

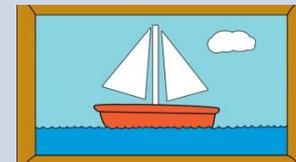
# Задача о рюкзаке

## *Backpack problem*



Вы грабитель.





Вы грабитель.

Нужно выбрать **вещи**,  
которые Вы унесёте...



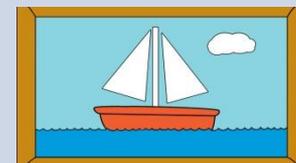
У всех вещей есть **цены**. Суммарная стоимость украденного должна быть **максимальной**.

Вы грабитель.

Нужно выбрать **вещи**, которые Вы унесёте...



40\$



50\$



60\$



100\$

200\$



У всех вещей есть **цены**. Суммарная стоимость украденного должна быть **максимальной**.

**Вы грабитель.**

Нужно выбрать **вещи**, которые Вы унесёте...

Но у вещей есть ещё **и вес!**



40\$

3 кг



3 кг

50\$



60\$

5 кг



100\$

12 кг

200\$

18 кг



У рюкзака  
ограниченная  
вместимость

У всех вещей есть **цены**. Суммарная  
стоимость украденного должна быть  
**максимальной**.

Вы грабитель.

Нужно выбрать **вещи**,  
которые Вы унесёте...

Но у вещей есть ещё  
и **вес!**



40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



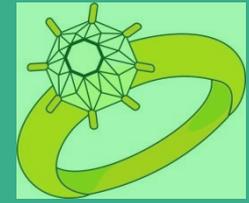
100\$

12 кг

200\$

18 кг

Max: 150\$?



40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



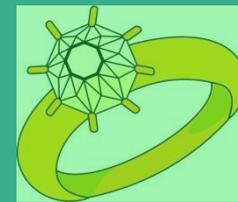
100\$

12 кг

200\$

18 кг

Max: 190\$?

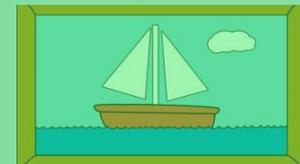


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг

200\$

18 кг

Max: 200\$?

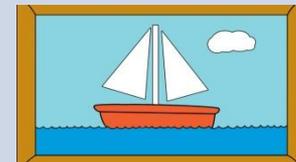


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг

200\$

18 кг

Max: 210\$!

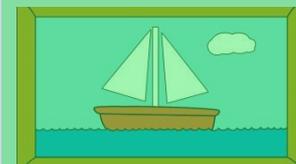


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг

200\$

18 кг

Max: 210\$!



40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг

200\$

18 кг

# Формат ввода:

N M

$m_1$   $m_2$  ...  $m_n$

$c_1$   $c_2$  ...  $c_n$

N – количество вещей

M – вместимость рюкзака

$m_i$  – вес  $i$ -ой вещи

$c_i$  – стоимость  $i$ -ой вещи

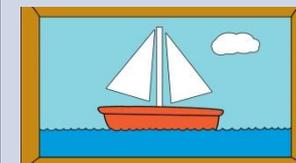


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг

200\$

18 кг

# Формат ввода:

N M

$m_1$   $m_2$  ...  $m_n$

$c_1$   $c_2$  ...  $c_n$

N – количество вещей

M – вместимость рюкзака

$m_i$  – вес  $i$ -ой вещи

$c_i$  – стоимость  $i$ -ой вещи

*Пример:*

5 20

3 3 5 12 18

40 50 60 100 200

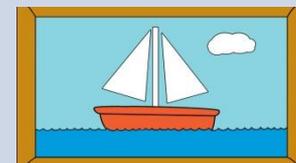


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг

200\$

18 кг

## Формат ввода:

$N$   $M$

$m_1$   $m_2$  ...  $m_n$

$c_1$   $c_2$  ...  $c_n$

$N$  – количество вещей

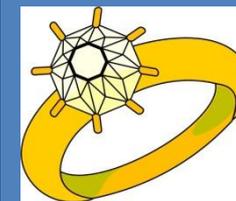
$M$  – вместимость рюкзака

$m_i$  – вес  $i$ -ой вещи

$c_i$  – стоимость  $i$ -ой вещи

## Формат вывода:

Одно число – максимальная стоимость кражи

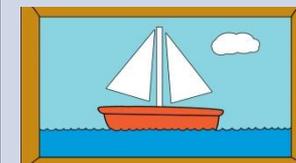


40\$

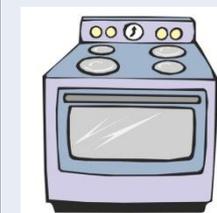
3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг

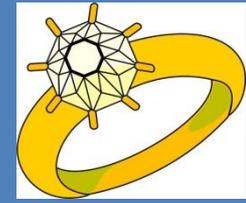
200\$

18 кг

**Подход 1.**

Полный перебор

*Сколько всего вариантов?*



40\$

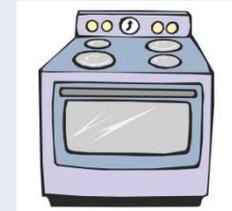
3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг

200\$

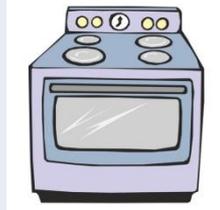
18 кг

# Подход 1.

## Полный перебор

*Сколько всего вариантов?*

Каждый предмет мы можем взять или не взять...

+	↙		40\$
-	↘		3 кг
+	↙		50\$
-	↘		3 кг
+	↙		60\$
-	↘		5 кг
+	↙		100\$
-	↘		12 кг
+	↙		200\$
-	↘		18 кг

**Подход 1.**  
Полный перебор  
*Всего  $2^n$  вариантов*

+	↙		40\$
-	↘		3 кг
+	↙		3 кг
-	↘		50\$
+	↙		60\$
-	↘		5 кг
+	↙		100\$
-	↘		12 кг
+	↙		200\$
-	↘		18 кг

# Подход 1.

## Полный перебор

- *Даёт верный результат*
- *Оооочень долго*

*(при  $n = 100$  суперкомпьютер будет вычислять несколько тысяч лет)*

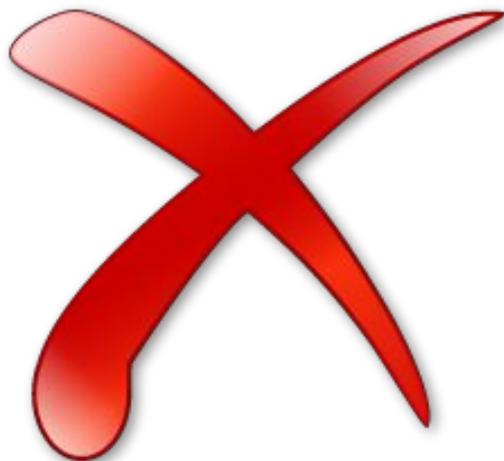


+	↙		40\$
-	↘		3 кг
+	↙		50\$
-	↘		3 кг
+	↙		60\$
-	↘		5 кг
+	↙		100\$
-	↘		12 кг
+	↙		200\$
-	↘		18 кг

## Подход 2.

Брать самую дорогую вещь

- *Не всегда будет давать максимальный ответ  
(уже в нашем примере не работало)*
- *Приведите пример из трёх вещей*



	40\$
3 кг	50\$
	
3 кг	50\$
	60\$
5 кг	
	100\$
12 кг	
	200\$
	18 кг

## Подход 3.

Рассчитать плотность каждой

вещи:  $c_i/m_i$ .

Брать вещи, в порядке убывания  
плотности, пока влезают.

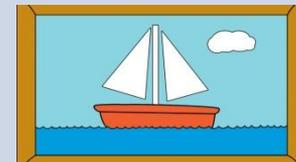


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг

200\$

18 кг

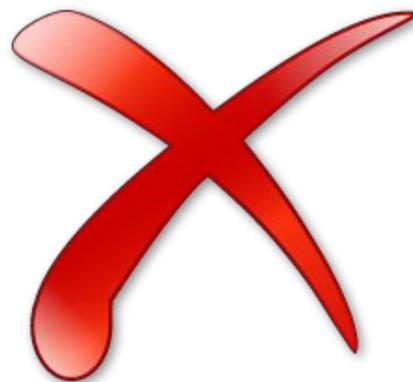
## Подход 3.

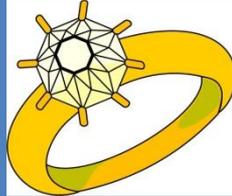
Рассчитать плотность каждой

вещи:  $c_i/m_i$ .

Брать вещи, в порядке убывания плотности, пока влезают.

- Тоже не всегда будет давать правильный ответ.  
*(приведите пример)*

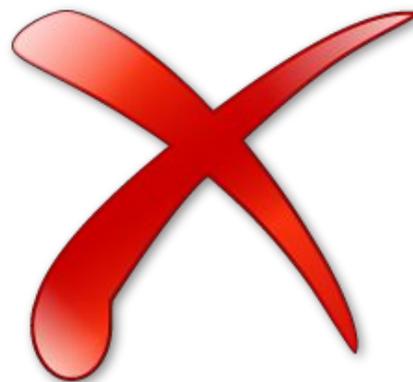


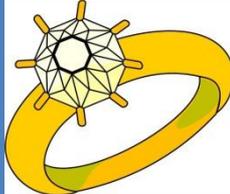
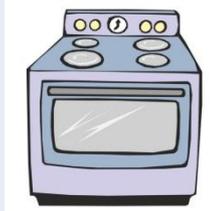
	40\$
3 кг	50\$
	
3 кг	50\$
	60\$
5 кг	
	100\$
12 кг	
	200\$
	18 кг

## Подходы 2-3.

Последние два алгоритма назывались *жадными*.

Для данной задачи они не подходят.



	40\$
3 кг	50\$
	
3 кг	50\$
	60\$
5 кг	
	100\$
12 кг	
	200\$
	18 кг

# Подход 4.

Метод динамического программирования.

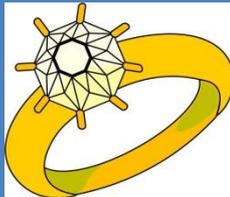


	40\$
3 кг	50\$
	
	60\$
	5 кг
	100\$
	12 кг
	200\$
	18 кг

## Подход 4.

Метод динамического программирования.

Заведём табличку  $(N + 1) \times (M + 1)$

	40\$
3 кг	50\$
	
	60\$
	5 кг
	100\$
	12 кг
	200\$
	18 кг

# Подход 4.

Метод динамического программирования.

Заведём табличку  $P: (N + 1) \times (M + 1)$

Будем считать, что все вещи пронумерованы.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0																						
1																						
2																						
3																						
4																						
5																						

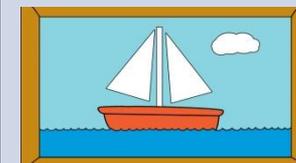


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

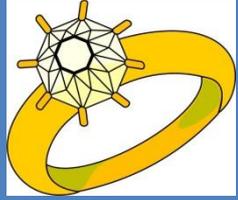
12 кг

200\$

18 кг

В  $P[i][j]$  будем хранить максимальную сумму, которую можно заработать, выбирая среди первых  $i$  вещей и имея рюкзак вместимостью  $j$  кг.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0																						
1																						
2																						
3																						
4																						
5																						



40\$  
3 кг

3 кг 50\$



60\$



5 кг

100\$



12 кг

200\$

18 кг

В  $P[i][j]$  будем хранить максимальную сумму, которую можно заработать, выбирая среди первых  $i$  вещей и имея рюкзак вместимостью  $j$  кг.

Что будет здесь?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0																						
1																						
2																						
3																						
4																						
5																						

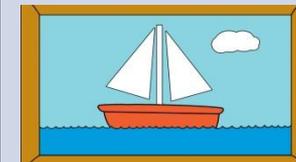


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг

200\$

18 кг

В  $P[i][j]$  будем хранить максимальную сумму, которую можно заработать, выбирая среди первых  $i$  вещей и имея рюкзак вместимостью  $j$  кг.

Выбираем среди первых двух вещей

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0																						
1																						
2																						
3																						
4																						
5																						



40\$

3 кг

3 кг

50\$



В  $P[i][j]$  будем хранить максимальную сумму, которую можно заработать, выбирая среди первых  $i$  вещей и имея рюкзак вместимостью  $j$  кг.

Выбираем среди первых двух вещей.  
Рюкзак вместимостью 4 кг.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0																						
1																						
2																						
3																						
4																						
5																						



40\$

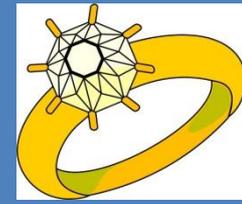
3 кг

3 кг

50\$



В  $P[i][j]$  будем хранить максимальную сумму, которую можно заработать, выбирая среди первых  $i$  вещей и имея рюкзак вместимостью  $j$  кг.



40\$

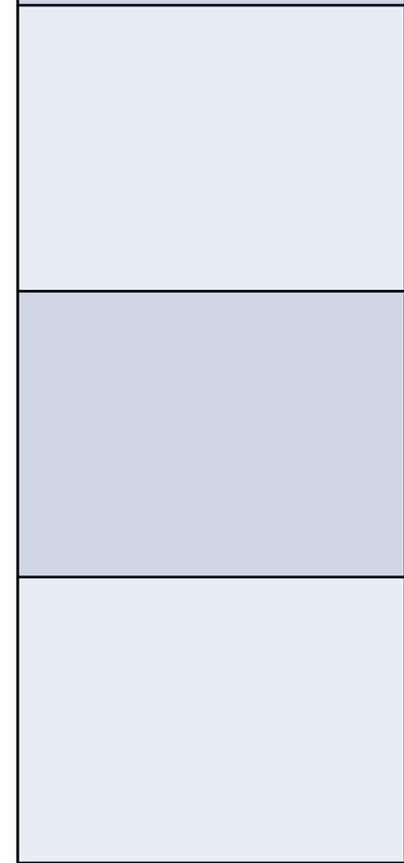
3 кг

3 кг

50\$



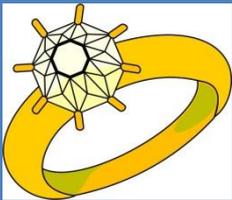
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0																						
1																						
2					50																	
3																						
4																						
5																						



1. Сначала заполним очевидное:  
нулевой столбец и нулевую строку.

*Как?*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0																						
1																						
2																						
3																						
4																						
5																						



40\$  
3 кг



3 кг 50\$



60\$  
5 кг



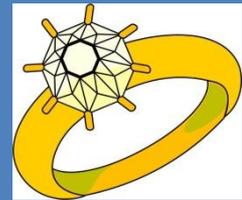
100\$  
12 кг



200\$

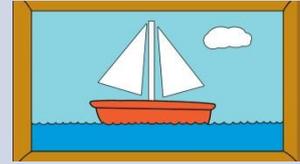
1. Сначала заполним очевидное:  
нулевой столбец и нулевую строку.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
3	0																					
4	0																					
5	0																					



**40\$**  
**3 кг**

**3 кг** **50\$**



**60\$**



**5 кг**

**100\$**



**12 кг**

**200\$**



1. Сначала заполним очевидное: нулевой столбец и нулевую строку.
2. Будем заполнять оставшуюся часть сверху-вниз, слева-направо.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0																						
2	0																						
3	0																						
4	0																						
5	0																						



40\$

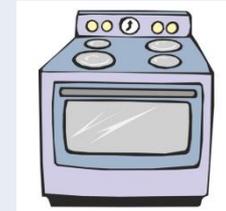
3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

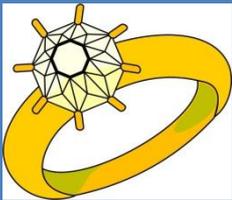
12 кг



200\$

1. Сначала заполним очевидное: нулевой столбец и нулевую строку.
2. Будем заполнять оставшуюся часть сверху-вниз, слева-направо, выражая каждый следующий ответ через предыдущие.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0																						
2	0																						
3	0																						
4	0																						
5	0																						



40\$  
3 кг

3 кг 50\$



60\$



5 кг

100\$



12 кг

200\$



Допустим, мы вычислили всё до  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

Сейчас вычисляем  $P[i][j]$ .

	0	1	2	3	4	5	6	$j$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
$i$	0																					
4	0																					
5	0																					



40\$

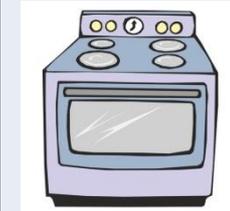
3 кг

3 кг

50\$



60\$

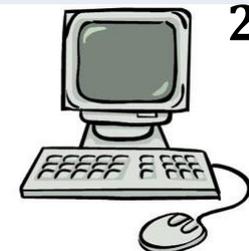


5 кг



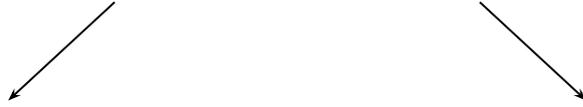
100\$

12 кг



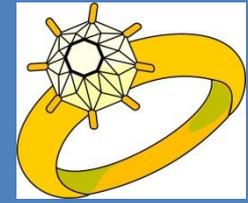
200\$

Есть два варианта



Взять вещь №*i*  
(последнюю)

	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																				
2	0																				
<b>i</b>	0																				
4	0																				
5	0																				



40\$

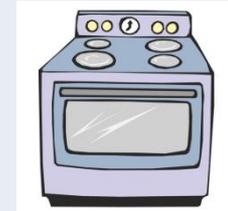
3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



200\$

Есть два варианта

Взять вещь №**i**  
(последнюю)

Не брать вещь  
№**i**

	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
<b>i</b>	0																					
4	0																					
5	0																					



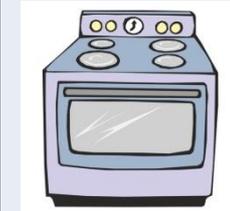
40\$

3 кг



3 кг

50\$



60\$

5 кг



100\$

12 кг



200\$

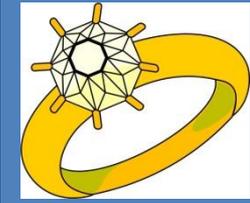
Есть два варианта

Взять вещь №*i*  
(последнюю)

Не брать вещь  
№*i*

Вычислим эти значения и выберем **наибольшее**

	0	1	2	3	4	5	6	j	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																				
2	0																				
i	0																				
4	0																				
5	0																				



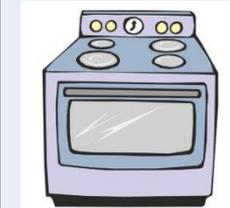
40\$

3 кг



3 кг

50\$



60\$

5 кг



100\$

12 кг



200\$

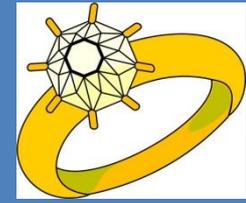
Есть два варианта

Взять вещь №i

Не брать вещь  
№i

Только, если влезает.  
*Что это значит?*

	0	1	2	3	4	5	6	j	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																				
2	0																				
i	0																				
4	0																				
5	0																				



40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



200\$

Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

Только, если влезает

$$w_i \leq j$$

	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
<b>i</b>	0																					
4	0																					
5	0																					



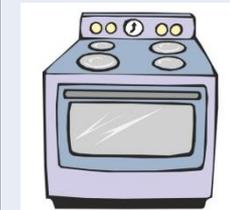
40\$

3 кг



3 кг

50\$



60\$

5 кг



100\$

12 кг



200\$

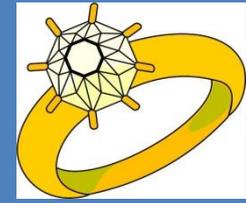
Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

Мы точно  
зарабатываем:  $c_i$

	0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
<i>i</i>	0																					
4	0																					
5	0																					



40\$

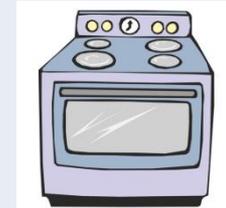
3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



200\$

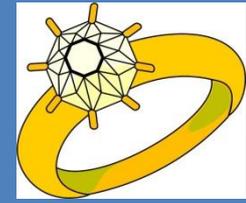
Есть два варианта

Взять вещь №i

Не брать вещь №i

Плюс, у нас осталось еще свободное место...

	0	1	2	3	4	5	6	j	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																				
2	0																				
i	0																				
4	0																				
5	0																				



40\$

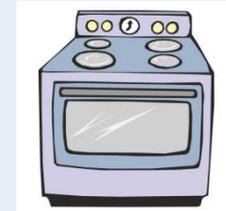
3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



200\$

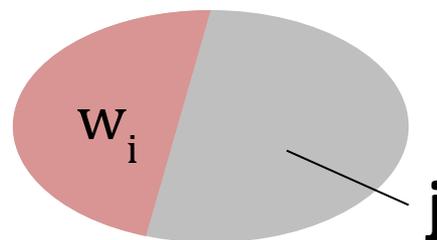
Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

Плюс, у нас осталось еще свободное место...

Сколько?



	0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
<i>i</i>	0																					
4	0																					
5	0																					

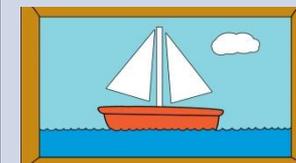


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



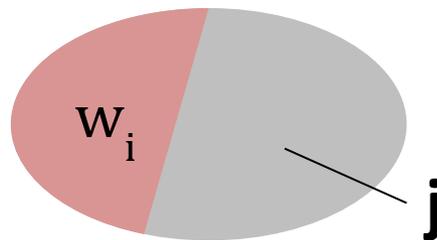
200\$

Есть два варианта

Взять вещь №**i**

Не брать вещь №**i**

$$j - w_i$$



	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0																						
2	0																						
<b>i</b>	0																						
4	0																						
5	0																						

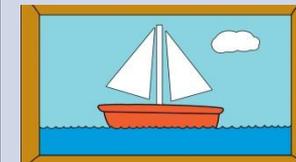


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



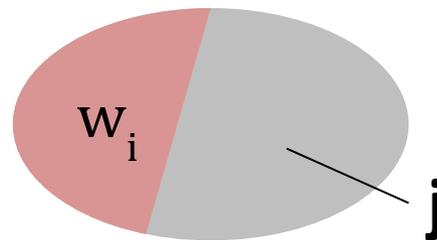
200\$

Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

*Как его оптимально  
заполнить?*



	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
<b>i</b>	0																					
4	0																					
5	0																					

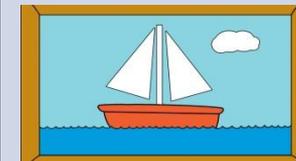


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



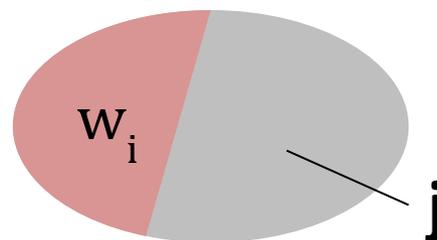
200\$

Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

Таблица *P* знает  
ответ на этот  
вопрос!



	0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
<i>i</i>	0																					
4	0																					
5	0																					

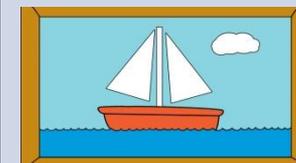


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



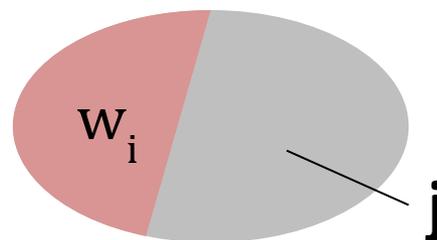
200\$

Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

*В ячейке P[...][...] уже лежит лучшая сумма*



	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
<b>i</b>	0																					
4	0																					
5	0																					

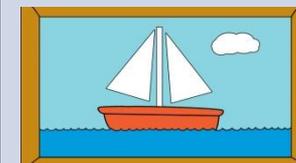


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



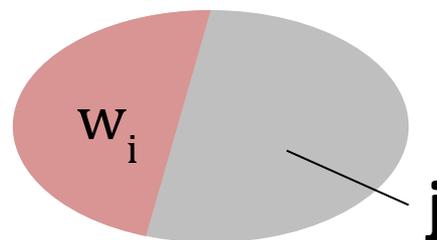
200\$

Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

*В ячейке  $P[...][j-w_i]$  уже лежит лучшая сумма*



	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
<b>i</b>	0																					
4	0																					
5	0																					

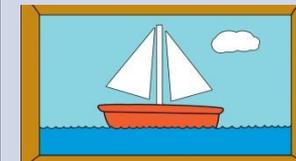


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



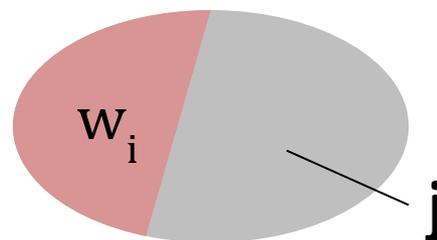
200\$

Есть два варианта

Взять вещь № $i$

Не брать вещь № $i$

*В ячейке  $P[i-1][j-w_i]$   
уже лежит лучшая  
сумма*



	0	1	2	3	4	5	6	$j$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
$i$	0																					
4	0																					
5	0																					

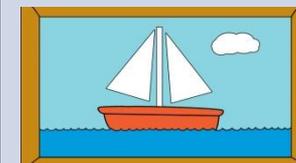


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



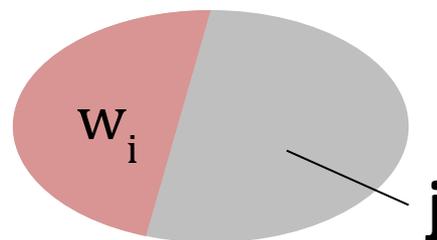
200\$

Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

Итого:  
 $c_i + P[i-1][j-w_i]$ ,  
 если влезет



	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
<b>i</b>	0																					
4	0																					
5	0																					

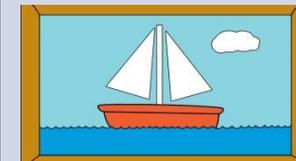


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



200\$

Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

Итого:  
 $c_i + P[i-1][j-w_i]$ ,  
 если влезет

	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0																						
2	0																						
<b>i</b>	0																						
4	0																						
5	0																						



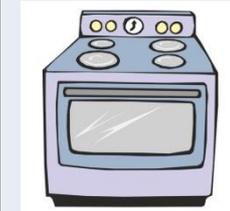
40\$

3 кг



3 кг

50\$



60\$

5 кг



100\$

12 кг

200\$

Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

Итого:  
 $c_i + P[i-1][j-w_i]$ ,  
 если влезет

В ячейке  $P[...][...]$   
 уже есть ответ на  
 эту задачу

	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0																						
2	0																						
<b>i</b>	0																						
4	0																						
5	0																						

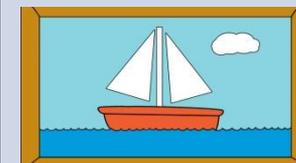


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



200\$

Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

Итого:  
 $c_i + P[i-1][j-w_i]$ ,  
 если влезет

В ячейке  $P[i-1][...]$   
 уже есть ответ на  
 эту задачу

	0	1	2	3	4	5	6	<i>j</i>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0																					
<i>i</i>	0																					
4	0																					
5	0																					

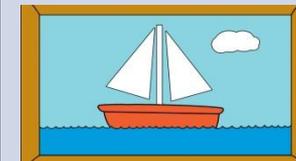


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



200\$

Есть два варианта

Взять вещь №*i*

Не брать вещь №*i*

Итого:  
 $c_i + P[i-1][j-w_i]$ ,  
 если влезет

В ячейке  $P[i-1][j]$   
 уже есть ответ на  
 эту задачу

	0	1	2	3	4	5	6	<b>j</b>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0																					
2	0			x				x														
<b>i</b>	0																					
4	0																					
5	0																					

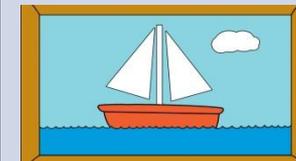


40\$

3 кг

3 кг

50\$



60\$



5 кг



100\$

12 кг



200\$