины в  $\bar{G}$  смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в  $G$ . На рисунке изображены графы  $G_1$  и  $G_2$  и их дополнения  $\bar{G}_1$  и  $\bar{G}_2$  соответственно.



# Дополнение графов

**Теорема 5.** Пусть  $G$  – обыкновенный граф с матрицей смежности вершин  $A$ . Тогда матрицей смежности вершин графа  $\overline{G}$  является матрица  $\overline{A}$ , образованная поэлементным логическим отрицанием матрицы  $A$  за исключением диагональных элементов, которые остаются нулевыми.

*Пример 1.* Матрицы смежности вершин  $A$  графа  $G_2$  и графа , изображенных на рис., имеют вид:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\overline{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

# Объединение графов-12

- Пусть  $G_1(V_1, E_1)$  и  $G_2(V_2, E_2)$  – произвольные графы. Объединением  $G_1 \cup G_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$  называется граф с множеством  $V = V_1 \cup V_2$  и множеством ребер  $E = E_1 \cup E_2$ .

Операция объединения графов может быть выполнена в матричной форме.

# Объединение графов

**Теорема 6.** Пусть  $G_1(V_1, E_1)$  и  $G_2(V_2, E_2)$  – два графа (ориентированные или неориентированные одновременно), и пусть  $A_1$  и  $A_2$  – матрицы смежности вершин этих графов. Тогда матрицей смежности вершин графа  $G(V, E) = G_1 \cup G_2$  является матрица  $A$ , полученная поэлементным взятием максимального элемента вспомогательных матриц  $A_1'$  и  $A_2'$ .

Матрицы  $A_i', i = 1, 2$ , получаются из  $A_i$  с помощью добавления нулевых строк и столбцов, соответствующих вершинам, отсутствующим в  $V_i$ , но присутствующим в  $V = V_1 \cup V_2$ .

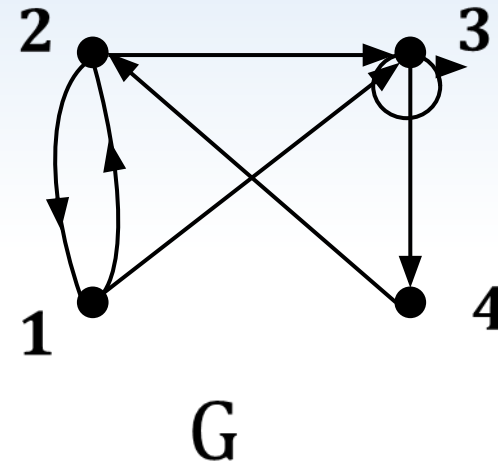
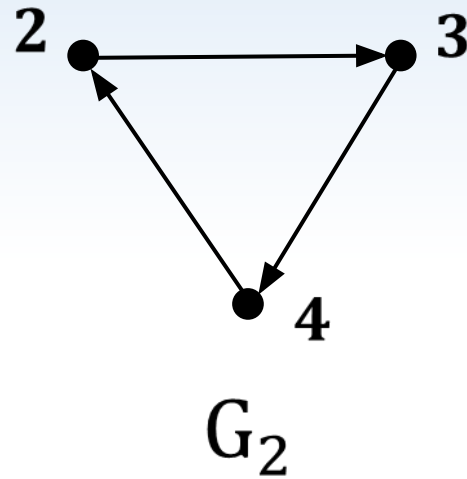
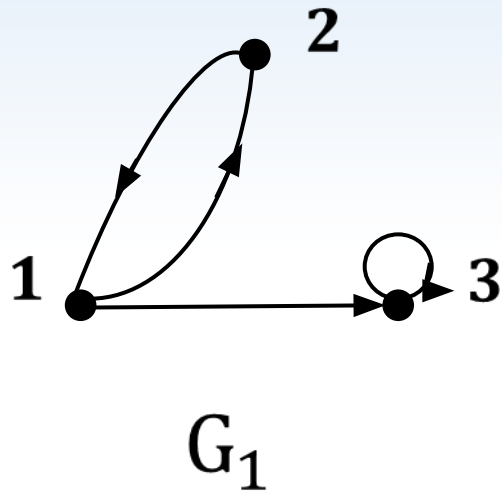


# Объединение графов

- **Следствие** . Если элементы матриц смежности вершин  $A_1$  и  $A_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$  принимают только значения 0 и 1, то операция взятия максимального элемента для нахождения матрицы смежности вершин графа  $G_1 \cup G_2$  соответствует логической сумме элементов.

# ПРИМЕР 2

На рисунке приведены графы  $G_1$  и  $G_2$  и их объединение  $G = G_1 \cup G_2$ .



## ПРИМЕР 2 (продолжение)

Матрицы смежности вершин графов:

$$A_1 = \begin{array}{c} \phantom{1} \phantom{2} \phantom{3} \\ \phantom{1} \phantom{2} \phantom{3} \\ 1 \phantom{2} \phantom{3} \\ 2 \phantom{2} \phantom{3} \\ 3 \phantom{2} \phantom{3} \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{c} \phantom{2} \phantom{3} \phantom{4} \\ \phantom{2} \phantom{3} \phantom{4} \\ 2 \phantom{3} \phantom{4} \\ 3 \phantom{3} \phantom{4} \\ 4 \phantom{3} \phantom{4} \end{array} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

# ПРИМЕР 2 (продолжение) $V = V_1 \cup V_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

матрицы смежности вершин вспомогательных графов  $G_1'$  и  $G_2'$  и графа  $G$ :

$$A_1' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$A_2' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

# 13- Пересечение графов

- Пусть  $G_1(V_1, E_1)$  и  $G_2(V_2, E_2)$  – произвольные графы.

**Пересечением**  $G_1 \cap G_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$  называется граф с множеством  $V = V_1 \cap V_2$  и множеством ребер  $E = E_1 \cap E_2$ .

$$G_1(V_1, E_1) \cap G_2(V_2, E_2) = G(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2).$$

Операция пересечения графов может быть выполнена в матричной форме.

# Пересечение графов

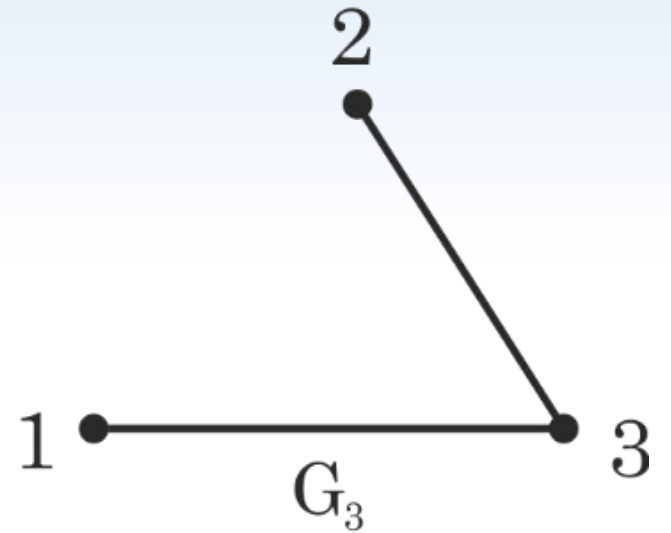
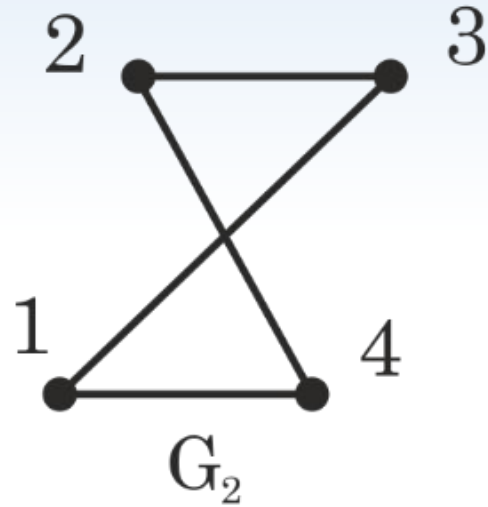
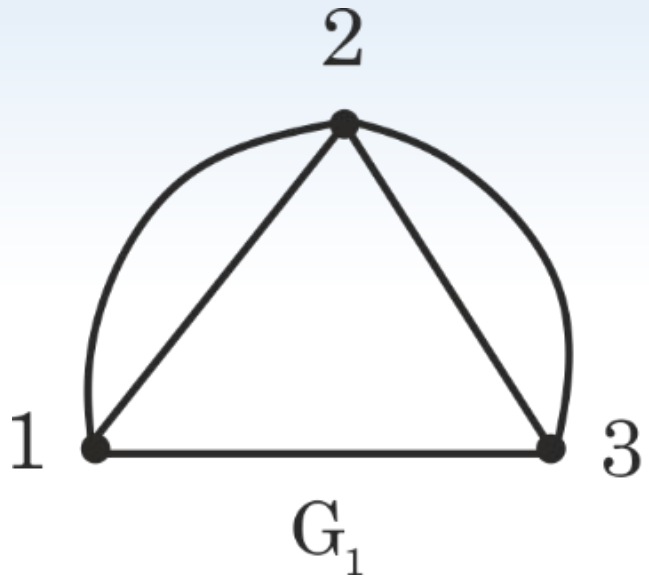
- **Теорема 7.** Пусть  $G_1(V_1, E_1)$  и  $G_2(V_2, E_2)$  – два графа (ориентированные или неориентированные одновременно), и пусть  $A_1$  и  $A_2$  – матрицы смежности вершин этих графов. Тогда матрицей смежности вершин графа  $G(V, E) = G_1 \cap G_2$  является матрица  $A$ , полученная поэлементным взятием минимума вспомогательных матриц  $A_1'$  и  $A_2'$ . Матрицы  $A_i'$ ,  $i = 1, 2$ , получаются из  $A_i$  с помощью удаления строк и столбцов, соответствующих вершинам, не вошедшим в  $V = V_1 \cap V_2$ .

# Пересечение графов

- **Следствие 2.** Если элементы матриц смежности вершин  $A_1$  и  $A_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$  принимают только значения 0 и 1, то операция взятия минимального элемента для нахождения матрицы смежности вершин  $A$  графа  $G = G_1 \cap G_2$  соответствует логическому (обычному) произведению элементов.

# ПРИМЕР 3

На рисунке представлены графы  $G_1$  и  $G_2$  и их пересечение  $G = G_1 \cap G_2$ .





# ПРИМЕР 3 (продолжение)

- Матрицы смежности вершин исходных графов:

$$A_1 = \begin{array}{c} \phantom{1} \phantom{2} \phantom{3} \\ 1 \phantom{2} \phantom{3} \\ 2 \phantom{3} \\ 3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{c} \phantom{1} \phantom{2} \phantom{3} \phantom{4} \\ 1 \phantom{2} \phantom{3} \phantom{4} \\ 2 \phantom{3} \phantom{4} \\ 3 \phantom{4} \\ 4 \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

# ПРИМЕР 3 (продолжение) $V = V_1 \cap V_2 = \{1, 2, 3\}$ .

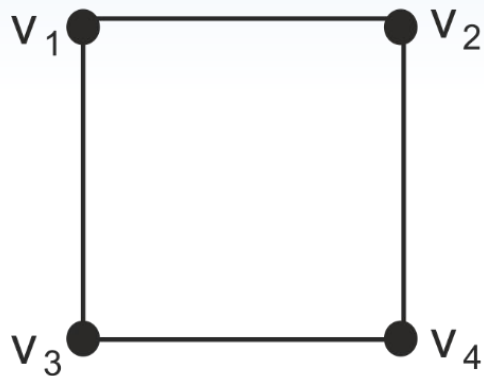
- Матрицы смежности вершин вспомогательных графов  $G_1'$  и  $G_2'$  и графа  $G$  :

$$A_1' = A_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

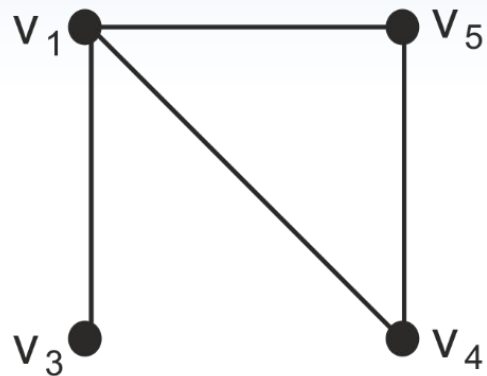
$$A_2' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

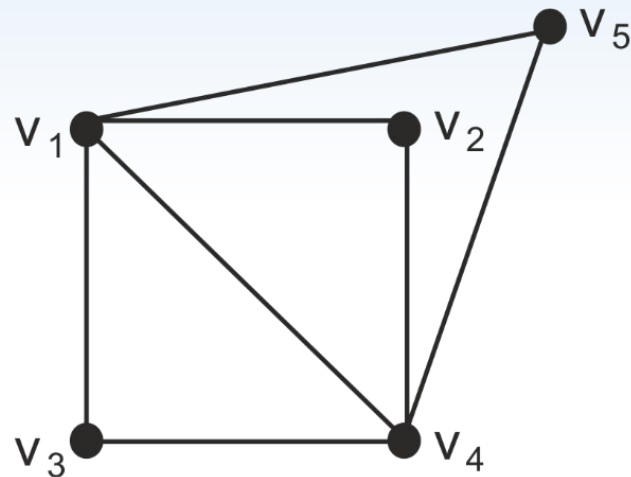
• **ПРИМЕР:** На рисунке представлены графы  $G_1$ ,  $G_2$ , с применением операций объединения  $G_1 \cup G_2$  и пересечения  $G_1 \cap G_2$ .



$G_1$



$G_2$



$G_1 \cup G_2$



$G_1 \cap G_2$

# 14- Соединение графов

$$G_1(V_1, E_1) + G_2(V_2, E_2) =$$

$$= G_1(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{(v_i, v_j) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}),$$

при условии, что  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ .

# Соединение графов

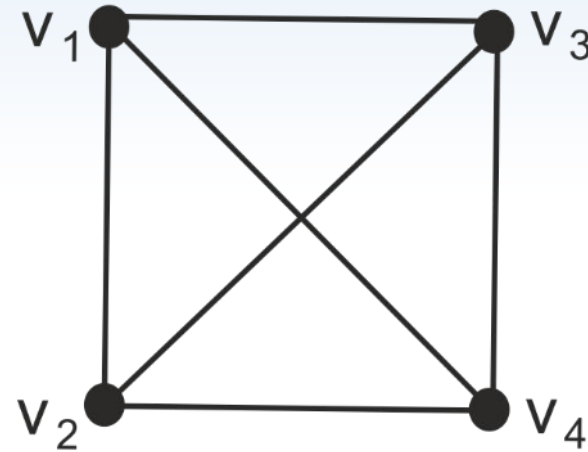
• **ПРИМЕР 4:** На рисунке представлены графы  $G_1$ ,  $G_2$  и граф  $G_1 + G_2$ , полученный в результате их соединения.



$G_1$



$G_2$



$G_1 + G_2$

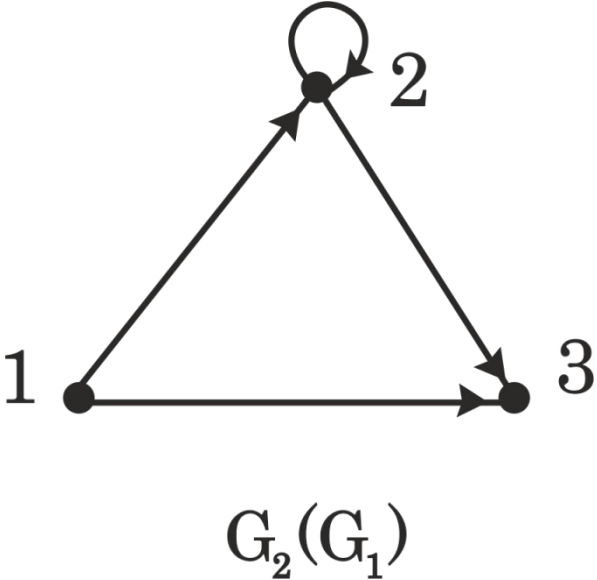
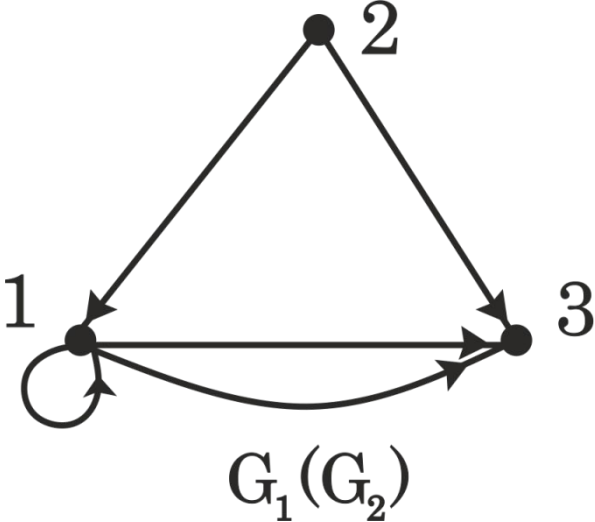
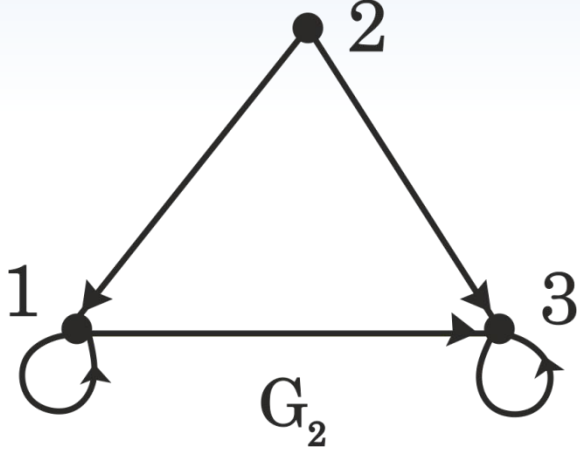
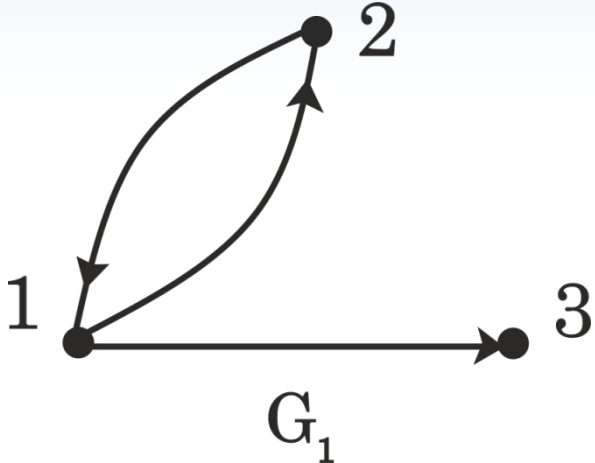
# 15- Композиция графов

• Пусть  $G_1(V, E_1)$  и  $G_2(V, E_2)$  – два ориентированных графа с одними и теми же множествами вершин  $V$ . Композицией  $G_1 \circ G_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$  называется ориентированный граф с множеством вершин  $V$ , в котором существует дуга  $(v_i, v_j)$  тогда и только тогда, когда для некоторой вершины  $u \in V$  существуют дуги  $(v_i, u) \in E_1$  и  $(u, v_j) \in E_2$ .

# Композиция графов

**Теорема 8.** Пусть  $G_1(V, E_1)$  и  $G_2(V, E_2)$  – два ориентированных графа с матрицами смежности вершин  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Тогда матрицей смежности вершин графа  $G(V, E) = G_1 \circ G_2$  является матрица  $A = A_1 \cdot A_2$ .

ПРИМЕР 5: На рисунке представлены графы  $G_1$ ,  $G_2$  и их композиции  $G_1 \circ G_2$  и  $G_2 \circ G_1$ .





# ПРИМЕР 5: Представление в табличной форме (списком дуг)

| $G_1$ | $G_2$ |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| (1,2) | (1,1) | (1,1) | (1,2) |
| (1,3) | (1,3) | (1,3) | (1,3) |
| (2,1) | (2,1) | (1,3) | (2,2) |
|       | (2,3) | (2,1) | (2,3) |
|       | (3,3) | (2,3) |       |

## Пример 5 Матрицы смежности вершин исходных графов

$$A_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## Пример 5

• Находим произведения матриц  $A_{12} = A_1 \cdot A_2$  и  $A_{21} = A_2 \cdot A_1$ , которые соответствуют матрицам смежности графов

$G_1 \circ G_2$  и  $G_2 \circ G_1$ .

$$A_{12} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2(1) \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$A_{21} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

## 16- Декартово произведение графов

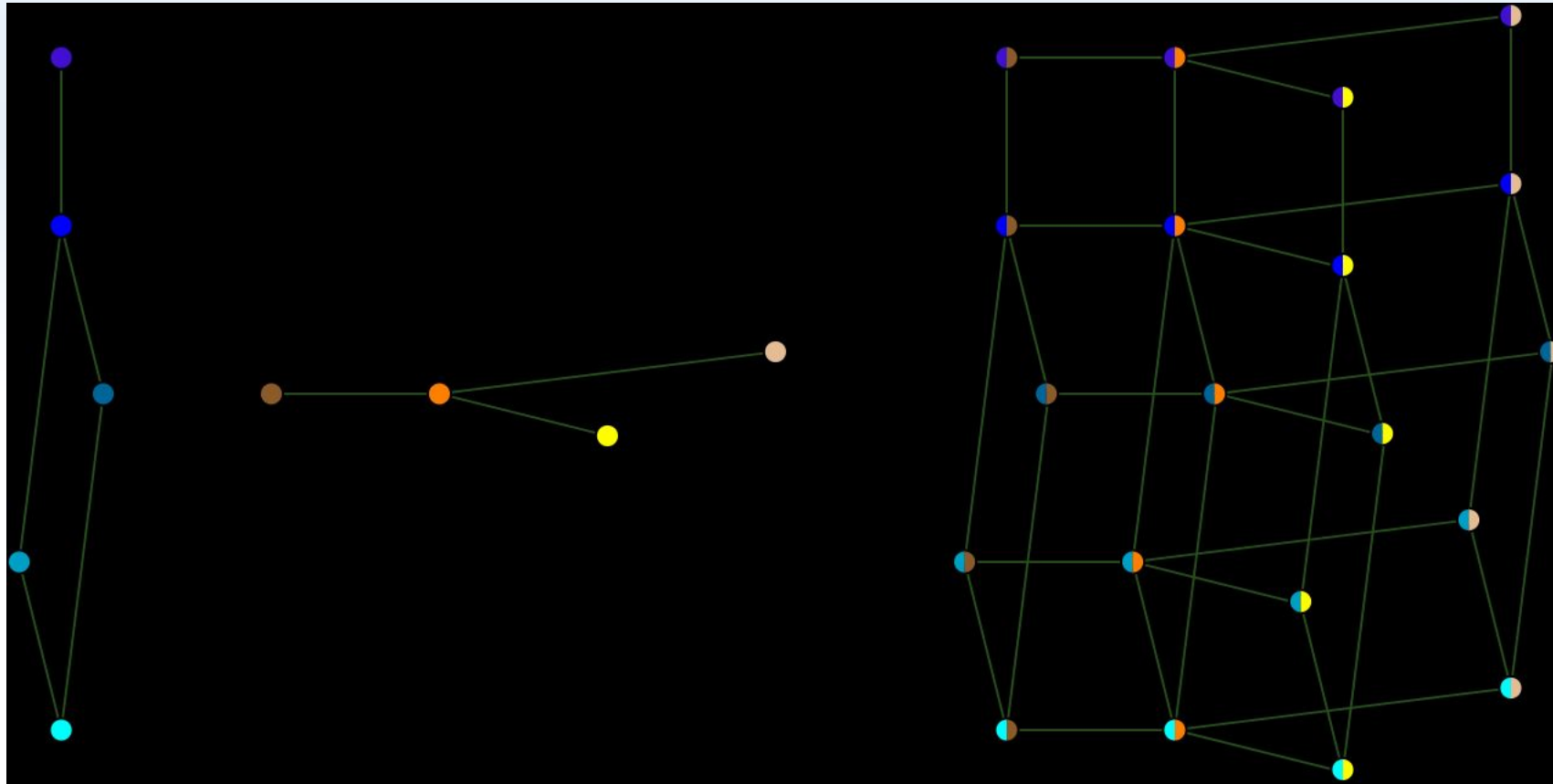
$$G = G_1 \square G_2$$

- $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$
- Любые две вершины  $(u, u')$  и  $(v, v')$  смежны в  $G$  тогда и только тогда, когда либо  $u = v$  и  $u'$  смежна  $v'$  в  $G_2$  либо  $u' = v'$  и  $u$  смежна  $v$  в  $G_1$ .

# 16- Декартово произведение графов

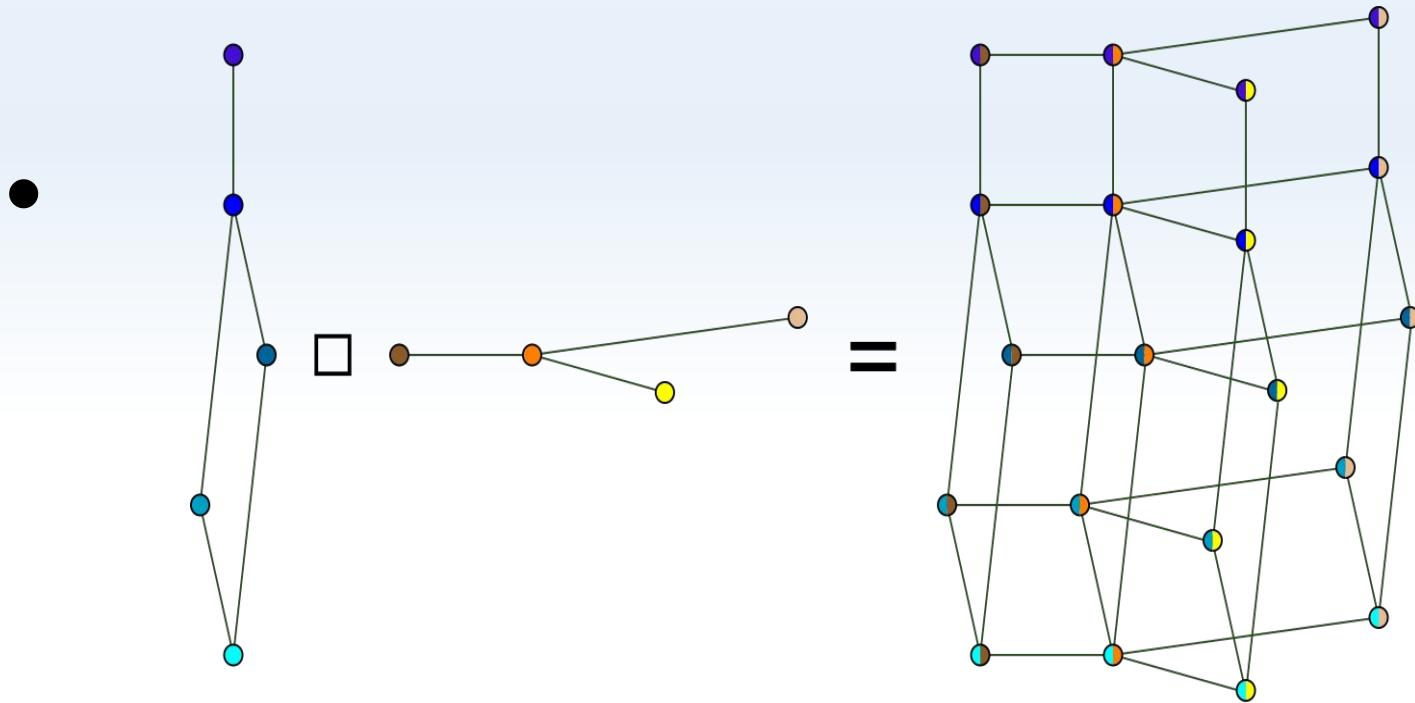
$$G = G_1 \square G_2$$

•



# 16- Декартово произведение графов

$$G = G_1 \square G_2$$



## 4.4 Деревья

Неориентированный граф с числом вершин  $n > 1$  называется **деревом**, если он связан и не содержит циклов.

Деревья являются в некотором смысле простейшим классом графов. Для них выполняются многие утверждения, которые не всегда выполняются для графов в общем случае.

На основании деревьев строятся различные структуры данных, используемые для создания эффективных алгоритмов.

# Ориентированные деревья

*Ориентированным деревом* (ордеревом, или корневым деревом) называется орграф со следующими свойствами:

1. Существует единственный узел  $r$ , полустепень захода которого равна  $0$ ,  $d^+(r) = 0$ . Он называется **корнем** ордерева.
2. Полустепень захода всех остальных узлов равна  $1$ ,  $d^+(v) = 1$ .
3. Каждый узел достижим из корня.



**Теорема 9.** Для графа  $G$ , имеющего  $n$  вершин ( $n > 1$ ), равносильны следующие свойства:

- 1)  $G$  связен и не содержит циклов;
- 2)  $G$  не содержит циклов и имеет  $(n - 1)$  ребро;
- 3)  $G$  связен и имеет  $(n - 1)$  ребро;
- 4)  $G$  не содержит циклов, но добавление ребра между любыми его вершинами приводит к образованию цикла;
- 5)  $G$  связен и все его ребра являются перешейками;
- 6) Всякая пара вершин  $G$  соединена только одной цепью.

*Доказательство* этой теоремы можно провести, показав цепочку следствий  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ .

Если граф  $G$  связан и не имеет циклов, то цикломатическое число  $\delta = N - n + 1 = 0$ , откуда  $N = n - 1$ , т.е.  $G$  не содержит циклов и имеет  $(n - 1)$  ребро (**1**  $\rightarrow$  **2**).

Если  $G$  не имеет циклов, то  $\delta = 0$ , причем  $N = n - 1$ , т.е.  $\delta = N - n + q = 0$ , откуда получаем  $q = 1$ , т.е.  $G$  связан и имеет  $(n - 1)$  ребро (**2**  $\rightarrow$  **3**).

*Доказательство (продолжение)*

Если  $G$  связан и имеет  $(n - 1)$  ребро, то  $q = N - n + 1$ ,  $N = n - 1$ . Отсюда  $\delta = 0$ , т.е.  $G$  не содержит циклов. Если добавить одно ребро, получим связный граф  $G'$  с числом ребер  $N' = n$ . Цикломатическое число этого графа  $\delta' = n - n + 1 = 1$ , т.е.  $G'$  содержит один цикл (**3**  $\rightarrow$  **4**).

## Доказательство (продолжение)

Если  $G$  не содержит циклов, но добавление одного ребра ведет к образованию цикла, то  $G$  связен, так как в противном случае в графе  $G$  должны существовать две вершины  $v_i$  и  $v_j$ , не соединенные никакой цепью и такие, что добавление ребра  $(v_i, v_j)$  не привело бы к образованию цикла.

Все ребра графа являются перешейками, т.к. удаление любого из них приводит к графу  $G'$ , для которого  $\delta' = N - n + q = 0$ , причем  $N' = N - 1 = n - 2$  и, следовательно,  $q = 2$ , т.е.  $G'$  не является связным (4  $\rightarrow$  5).

## Доказательство (продолжение)

Если  $G$  связан, то всякая пара его вершин соединена цепью. В силу того, что все ребра  $G$  являются перешейками, существует единственная цепь, соединяющая любую пару вершин  $v_i, v_j$ , т.к. в противном случае удаление ребра  $(v_i, v_j)$  не нарушило бы связности графа  $G$  (**5**  $\rightarrow$  **6**).

Если всякая пара вершин  $G$  соединена цепью, то  $G$  связан. Так как такая цепь единственная,  $G$  не содержит циклов: если бы  $G$  содержал циклы, то в нем нашлась бы пара вершин  $v_i, v_j$ , соединенная более чем одной цепью (**6**  $\rightarrow$  **1**), что и требовалось доказать.

- Несвязный граф, компонентами связности которого являются деревья, называется ***лесом***.

**Теорема 10.** Граф  $G(V, E)$  тогда и только тогда содержит частичный граф, являющийся деревом, когда он связан.

# Доказательство

- на основе свойства б предыдущей теоремы каждая пара его вершин может быть соединена цепью.
- Если граф  $G$  не содержит циклов, то он сам является деревом по определению.
- Предположим, что  $G$  содержит цикл  $\mu$ . Вычеркнем из  $\mu$  любое ребро. Получившийся частичный граф  $G_1$ , будет связным, т.к. удаление из цикла любого ребра не нарушает связности графа.

Если  $G_1$  – дерево, доказательство закончено.

Если  $G_2$  не имеет циклов, то он есть дерево и доказательство закончено.

Через несколько шагов получим связный граф без циклов, т.е. дерево, являющееся подграфом исходного графа  $G$ .



# Задача о нефтепроводе (минимальном остовном дереве)

## Постановка задачи

Предположим, что имеется  $n$  городов, которые нужно соединить нефтепроводом (электролинией, газопроводом). Стоимость строительства нефтепровода между городами  $v_i, v_j$  задана.

Как построить самый дешевый нефтепровод, связывающий все города?

## Задача о нефтепроводе: построение графа

- Построим граф, вершинами которого обозначены города, а ребрами возможные нефтепроводы между ними.

Каждому ребру графа  $(v_i, v_j)$  поставим в соответствие число  $l(v_i, v_j)$ , равное стоимости строительства нефтепровода на участке  $(v_i, v_j)$ .

Задача строительства самого дешевого нефтепровода сводится к следующей задаче на графе.

## Задача о нефтепроводе: графическая задача

• Задан конечный неориентированный связный граф  $G(V, E)$ , каждому ребру которого  $(v_i, v_j) = e$  поставлено в соответствие число  $l(e) > 0$ , называемое длиной ребра.

Требуется найти такой частичный граф-дерево графа  $G$  (частичное дерево), общая длина ребер которого минимальна.

## Алгоритм Краскала (жадный)

1. Выбираем самое короткое ребро графа  $e_1$ , затем самое короткое из оставшихся ребро  $e_2$ .
2. Из оставшихся ребер выбираем самое короткое ребро  $e_3$  так, чтобы оно не образовывало цикла с выбранными ребрами.
3. Продолжаем эту процедуру. На  $k$ -м шаге к выбранным ребрам  $e_1, \dots, e_{k-1}$  добавляем самое короткое ребро из оставшихся  $|E| - (k - 1)$  ребер так, чтобы оно не образовывало цикла с выбранными ребрами.
4. При  $k = n - 1$  процесс заканчивается. Получим граф без циклов с  $(n - 1)$ -м ребром. На основании теоремы 6 (пункт 2) построенный граф есть дерево.

# Алгоритм Прима (алгоритм ближайшего соседа)

*Идея алгоритма.* На каждом шаге алгоритма будем достраивать остовное дерево  $T(V_T, E_T)$  следующим образом: к множеству ребер уже построенного дерева добавляем ребро минимального веса, один конец которого находится в множестве  $V_T$ , а второй — в множестве  $V \setminus V_T$ .

# Алгоритм Прима (алгоритм ближайшего соседа)

Шаг 0.  $V_T := \emptyset; E_T := \emptyset;$

Шаг 1. Выбираем в графе произвольную вершину  $u$  и инцидентное ей ребро минимального веса:  $(u, v) \in E \mid w(u, v) = \min \{w(u, v_i)\}, v_i \in V.$

Тогда  $V_T := \{u, v\}, E_T := \{(u, v)\}.$

Шаг 2. Из всех ребер, инцидентных только одной вершине из дерева  $T$ , выбираем ребро минимального веса

$(u, v) \in E \mid w(u, v) = \min \{w(u, v)\},$  где  $u \in V_T, v \in V \setminus V_T.$

Тогда  $V_T := V_T \cup \{v\}, E_T := E_T \cup \{(u, v)\}.$

Если  $|V_T| = n$ , то алгоритм заканчивает работу, иначе — возвращаемся на начало шага 2.