ТЕМА 4.
Элементы теории графов

Основные разделы:

4.1 Основные определения и понятия

4.2 Способы задания графа

4.3 Операции над графами и их свойства

4.4 Деревья

4.5 Обходы

4.6 Алгоритмы на графах

Теория графов как математическая дисциплина сформировалась в середине 30-х гг. XX ст. Термин «граф» впервые появился в книге выдающегося венгерского математика Д. Кёнига в 1936 г.

При использовании понятия «граф» в математике чаще всего имеют в виду графическое определение (задание) связей между объектами произвольной природы.

Денеш Кёнинг (1884-1944)

Применение

- Анализ и синтез цепей и систем;
- проектирование каналов связи и исследование процессов передачи информации;
- построение контактных схем и исследование конечных автоматов;
- календарное планирование промышленного производства;

Применение

- сетевое планирование и управление;
- тактические и логические задачи, головоломки, занимательные игры;
- выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях;
- задачи идентификации в органической химии
- моделирование жизнедеятельности и нервной системы живых организмов,
- исследование связей между людьми и группами людей.

Связь с другими разделами математики

- теория множеств,
- теория матриц,
- теория групп,
- математическая логика,
- численный анализ,
- теория вероятностей,
- топология,
- комбинаторный анализ

4.1 Основные определения и понятия

-

Пусть $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – непустое множество и $E = \{< v_i, v_j >\}$ – набор пар элементов множества V, причем в парах могут быть одинаковые элементы и допускается повторение пар. Тогда совокупность (V, E) называется графом G. Будем обозначать этот граф как $G(V, E)$. Элементы множества V называются вершинами графа, а элементы множества E – ребрами.

Основные определения и понятия

- Ребра графа могут представляться как неупорядоченными парами $\{v_i, v_j\}$, так и упорядоченными (v_i, v_j). В последнем случае ребро называется ориентированным, или ***дугой***, v_i – начальной вершиной (началом), v_j – конечной вершиной (концом) данной дуги. Ребро $\{v_i, v_i\}$ и дуга (v_i, v_i) называется ***петлей***.

- Граф, состоящий из вершин и соединяющих их ребер, называется ***неориентированным***, а граф, состоящий из вершин и соединяющих их дуг – ***ориентированным*** (орграфом). Графы, содержащие как ребра, так и дуги, именуются ***смешанными***.
- Геометрической интерпретацией графа является рассматриваемая в евклидовом пространстве фигура, состоящая из точек и соединяющих их линий, являющихся либо дугами эллипсов, либо отрезками прямых.
- Если все линии фигуры направленные, то это геометрическая интерпретация орграфа, если все линии ненаправленные – геометрическая интерпретация неориентированного графа.
- Геометрическая интерпретация смешанного графа

На рис. 4.1 представлена геометрическая интерпретация смешанного графа $G(V, E)$ на плоскости, где

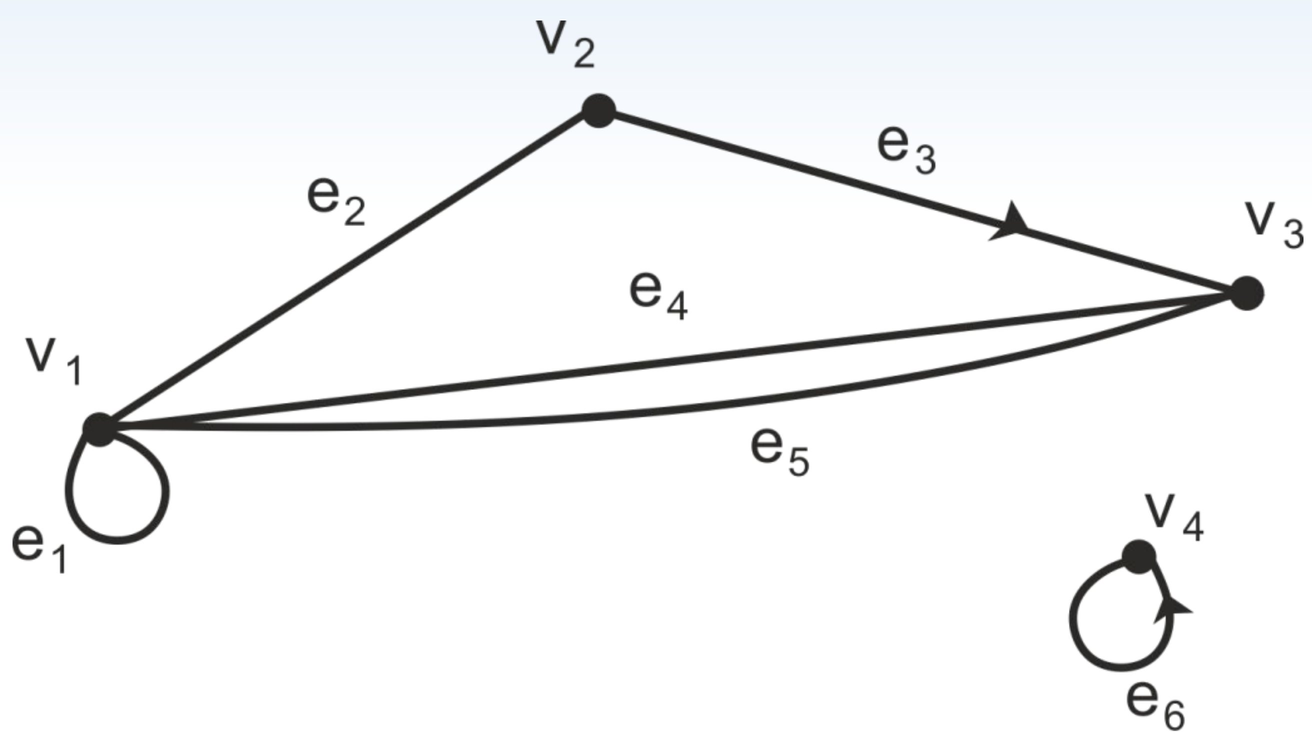
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$,

$e_1 = \{v_1, v_1\}$, $e_2 = \{v_1, v_2\}$,

$e_3 = (v_2, v_3)$, $e_4 = \{v_1, v_3\}$,

$e_5 = \{v_1, v_3\}$, $e_6 = (v_4, v_4)$.



Определения

- Одинаковые ребра (дуги), соединяющие одни и те же вершины, называются кратными или *мультиребрами*.

На рис. 4.1 ребра e_4 и e_5 – кратные.

Граф, содержащий кратные ребра и без петель, называется *мультиграфом*.

Граф, содержащий петли, называется *псевдографом*. На рис. 4.1 изображен смешанный псевдограф.

Граф без петель и кратных ребер называется *простым* или *обыкновенным*.

Смежность и инцидентность

- Говорят, что ребро $< v_i, v_j >$ и вершина v_i (а также v_j) ***инцидентны*** друг другу и эти вершины являются концами ребра $< v_i, v_j >$.

- Две вершины графа называются ***смежными,*** если они соединены ребром. Два ребра являются ***смежными***, если они имеют общую вершину.
- Дуги называются *смежными,* если конец одной из них совпадает с началом другой.

Путь, цепь, контур

- Некоторая последовательность смежных дуг называется ***путем,*** а последовательность смежных ребер называется ***цепью.***
- Замкнутый путь называется ***контуром,*** а замкнутая цепь — ***циклом***
- Путь (цепь) называется ***простым,*** если он проходит через дуги (ребра) графа по одному разу. В противном случае путь (цепь) называется ***составным.*** Аналогично определяются простые контуры и циклы.
- . Путь (цепь) называется ***элементарным,*** если он проходит через вершины графа по одному разу.

Путь, цепь, контур

Цепь (цикл) называется ***гамильтоновой****,* если она проходит через все вершины графа по одному разу.

Цепь (цикл) называется ***эйлеровой****,* если она проходит через все ребра по одному разу. Аналогично определяются гамильтоновы и эйлеровы путь и контур.

Связность

- ***Подграфом*** графа $G(V,E)$ называется граф $G'(V',E')$, такой что $V' \subseteq V, E' \subset E$. ***Частичным графом*** называется подграф $G'(V',E')$ содержащий все вершины графа $G(V,E)$. ***Связным*** граф называется, если две любые его вершины можно соединить цепью. Максимальные связные подграфы графа называются его ***компонентами***.

Ребро графа называется ***перешейком***, если его удаление приводит к тому, что граф становится несвязным. Граф из одних перешейков называется ***деревом.***

Степень вершины графа

- ***Степенью вершины*** графа называют число дуг (ребер), инцидентных данной вершине. Степень обозначается $d(v_i)$.

или $\deg(v)|$. Для ориентированного графа различают ***полустепень захода*** d^+ — число дуг, входящих в данную вершину, и ***полустепень исхода*** d^- — число дуг, выходящих из данной вершины. Степень вершины ориентированного графа составит сумма полустепеней исхода и захода.

$$d(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i).$$

Число ребер графа

- Число ребер графа N связано со степенями его вершин следующим соотношением:

$$N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(v_i)\,.$$

где n — число вершин графа.

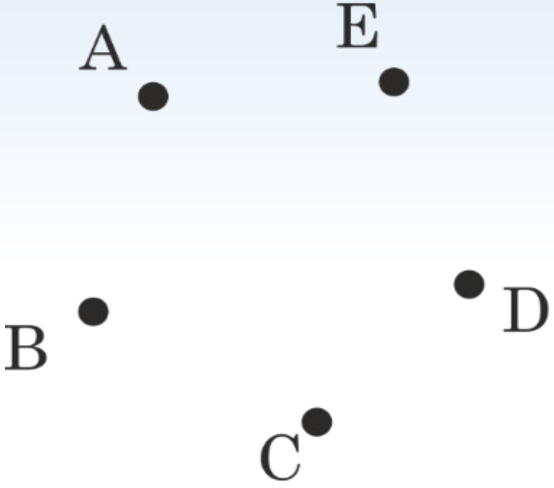
Отсюда следует справедливость следующих утверждений:

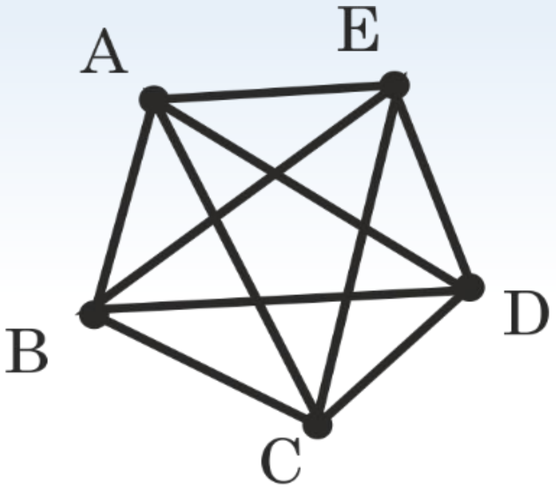
Следствия

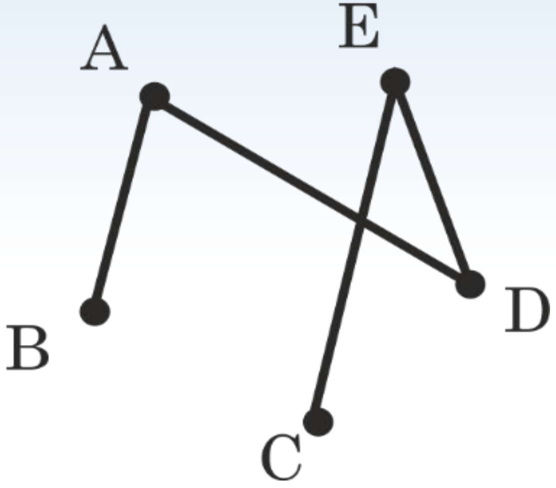
- сумма степеней вершин любого графа четна;
- для любого графа число вершин, имеющих нечетные степени, четно;
- для ***однородного*** графа, т. е. графа, все степени вершин которого одинаковы и равны s,

  $N = 1/2 * n * s;$
- для ***полного*** графа $\boldsymbol{K_n}$, т. е. графа, в котором каждая пара вершин соединена ребром или дугой, $d(v_i) = n - 1, N = 1/2 * n(n-1)$.
- для ***нуль****-графа* степени всех вершин равны 0.

Примеры







Нуль-граф

Полный граф K_5

Дерево-цепь

Однородным графом является и полный двудольный граф $K_{m,m} = G(V_1,V_2,E)$, $|V_1|=|V_2| = m$, подграфы которого $G_1(V_1,\varnothing)$ и $G_2(V_2,\varnothing)$ – нуль-графы и все вершины подмножеств V_1 и V_2 попарно соединены ребрами.
На рисунке граф $K_{3,3}$

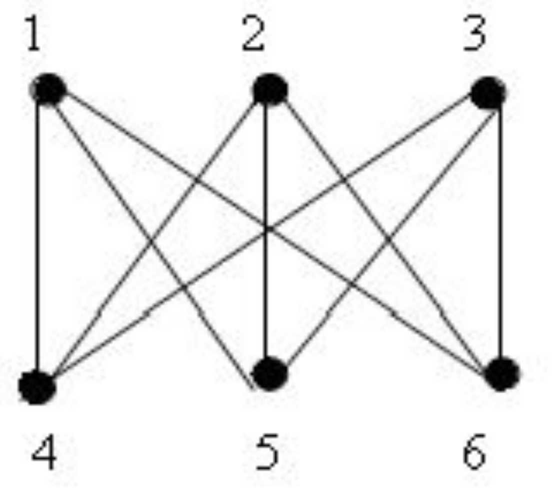


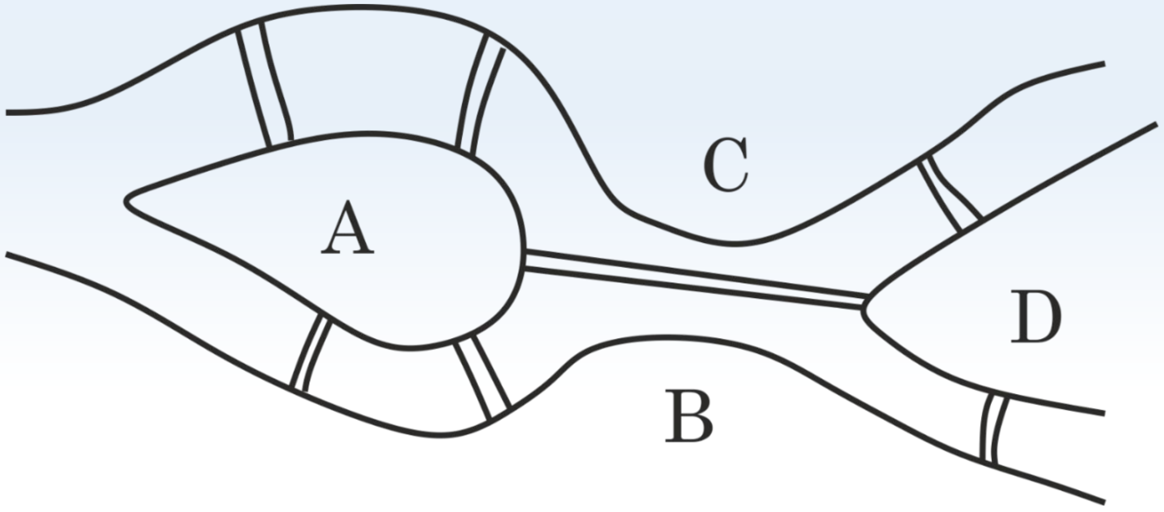
Рис. 13

Определение двудольного графа $K_{m,n} = G(V_1,V_2,E)$,

- Двудольный граф $K_{m,n} = G(V_1,V_2,E)$, - это граф $G(V,E)$, такой что множество V разбито на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, $|V_1|=m$, $|V_2|=n$, причем всякое ребро из E соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2. Множества V_1 и V_2 называются долями двудольного графа. Если двудольный граф содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2, то он называется полным двудольным графом.

Эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы

- Рассмотрим ***задачу о кенигсбергских мостах,*** сформулированную Эйлером. Река Прегель делит г. Кенигсберг на четыре части:
A, B, C, D, соединенные между собой семью мостами. Требуется определить, можно ли, выйдя из какой-либо части города, пройти по всем мостам по одному разу и вернуться в исходную часть города.



Эйлеров цикл

Теорема1. Чтобы неориентированный граф обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы он был связан, и все вершины графа имели четные степени.

Для существования эйлерова контура на ориентированном графе необходимым и достаточным условием являются связность графа и равенство полустепеней захода и исхода в каждой вершине. Очевидно, что степени вершин графа четны.

Граф, соответствующий задаче Эйлера о кенигсбергских мостах, не удовлетворяет теореме. Он не содержит эйлерова цикла.

Эйлерова церь

- **Теорема2.** Неориентированный граф содержит эйлерову цепь, соединяющую вершины A и B в том, и только в том случае, если граф связен, и только эти вершины A и B являются вершинами с нечетными степенями, а степени всех остальных вершин четны.

Алгоритм построения эйлерова цикла

1) Выходим из произвольной вершины v_0 , каждое пройденное ребро вычеркиваем.
2) Никогда не идти по ребру, которое в рассматриваемый момент является перешейком, а также не выбирать ребра, идущего в v_0 , пока есть другие возможности.

Гамильтонов цикл

- Задача об определении гамильтоновых линий в общем виде не решена.
- К числу задач, требующих определения гамильтонова цикла, относится ***задача о коммивояжере****.* Бродячий торговец, предлагая товар, посещает ряд городов, причем каждый город он посещает единственный раз, после чего вновь возвращается в исходный пункт. Требуется определить кратчайший путь коммивояжера, если расстояния между городами заданы. Города можно представить как вершины связного неориентированного графа, в котором каждой паре вершин v_i, v_j приписывается расстояние $l(v_i, v_j)$.

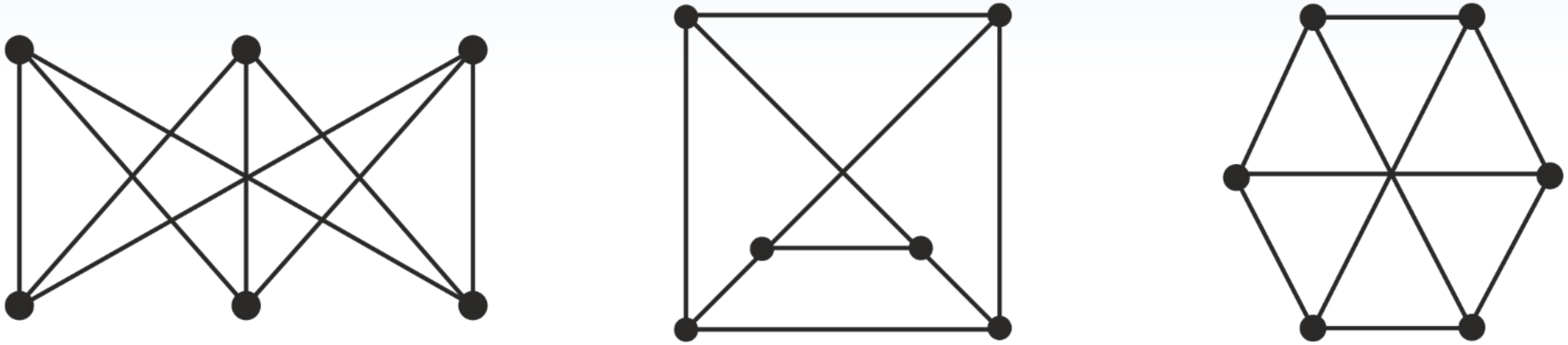
Изоморфизм графов

- Два графа G и H называются ***изоморфными***

(записывается $G \cong H$), если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность.

Например, графы на рис. 4.4. изоморфны.

$K_{3,3}$:



Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу.

Свойства изоморфных графов

- Для изоморфных графов верно следующее:

$$G1 \cong G2 \Rightarrow |V(G1)| = |V(G2)|,$$

$$|E(G1)| = |E(G2)|,$$

$$\{\deg(v) | v \in V(G1)\} = \{\deg(v) | v \in V(G2)\}.$$

Планарность. Плоские графы

Граф называется ***планарным,*** если его можно уложить на плоскости без пересечения ребер.

Плоский граф - планарный граф, уложенный на плоскости.

Гомеоморфизм графов

Говорят, что граф G' (V', E') получен из графа G (V, E) операцией подразделения ребра $<v_i, v_j>$, если

$$V' = V \cup \{u\},$$

$$E' = E \cup \{< v_i, u >, < u, v_j >,\} \backslash \{< v_i, v_j >\}.$$

Два графа G_1 и G_2 называются гомеоморфными, если существует такой граф G', который может быть получен как из графа G_1, так и из графа G_2 операцией разбиения ребра конечное число раз.

Теорема Понтрягина-Куратовского

Теорема 3. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графам K_5 и $K_{3,3}$.

Числа, характеризующие граф

- ***Цикломатическим числом графа*** называется число

$\delta = N - n + q$, где N— число ребер графа, n — число его вершин, q— число компонент связности. Для связного графа $\delta = N - n + 1$.

Теорема 4. Цикломатическое число графа равно наибольшему количеству независимых циклов.

Следствия:

1) Связный граф G не имеет циклов тогда и только тогда, когда

$\delta = 0$. Такой граф есть дерево.

2) Связный граф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $\delta = 1$.

Цикломатическое число связного графа можно определить как число ребер, которое нужно удалить, чтобы граф стал деревом.

Хроматическое число графа

- Предположим, что каждая вершина графа G окрашена в какой-либо цвет так, что никакие две смежные вершины не окрашены одинаково. Если при этом потребовалось k красок, то граф называется хроматическим порядка k. Минимальное число k, при котором граф остается k-хроматическим, называется хроматическим числом и обозначается χ.

Задача о раскраске географической карты

- Задача о раскраске географической карты связана с определением хроматического числа графа. Любую географическую карту можно изобразить в виде графа $G(V, E)$, где вершинами являются страны, а ребрами связаны страны, граничащие между собой. Такой граф является плоским. С помощью ЭВМ доказана теорема о том, что граф, соответствующий любой географической карте, имеет хроматическое число не больше 4.

4.2. Способы задания графа

1) Графически;
2) На языке теории множеств;
3) Матричным способом;
4) Списками.

Матрица смежности

- ***Матрицей смежности*** данного графа $G(V,E)$ называется квадратная матрица $A(G)$ порядка n, где n — мощность множества V $(n = |V|)$, элемент a_{ij} которой определяется следующим образом:

Для неориентированного графа:

a_{ij} равен числу ребер, соединяющих вершины v_i и v_j (при этом петли считаем дважды).

Для ориентированного графа:

$$a_{ij} = \begin{cases} k, \textit{если из вершины } v_i \textit{ в } v_j \textit{ выходит } k \textit{ дуг} \\ 0, \textit{если вершины } v_i \textit{ и } v_j \textit{ несмежны.} \end{cases}$$

Для орграфа:

- ***Полустепень исхода*** вершины v_i равна сумме чисел, стоящих в i-ой строке.
- ***Полустепень захода*** вершины v_i равна сумме чисел, стоящих в i-ом столбце.
- ***Изолированной*** вершине соответствуют строка и столбец, состоящие из нулей.
- Единицы, стоящие на главной диагонали матрицы смежности орграфа, соответствуют *петлям* при данной вершине.

Сумма чисел в матрице смежности орграфа равна числу дуг орграфа.

Транспонированной матрице смежности соответствует граф с противоположной ориентацией (для орграфа).

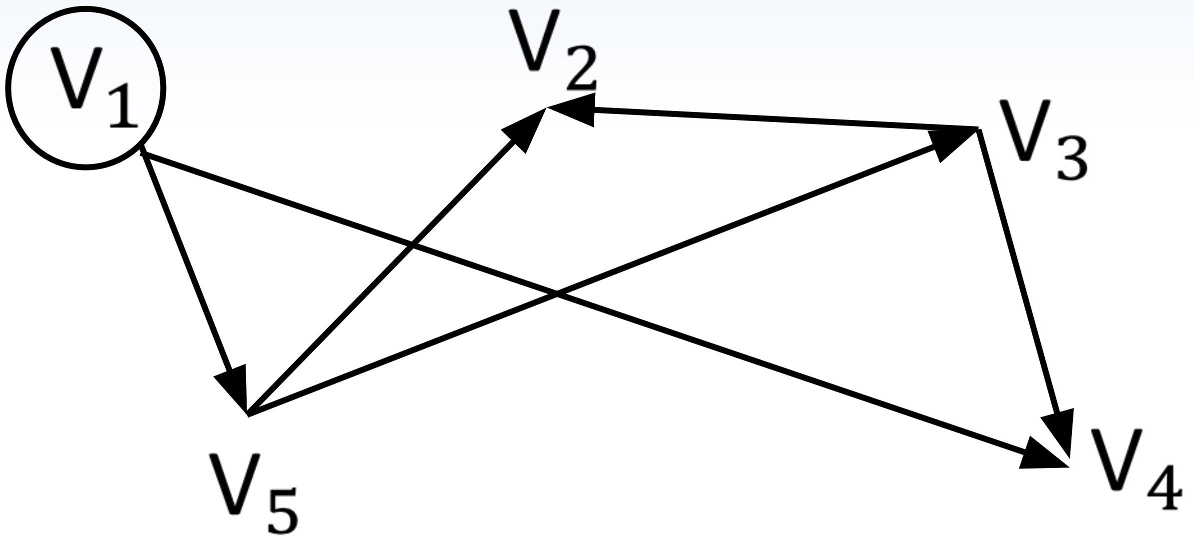
Для неорграфа:

- Матрица смежности симметрична, сумма элементов, стоящих в i-ой строке, равна сумме элементов, стоящих в i-ом столбце, и, соответственно, степени i-ой вершины.
- Сумма чисел в матрице смежности неорграфа равна удвоенному числу ребер графа.

Матрица смежности

- ***Матрица смежности*** полностью задает граф. Любая квадратная матрица, состоящая из единиц и нулей, может быть рассмотрена как матрица смежности, задающая некоторый простой граф G. Так, матрице M соответствует граф, изображенный на рисунке 4.5:

1	0	0	1	1
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0



Матрица инцидентности

- ***Матрица инцидентности*** неориентированного графа $G(V, E)$, — матрица $B(G)$ порядка $n \times m$ $(n = |V|, m = |E|)$, элементы которой определяются следующим образом:

- $b_{ij} = 1$, если v_i и e_j инцидентны;
- $b_{ij} = 0$, если v_i и e_j не инцидентны.

Матрица инцидентности ориентированного графа $\vec{G}(V, \vec{E})$

—матрица $B(\vec{G})$ порядка $n \times m$ ($n = |V|, m = |E|$), элементы которой определяются следующим образом:

$b_{ij} = 1$, если v_i— начало дуги e_j,
$b_{ij} = -1$, если v_i— конец дуги e_j;
$b_{ij} = 0$, если v_i и e_j неинцидентны.

Матрица инцидентности

- **Замечание 1.** Если граф содержит петли, то значение соответствующего элемента b_{ij} выбирается в зависимости от дальнейшего применения этой матрицы. В нашем случае, будем использовать запись $b_{ij} = 2$ для неориентированного графа и запись $b_{ij} = \pm 1$ для орграфа.
- **Замечание 2.** Если ребра графа пронумерованы, то i-й столбец матрицы инцидентности соответствует i-му ребру. Если ребра графа (орграфа) непомечены, то при составлении матрицы инцидентности будем придерживаться следующего правила: сначала перечисляем ребра (дуги) инцидентные (исходящие из) первой вершины в вершины ее окрестности (в порядке возрастания номеров вершин), затем из второй и т.д.

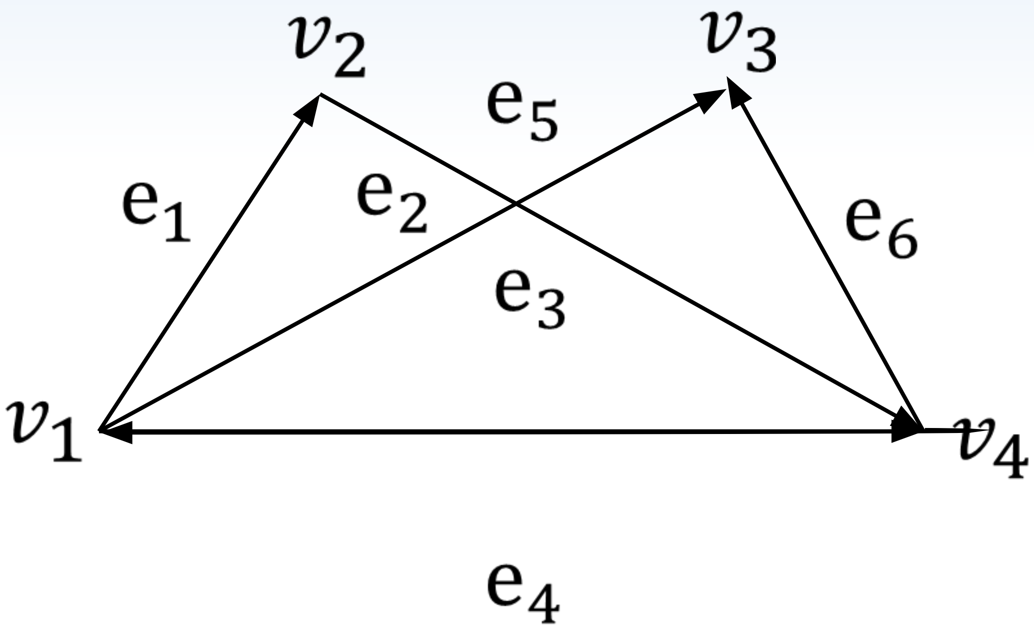
Матрица инцидентности

- **Замечание 3.** Сумма положительных элементов в i-й строке матрицы инцидентности орграфа равна полустепени исхода i-й вершины, а сумма отрицательных элементов — полустепени захода. Для неориентированного графа сумма элементов в i-й строке равна степени i-й вершины.

Матрица инцидентности

- **ПРИМЕР:** Напишем матрицу инцидентности для графа, изображенного на рис 4.6.

Для этого пронумеруем дуги: $e_1, e_2, \ldots, e_6$, матрица инцидентности будет иметь следующий вид:



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание списком смежностей

$v_1: v_2, v_3, v_4$

$v_2: v_4$

$v_3:$

$v_4: v_1, v_3$

Задание списком инцидентностей (ребер)

$e_1: v_1, v_2$

$e_2: v_1, v_3$

$e_3: v_1, v_4$

$e_4: v_4, v_1$

$e_5: v_2, v_4$

$e_6: v_4, v_3$

4.3 Операции на графах и их свойства

1. Удаление ребра;

2. Удаление вершины;

3. Добавление вершины;

4. Добавление ребра;

5. Отождествление вершин;

6. Стягивание ребра;

7. Размножение вершины;

8. Расщепление вершины;

9. Дублирование вершины;

10. Разбиение ребра (гомеоморфизм);

11. Дополнение графов;

12. Объединение графов;

13. Пересечение графов;

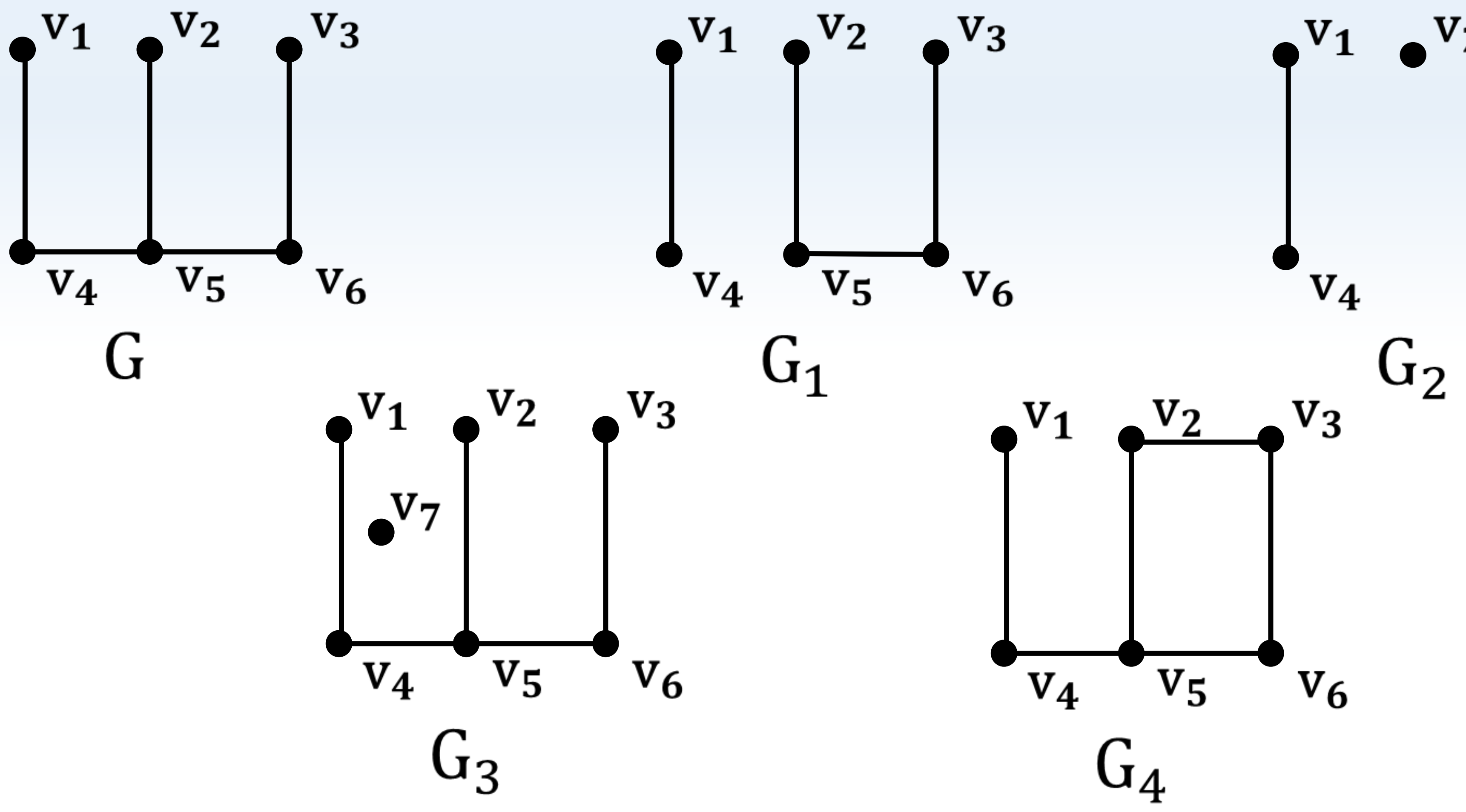
14. Соединение графов;

15. Композиция графов;

16. Произведение графов.

1-4 Операции добавления и удаления

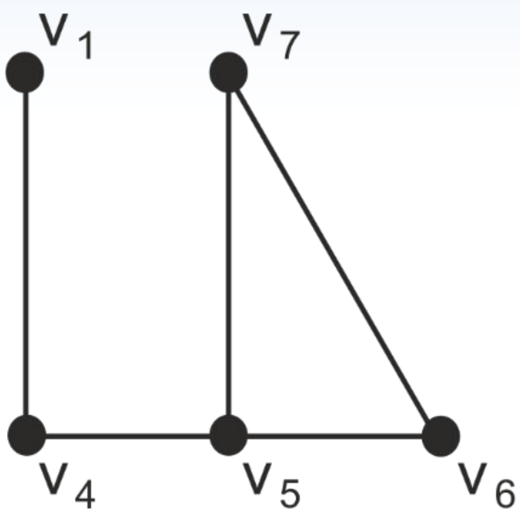
- Граф G и графы, полученные применением к G операций удаления и добавления: удаление ребра (v_4, v_5); удаление вершины v_5; добавление вершины v_7; добавление ребра (v_2, v_3).



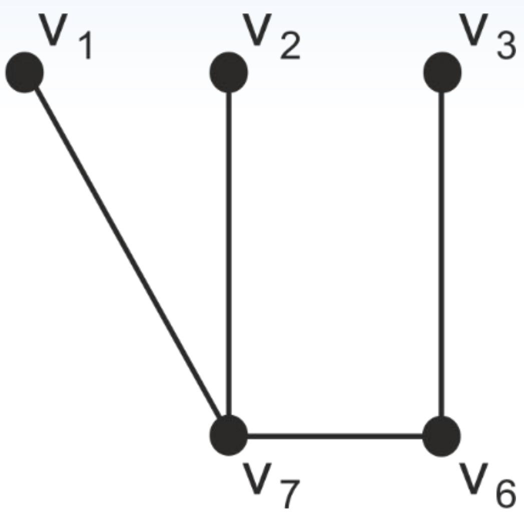
5-6 Операция отождествления вершин

- *Отождествление вершин* u, v: удалим их, добавим новую вершину w и ребра (w, v_i) вместо ребер (u, v_i) и (v, v_i).

Графы, полученные применением к G операций отождествление вершин v_2, v_3 и стягивание ребра (v_4, v_5).



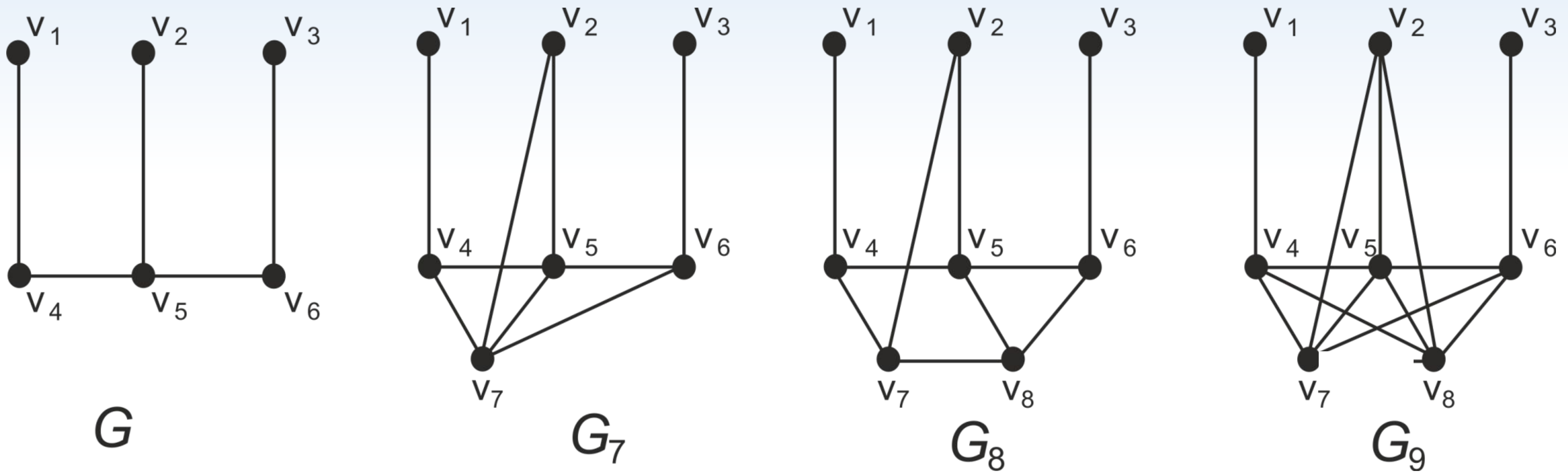
G_5



G_6

Операции на графах 7-9

- Размножение вершины v_5 графа G, расщепление вершины v_7 графа G_7, дублирование вершины v_7 графа G_7 (графы G_7, G_8 и G_9 соответственно).



Операции на графах 7-9

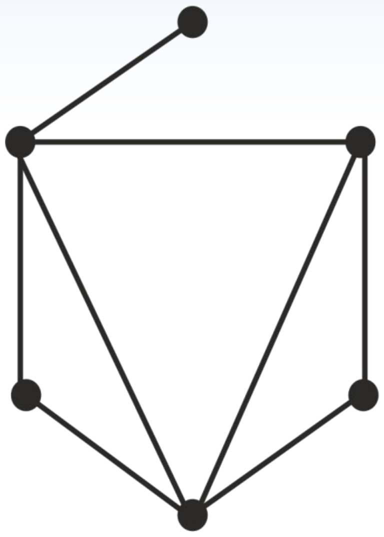
- *Размножение вершины* v : добавим новую вершину *u*, новое ребро (v, *u*), новые ребра (u, v_i), где $v_i \in \Gamma(v)$.

  Расщепление вершины v : $\Gamma(v) = \Gamma_1 + \Gamma_2$; удалим v, добавим u и *w*, добавим (u, v_i), где $v_i \in \Gamma_1$, и (w, v_i), где $v_i \in \Gamma_2$, и ребро (u, *w*).

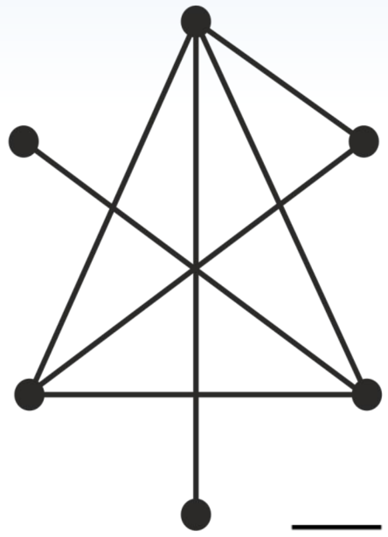
  Дублирование вершины v: добавим вершину u и ребра (u, v_i), где $v_i \in \Gamma(v)$.

11 - Дополнение графов

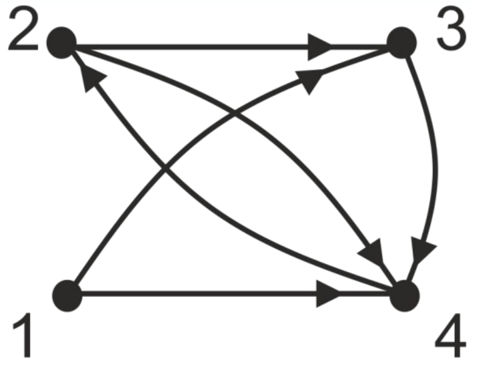
Пусть $G\ (V, E)$ – обыкновенный граф. Дополнение графа $\bar{G}$ (также обыкновенный граф) имеет в качестве множества вершин множество V. Любые две несовпадающие вершины в $\bar{G}$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G. На рисунке изображены графы G_1 и G_2 и их дополнения $\overline{G_1}$ и $\overline{G_2}$ соответственно.



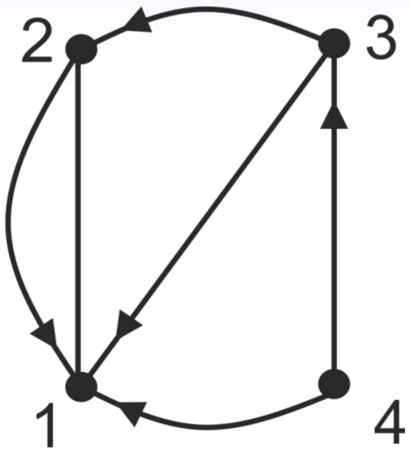
G_1



$\overline{G_1}$



G_2



$\overline{G_2}$

Дополнение графов

Теорема 5. Пусть G – обыкновенный граф с матрицей смежности вершин A. Тогда матрицей смежности вершин графа $\overline{G}$ является матрица $\bar{A}$, образованная поэлементным логическим отрицанием матрицы A за исключением диагональных элементов, которые остаются нулевыми.

Пример 1. Матрицы смежности вершин *A* графа G_2 и графа , изображенных на рис., имеют вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\overline{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Объединение графов-12

- Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ – произвольные графы. Объединением $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф с множеством $V = V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $E = E_1 \cup E_2$.

Операция объединения графов может быть выполнена в матричной форме.

Объединение графов

- **Теорема 6.** Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ – два графа (ориентированные или неориентированные одновременно), и пусть A_1 и A_2 – матрицы смежности вершин этих графов. Тогда матрицей смежности вершин графа $G(V, E) = G_1 \cup G_2$ является матрица A, полученная поэлементным взятием максимального элемента вспомогательных матриц $\mathrm{A}_1{}'$ и $\mathrm{A}_2{}'$.

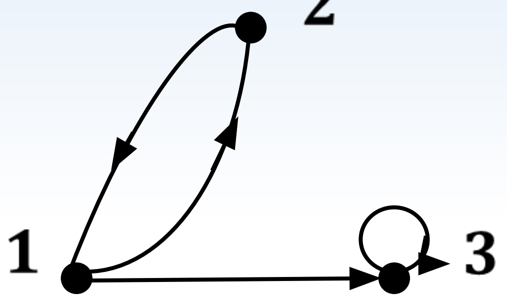
Матрицы $\mathrm{A}_i{}', i = 1{,}2$, получаются из A_i с помощью добавления нулевых строк и столбцов, соответствующих вершинам, отсутствующим в V_i, но присутствующим в $V = V_1 \cup V_2$.

Объединение графов

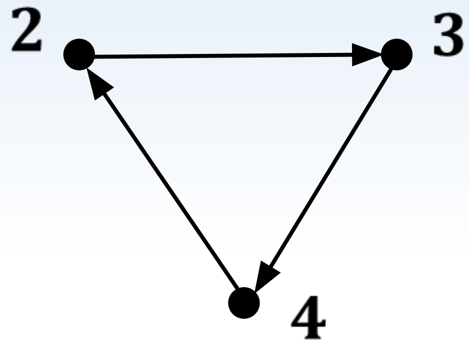
- **Следствие .** Если элементы матриц смежности вершин A_1 и A_2 графов G_1 и G_2 принимают только значения 0 и 1, то операция взятия максимального элемента для нахождения матрицы смежности вершин графа $G_1 \cup G_2$ соответствует логической сумме элементов.

ПРИМЕР 2

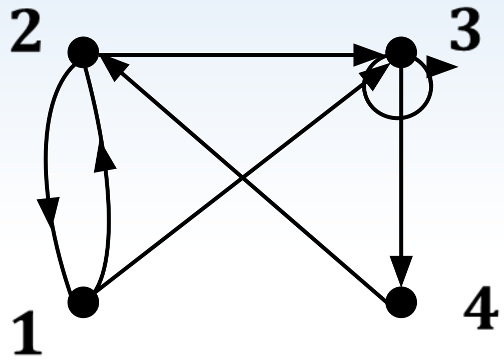
- На рисунке приведены графы G_1 и G_2 и их объединение $G = G_1 \cup G_2$.



G_1



G_2



G

ПРИМЕР 2 (продолжение)

Матрицы смежности вершин графов:

$$A_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ПРИМЕР 2 (продолжение) $V = V_1 \cup V_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

матрицы смежности вершин вспомогательных графов G_1' и G_2' и графа G:

$$A_1' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_2' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

13- Пересечение графов

- Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ – произвольные графы.

Пересечением $G_1 \cap G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф с множеством $V = V_1 \cap V_2$ и множеством ребер $E = E_1 \cap E_2$.

$$G_1(V_1, E_1) \cap G_2(V_2, E_2) = G(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2).$$

Операция пересечения графов может быть выполнена в матричной форме.

Пересечение графов

- **Теорема 7.** Пусть $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ – два графа (ориентированные или неориентированные одновременно), и пусть A_1 и A_2 – матрицы смежности вершин этих графов. Тогда матрицей смежности вершин графа $G(V, E) = G_1 \cap G_2$ является матрица A, полученная поэлементным взятием минимума вспомогательных матриц $A_1{}'$ и $A_2{}'$. Матрицы $A_i{}'$,

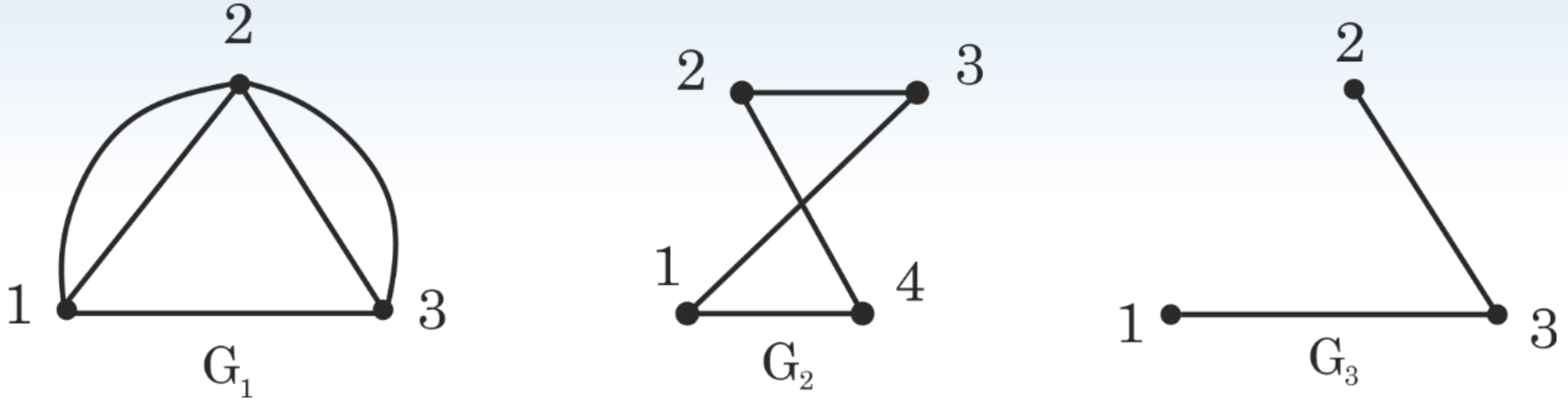
$i = 1{,}2$, получаются из A_i с помощью удаления строк и столбцов, соответствующих вершинам, не вошедшим в $V = V_1 \cap V_2$.

Пересечение графов

- **Следствие 2.** Если элементы матриц смежности вершин A_1 и A_2 графов G_1 и G_2 принимают только значения 0 и 1, то операция взятия минимального элемента для нахождения матрицы смежности вершин A графа $G = G_1 \cap G_2$ соответствует логическому (обычному) произведению элементов.

ПРИМЕР 3

- На рисунке представлены графы G_1 и G_2 и их пересечение $G = G_1 \cap G_2$.



ПРИМЕР 3 (продолжение)

- Матрицы смежности вершин исходных графов:

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

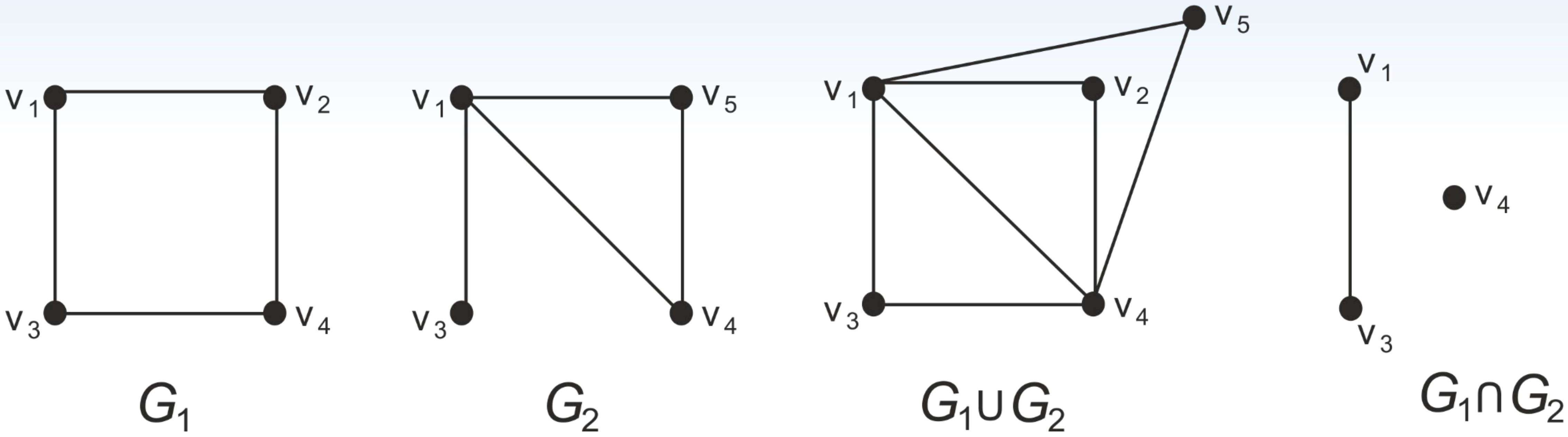
$$A_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ПРИМЕР 3 (продолжение) $V = V_1 \cap V_2 = \{1, 2, 3\}$.

- Матрицы смежности вершин вспомогательных графов G_1' и G_2' и графа G :

$$A_1' = A_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_2' = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- **ПРИМЕР:** На рисунке представлены графы G_1, G_2, с применением операций объединения $G_1 \cup G_2$ и пересечения $G_1 \cap G_2$.



14- Соединение графов

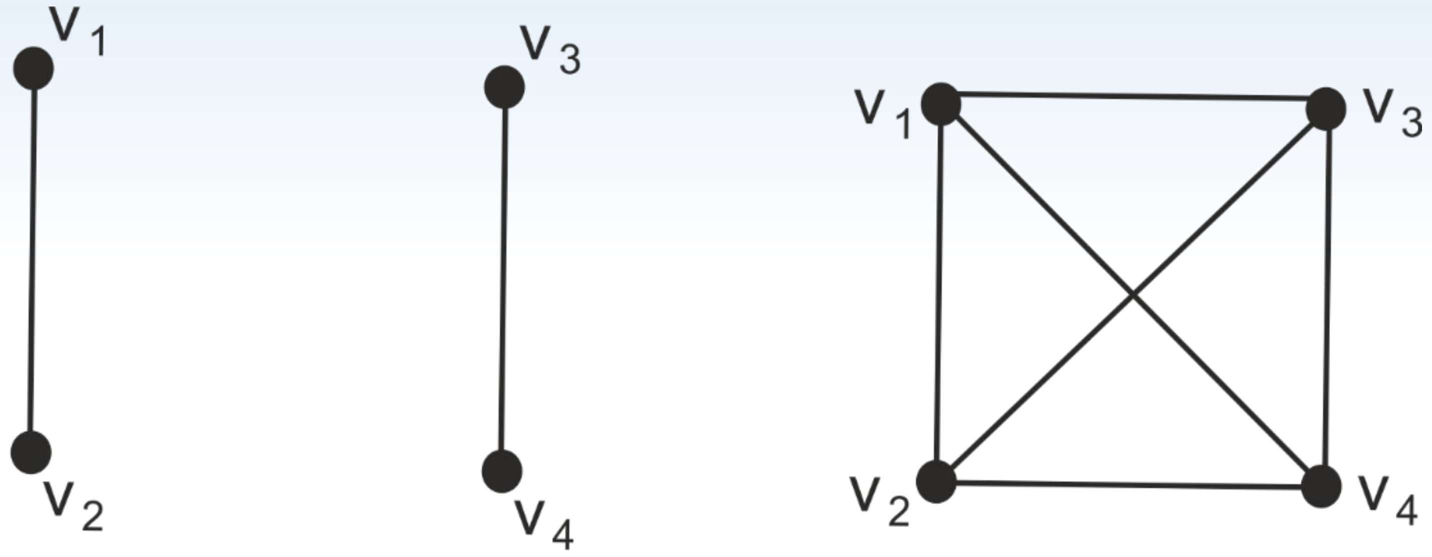
$$G_1(V_1, E_1) + G_2(V_2, E_2) =$$

$$= G_1\left(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \left\{\left(v_i, v_j\right) \middle| v_i \in V_1, v_j \in V_2\right\}\right),$$

при условии, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Соединение графов

- **ПРИМЕР 4:** На рисунке представлены графы G_1, G_2 и граф $G_1 + G_2$, полученный в результате их соединения.



G_1 $\quad$ G_2 $\quad$ G_1+G_2

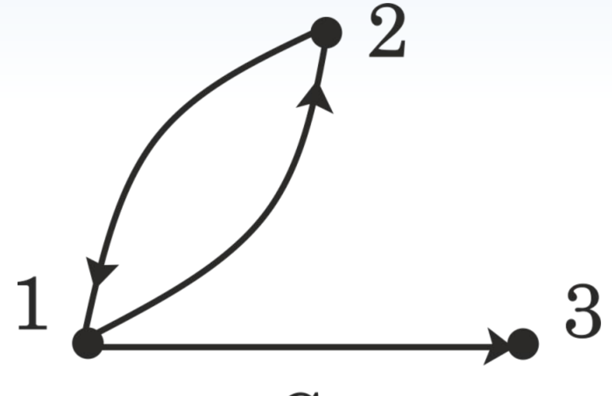
15- Композиция графов

- Пусть $G_1(V, E_1)$ и $G_2(V, E_2)$ – два ориентированных графа с одними и теми же множествами вершин V. Композицией $G_1 \circ G_2$ графов G_1 и G_2 называется ориентированный граф с множеством вершин V, в котором существует дуга (v_i, v_j) тогда и только тогда, когда для некоторой вершины $u \in V$ существуют дуги $(v_i, u) \in E_1$ и $(u, v_j) \in E_2$.

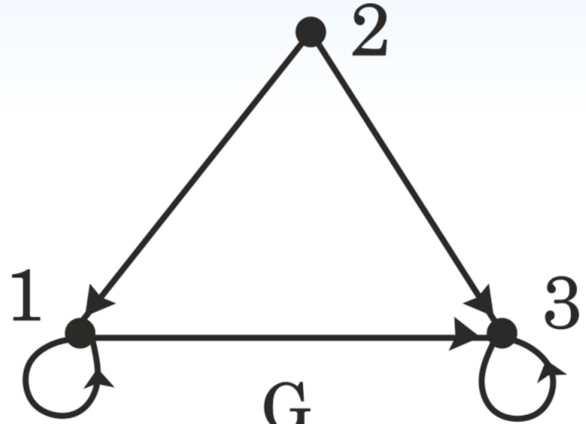
Композиция графов

- **Теорема 8.** Пусть $G_1(V, E_1)$ и $G_2(V, E_2)$ – два ориентированных графа с матрицами смежности вершин A_1 и A_2 соответственно. Тогда матрицей смежности вершин графа $G(V, E) = G_1 \circ G_2$ является матрица $A = A_1 \cdot A_2$.

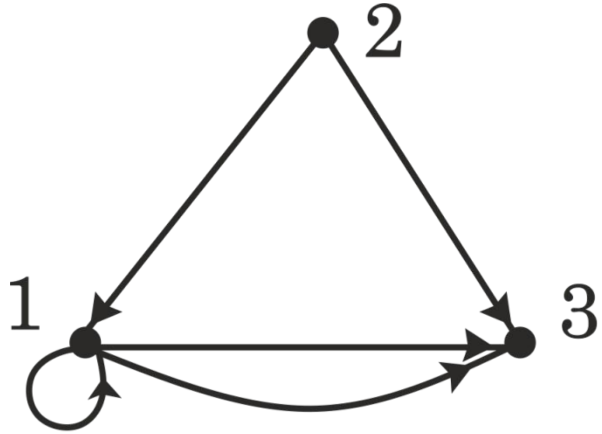
ПРИМЕР 5: На рисунке представлены графы $\boldsymbol{G_1}$, $\boldsymbol{G_2}$ и их композиции $\boldsymbol{G_1 \circ G_2}$ и $\boldsymbol{G_2 \circ G_1}$.



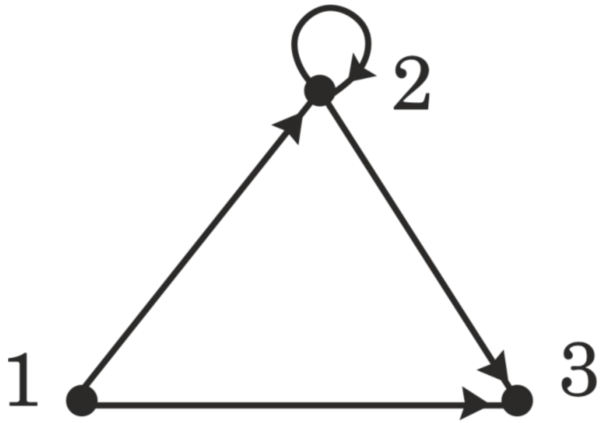
G_1



G_2



$G_1(G_2)$



$G_2(G_1)$

ПРИМЕР 5: Представление в табличной форме (списком дуг)

G_1	G_2		
(1,2) (1,3)	(1,1) (1,3)	(1,1) (1,3)	(1,2) (1,3)
(2,1)	(2,1) (2,3)	(1,3) (2,1)	(2,2) (2,3)
	(3,3)	(2,3)	

Пример 5 Матрицы смежности вершин исходных графов

$$A_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Пример 5

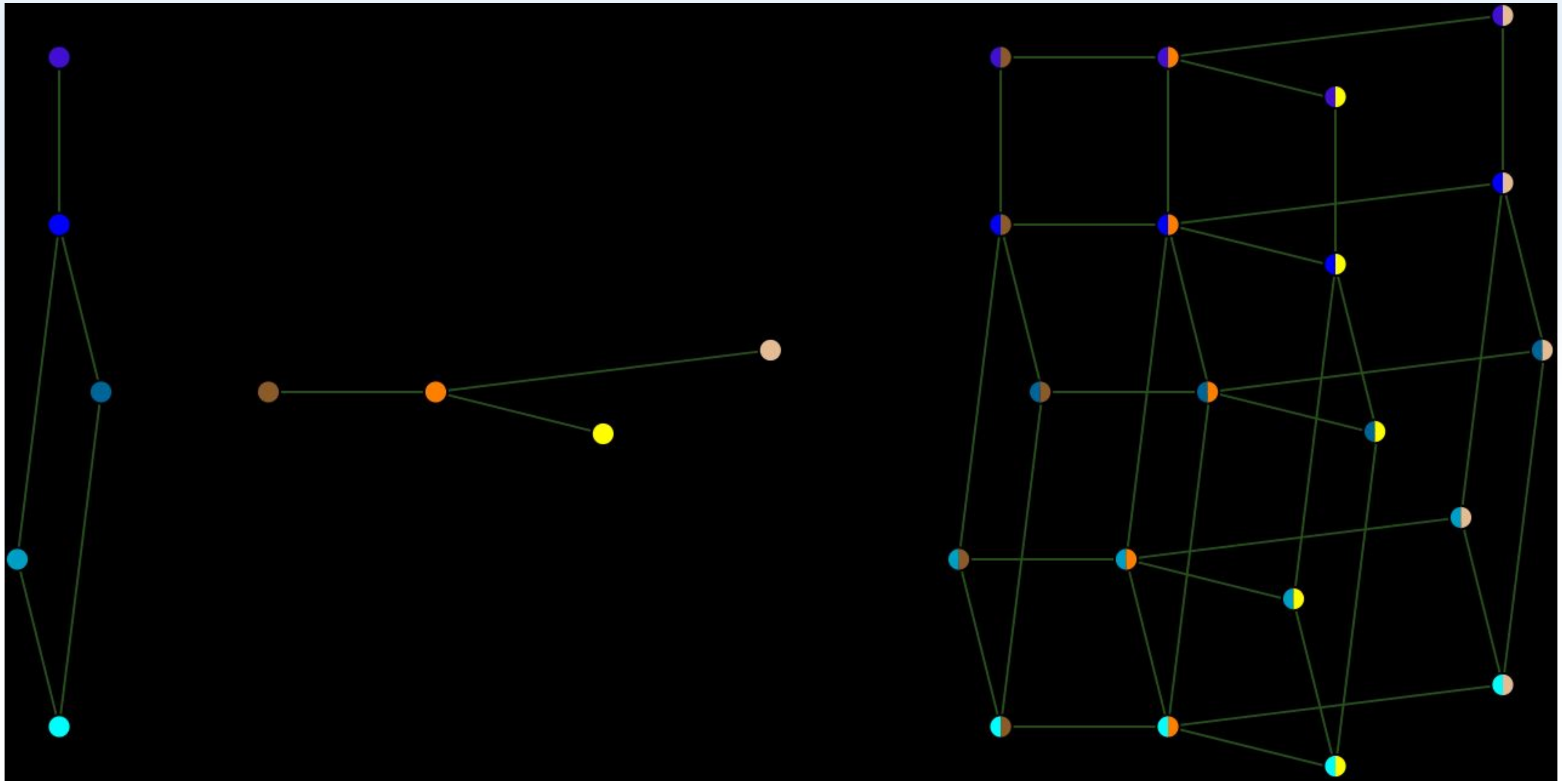
- Находим произведения матриц $A_{12} = A_1 \cdot A_2$ и $A_{21} = A_2 \cdot A_1$, которые соответствуют матрицам смежности графов $G_1{}^{\circ}G_2$ и $G_{2^{\circ}}G_1$.

$$A_{12} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2(1) \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{21} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

16- **Декартово произведение графов** $G = G_1 \square G_2$

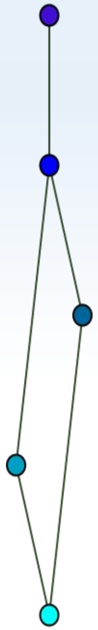
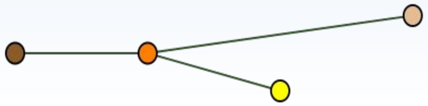
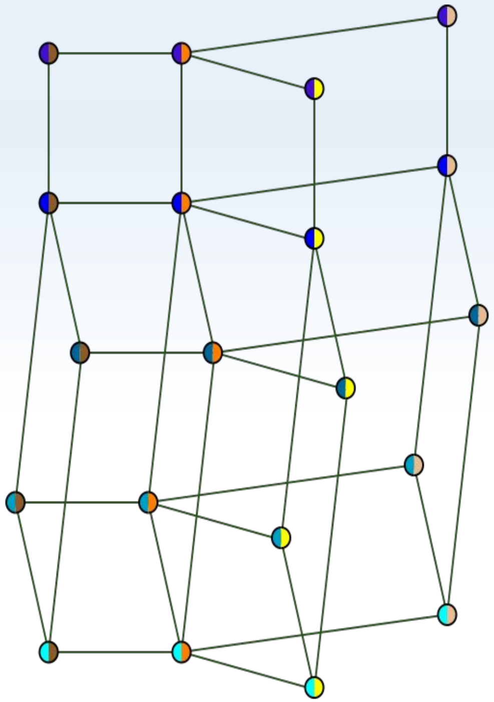
- $$V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$$
- Любые две вершины (u,u') и (v,v') смежны в G тогда и только тогда, когда либо $u = v$ и u' смежна v' в G_2 либо $u' = v'$ и u смежна v в G_1.

16- Декартово произведение графов $G = G_1 \square G_2$

- 

16- Декартово произведение графов

$G = G_1 \square G_2$

- 
  $\square$
  
  $=$
  

4.4 Деревья

Неориентированный граф с числом вершин $n > 1$ называется ***деревом***, если он связен и не содержит циклов.

Деревья являются в некотором смысле простейшим классом графов. Для них выполняются многие утверждения, которые не всегда выполняются для графов в общем случае.

На основании деревьев строятся различные структуры данных, используемые для создания эффективных алгоритмов.

Ориентированные деревья

Ориентированным деревом (ордеревом, или корневым деревом) называется орграф со следующими свойствами:

1. Существует единственный узел r, полустепень захода которого равна *0*, $d^+(r) = 0$. Он называется ***корнем*** ордерева.
2. Полустепень захода всех остальных узлов равна *1*, $d^+(v) = 1$.
3. Каждый узел достижим из корня.

Теорема 9. Для графа G, имеющего n вершин $(n > 1)$,равносильны следующие свойства:

1) G связен и не содержит циклов;
2) G не содержит циклов и имеет $(n - 1)$ ребро;
3) G связен и имеет $(n - 1)$ ребро;
4) G не содержит циклов, но добавление ребра между любыми его вершинами приводит к образованию цикла;
5) G связен и все его ребра являются перешейками;
6) Всякая пара вершин G соединена только одной цепью.

Доказательство этой теоремы можно провести, показав цепочку следствий 1→2→3→4→5→6→1.

Если граф G связен и не имеет циклов, то цикломатическое число $\delta = N - n + 1 = 0$, откуда $N = n - 1$, т.е. G не содержит циклов и имеет $(n-1)$ ребро $(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$**.**

Если G не имеет циклов, то $\delta = 0$, причем $N = n - 1$, т.е. $\delta = N - n + q = 0$, откуда получаем $q = 1$, т.е. G связен и имеет $(n-1)$ ребро $(\mathbf{2} \to \mathbf{3})$.

Доказательство (продолжение)

Если G связен и имеет $(n-1)$ ребро, то $q = N - n + 1$, $N = n - 1$. Отсюда $\delta = 0$, т.е. G не содержит циклов. Если добавить одно ребро, получим связный граф G' с числом ребер $N' = n$. Цикломатическое число этого графа $\delta' = n - n + 1 = 1$, т.е. G' содержит один цикл $(\mathbf{3} \rightarrow \mathbf{4})$.

Доказательство (продолжение)

Если G не содержит циклов, но добавление одного ребра ведет к образованию цикла, то G связен, так как в противном случае в графе G должны существовать две вершины v_i и v_j, не соединенные никакой цепью и такие, что добавление ребра (v_i, v_j) не привело бы к образованию цикла.

Все ребра графа являются перешейками, т.к. удаление любого из них приводит к графу G', для которого $\delta' = N - n + q = 0$, причем $N' = N - 1 = n - 2$ и, следовательно, $q = 2$, т.е. G' не является связным $(\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{5})$.

Доказательство (продолжение)

Если G связен, то всякая пара его вершин соединена цепью. В силу того, что все ребра G являются перешейками, существует единственная цепь, соединяющая любую пару вершин v_i, v_j, т.к. в противном случае удаление ребра(v_i, v_j)не нарушило бы связности графа G $(\mathbf{5} \to \mathbf{6})$.

Если всякая пара вершин G соединена цепью, то G связен. Так как такая цепь единственная, G не содержит циклов: если бы G содержал циклы, то в нем нашлась бы пара вершинv_i, v_j, соединенная более чем одной цепью $(\mathbf{6} \to \mathbf{1})$, что и требовалось доказать.

- Несвязный граф, компонентами связности которого являются деревья, называется ***лесом.***

Теорема 10. Граф $G(V, E)$ тогда и только тогда содержит частичный граф, являющийся деревом, когда он связен.

Доказательство

- на основе свойства 6 предыдущей теоремы каждая пара его вершин может быть соединена цепью.

- Если граф G не содержит циклов, то он сам является деревом по определению.
- Предположим, что G содержит цикл μ. Вычеркнем из μ любое ребро. Получившийся частичный граф G_1,будет связным, т.к. удаление из цикла любого ребра не нарушает связности графа.

Если G_1 – дерево, доказательство закончено.

Если G_2 не имеет циклов, то он есть дерево и доказательство закончено.

Через несколько шагов получим связный граф без циклов, т.е. дерево, являющееся подграфом исходного графа G.

Задача о нефтепроводе (минимальном остовном дереве)

Постановка задачи

Предположим, что имеется n городов, которые нужно соединить нефтепроводом (электролинией, газопроводом). Стоимость строительства нефтепровода между городами v_i, v_j задана.

Как построить самый дешевый нефтепровод, связывающий все города?

Задача о нефтепроводе: *построение графа*

- Построим граф, вершинами которого обозначены города, а ребрами возможные нефтепроводы между ними.

Каждому ребру графа (v_i, v_j) поставим в соответствие число $l(v_i, v_j)$, равное стоимости строительства нефтепровода на участке (v_i, v_j).

Задача строительства самого дешевого нефтепровода сводится к следующей задаче на графе.

Задача о нефтепроводе: графическая задача

- Задан конечный неориентированный связный граф $G(V,E)$, каждому ребру которого $(v_i, v_j) = e$ поставлено в соответствие число *l(e)>0,* называемое длиной ребра.

Требуется найти такой частичный граф-дерево графа G (частичное дерево), общая длина ребер которого минимальна.

Алгоритм Краскала (жадный)

1. Выбираем самое короткое ребро графа e_1, затем самое короткое из оставшихся ребро e_2.
2. Из оставшихся ребер выбираем самое короткое ребро e_3 так, чтобы оно не образовывало цикла с выбранными ребрами.
3. Продолжаем эту процедуру. На k -м шаге к выбранным ребрам $e_1, \dots, e_{k-1}$ добавляем самое короткое ребро из оставшихся $\left|E\right| - (k-1)$ ребер так, чтобы оно не образовывало цикла с выбранными ребрами.
4. При $k = n - 1$ процесс заканчивается. Получим граф без циклов с $(n-1)$-м ребром. На основании теоремы 6 (пункт 2) построенный граф есть дерево.

Алгоритм Прима (алгоритм ближайшего соседа)

Идея алгоритма. На каждом шаге алгоритма будем достраивать остовное дерево $T(V_T, E_T)$ следующим образом: к множеству ребер уже построенного дерева добавляем ребро минимального веса, один конец которого находится в множестве V_T , а второй — в множестве $V \setminus V_T$.

Алгоритм Прима (алгоритм ближайшего соседа)

<u>Шаг 0.</u> $V_T := \varnothing; E_T := \varnothing$;

<u>Шаг 1.</u> Выбираем в графе произвольную вершину *u* и инцидентное ей ребро минимального веса: $(u,v) \in E \mid w(u,v) = min\,\{w(u,v_i)\}, v_i \in V$.

Тогда $V_T := \{u,v\}$, $E_T := \{(u,v)\}$.

<u>Шаг 2.</u> Из всех ребер, инцидентных только одной вершине из дерева *T*, выбираем ребро минимального веса $(u,v) \in E \mid w(u,v) = min\,\{w(u,v)\}$, где $u \in V_T$, $v \in V \setminus V_T$.

Тогда $V_T := V_T \cup \{v\}$, $E_T := E_T \cup \{(u,v)\}$.

Если $|V_T| = n$, то алгоритм заканчивает работу, иначе — возвращаемся на начало <u>шага 2</u>.