Математический анализ
(3 семестр)

Лекции – 26 часов
Практика -30 часов
РГР (Кузнецов – диф.уравнения, кратные интегралы)
Зачет (без оценки)
Условие автомата –
1) Посещение практик и выполнение самостоятельных
2) Выполнение РГР

Преподаватель – доцент Усманова Анжелика Рашитовна, к.ф.м.н
kfmn2004@mail.ru

Структура курса

- Функции многих переменных (продолжение,повторение)
- Кратные интегралы
- Дифференциальные уравнения
- Криволинейные интегралы (если успеем)

Функции нескольких переменных.

Пусть каждой точке $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in V\subset R^n$ сопоставлено число y. Тем самым, определена функция n переменных $y=f(M)$ или $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – в дальнейшем основной объект изучения. Используется и такое обозначение: $f:V\to R$.

Функцией двух переменных называется закон, по которому каждой паре значений независимых переменных x, y (аргументов) из области определения соответствует значение зависимой переменной z (функции).

Данную функцию обозначают следующим образом: $z = f(x;y)$ либо $z = z(x;y)$, или же другой стандартной буквой: $u = f(x;y),\quad u = u(x;y)$

Поскольку упорядоченная пара значений «икс» и «игрек» определяет *точку на плоскости*, то функцию также записывают через $z = f(M)$, где M – точка плоскости XOY с координатами $(x;y)$.

Геометрический смысл функции двух переменных очень прост. Если функции одной переменной $y = f(x)$ соответствует определённая линия на плоскости (например, $y = x^2$ – всем знакомая школьная парабола), то график функции двух переменных $z = f(x;y)$ располагается в трёхмерном пространстве. На практике чаще всего приходится иметь дело с **поверхностью**, но иногда график функции может представлять собой, например, пространственную прямую (ые) либо даже единственную точку.

С элементарным примером поверхности мы хорошо знакомы ещё из курса **аналитической геометрии** – это **плоскость** $Ax + By + Cz + D = 0$. Предполагая что $C \neq 0$, уравнение легко переписать в функциональном виде:

$$Cz = -Ax - By - D \quad \Rightarrow \quad z = f(x;y) = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

Важнейший атрибут функции 2 переменных – это уже озвученная *область определения*.

Областью определения функции двух переменных $z = f(x;y)$ называется множество *всех* пар $(x;y)$, для которых существует значение z.

Графически область определения представляет собой **всю плоскость** XOY **либо её часть**.

Так, областью определения функции $z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$ является вся координатная плоскость XOY – по той причине, что **для любой** точки $(x;y)$ существует значение z.

Пример 1

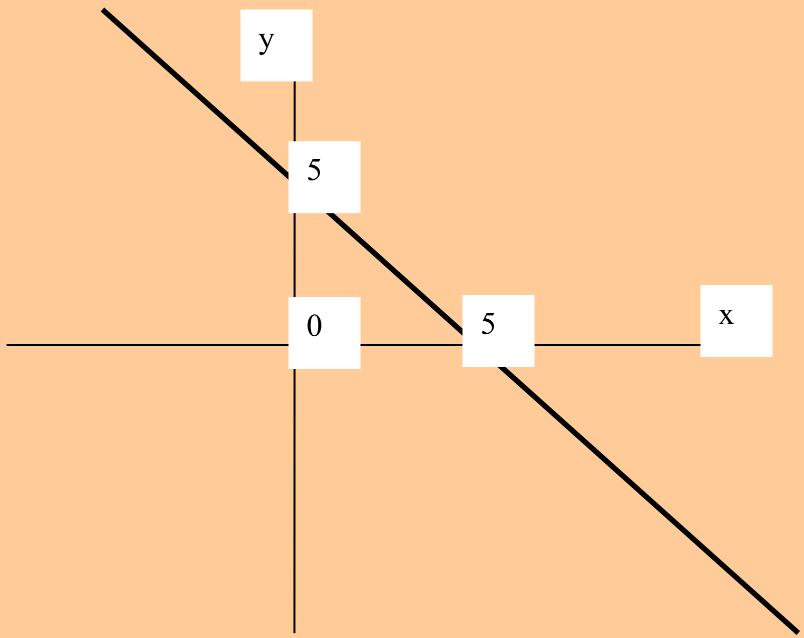
Найти область определения функции $z = \dfrac{x^2 + 4xy - 3}{x + y - 5}$

Решение: так как знаменатель не может обращаться в ноль, то:

$x + y - 5 \neq 0$

$y \neq 5 - x$

Ответ: вся координатная плоскость XOY кроме точек, принадлежащих прямой $y = 5 - x$



Пример 2

Найти область определения функции $f(x;y)=\sqrt{3y+2}$

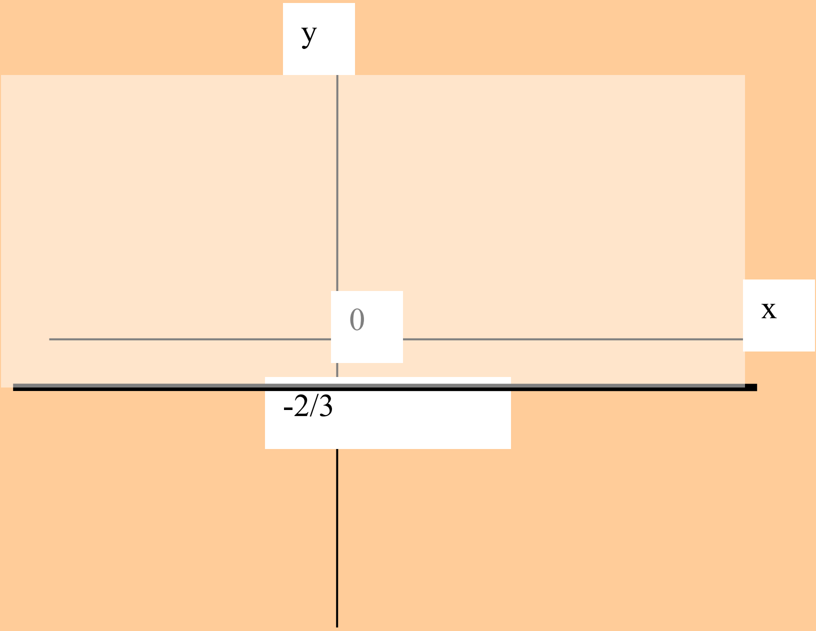
Решение: подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$3y+2\ge 0$$

$$3y\ge -2$$

$$y\ge -\frac{2}{3}$$

Ответ: полуплоскость $y\ge -\frac{2}{3}$



Пример 3

Найти область определения функции $u = -\dfrac{2y}{\sqrt{x-1}}$

Самостоятельно!

Пример 4

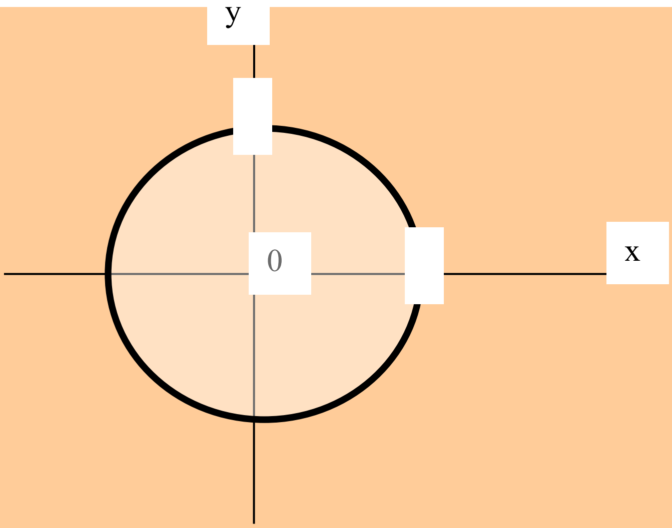
Найти область определения функции и изобразить её на чертеже

$$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$$

Решение: легко понять, что такая формулировка задачи **требует** выполнения чертёжа (даже если область определения очень проста). Но сначала аналитика: подкоренное выражением должно быть неотрицательным: $x^2 + y^2 - 5 \geq 0$ и, учитывая, что знаменатель не может обращаться в ноль, неравенство становится строгим:

$$x^2 + y^2 - 5 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 5$$

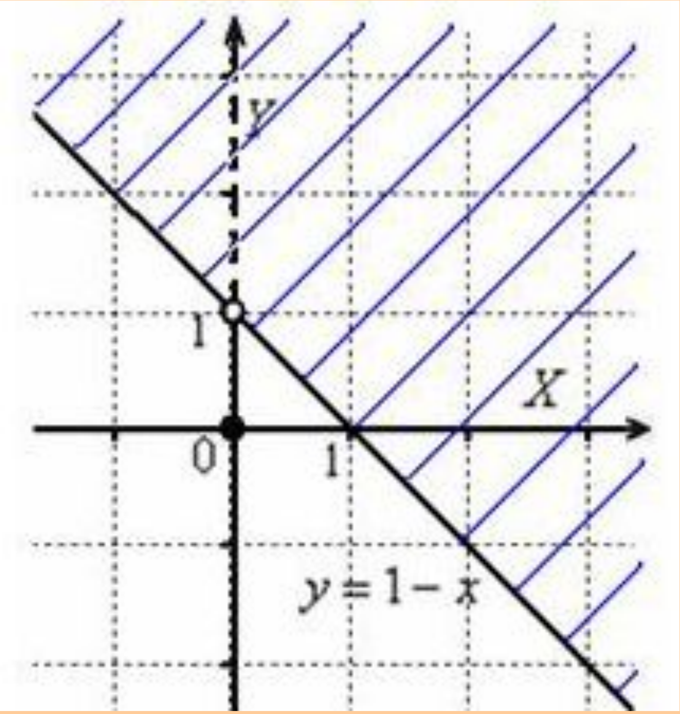


Пример 6

Найти область определения функции

$$z = \frac{\sqrt{x+y-1}}{x}$$

Решение: подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $x+y-1 \geq 0$ и знаменатель не может равняться нулю: $x \neq 0$. Таким образом, область определения задаётся системой $\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$.



Линии уровня

Функция $z = f(x;y)$ в своей области определения представляет собой пространственный график, для определённости и бОльшей наглядности будем считать, что это тривиальная поверхность. **Что такое линии уровня**? Образно говоря, линии уровня – это горизонтальные «срезы» поверхности на различных высотах. Данные «срезы» или правильнее сказать, *сечения* проводятся плоскостями $z = C = const$, **после чего проецируются на плоскость** XOY.

Определение: линией уровня функции $z = f(x;y)$ называется линия $f(x;y) = C$ на плоскости XOY, в каждой точке которой функция сохраняет постоянное значение: $z = C = const$.

Таким образом, линии уровня помогают выяснить, как выглядит та или иная поверхность – причём помогают без построения трёхмерного чертежа!

Найти и построить несколько линий уровня графика функции
$z = (x-2)^2 + (y-1)^2$

Решение: исследуем форму данной поверхности с помощью линий уровня. Для удобства развернём запись «задом наперёд»: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = z$

Очевидно, что в данном случае «зет» (высота) заведомо не может принимать отрицательные значения *(так как сумма квадратов неотрицательна)*. Таким образом, поверхность располагается в верхнем полупространстве (над плоскостью XOY).

Поскольку в условии не сказано, на каких конкретно высотах нужно «срезать» линии уровня, то мы вольнЫ выбрать несколько значений «зет» на своё усмотрение.

Исследуем поверхность на нулевой высоте, для этого поставим значение $z = 0$ в равенство $(x-2)^2 + (y-1)^2 = z$:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$$

Решением данного уравнения является точка $(2; 1)$. То есть, при $z = 0$ **линия уровня представляет собой точку**.

Поднимаемся на единичную высоту и «рассекаем» нашу поверхность $(x-2)^2+(y-1)^2=z$ плоскостью $z=1$ *(подставляем $z=1$ в уравнение поверхности)*:

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

Таким образом, **для высоты $z=1$ линия уровня представляет собой окружность с центром в точке $(2;1)$ единичного радиуса**.

Напоминаю, что **все «срезы» проецируются на плоскость XOY**, и поэтому у точек я записываю две, а не три координаты!

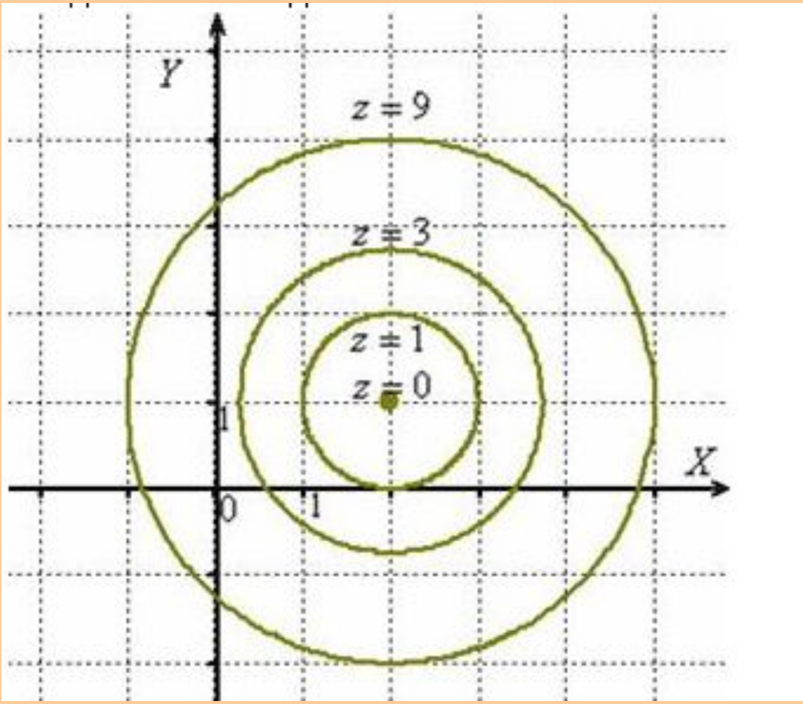
Теперь берём, например, плоскость $z=3$ и «разрезаем ей» исследуемую поверхность $(x-2)^2+(y-1)^2=z$ *(подставляем $z=3$ в уравнение поверхности)*:

$(x-2)^2+(y-1)^2=3$

Таким образом, **для высоты $z=3$ линия уровня представляет собой окружность с центром в точке $(2;1)$ радиуса $\sqrt{3}$**.

И, давайте построим ещё одну линию уровня, скажем, для $z=9$:

$(x-2)^2+(y-1)^2=9$ – **окружность с центром в точке $(2;1)$ радиуса 3**.



Нетрудно понять, что другие линии уровня рассматриваемой поверхности тоже представляют собой окружности, при этом, чем выше мы поднимаемся вверх (увеличиваем значение «зет») – тем больше становится радиус. Таким образом, **сама поверхность** представляет собой бесконечную чашу с яйцевидным дном, вершина которой расположена на плоскости XOY. Эта «чаша» вместе с осью OZ «выходит прямо на вас» из экрана монитора, то есть вы смотрите в её дно.

Функции многих переменных. Частные производные и частные дифференциалы

Для упрощения записи и изложения ограничимся сейчас случаем функции трех переменных. Однако, все нижеизложенное будет справедливо и для функций от любого числа переменных.

Итак, пусть в некоторой области пространства задана функция $u = f(x, y, z)$; возьмем в этой области точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Если мы зафиксируем постоянные значения $y = y_0$ и $z = z_0$ и будем изменять x, то наша функция $u = f(x, y_0, z_0)$ будет функцией от одной переменной x. Тогда можно поставить вопрос о вычислении её производной в точке $x = x_0$. Придадим этому значению x_0 приращение Δx, тогда функция получит приращение

$\Delta_x u = \Delta_x f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$,

которое можно назвать *частным приращением* (по x), поскольку оно вызвано изменением значения лишь одной переменной. По определению производной, она есть предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Эта производная называется *частной производной функции* $f(x, y, z)$ *по* x *в точке* (x_0, y_0, z_0).

Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$$

$$u'_x \qquad f'_x(x_0, y_0, z_0)$$

$$D_x u \qquad D_x f(x_0, y_0, z_0)$$

Обозначения частной производной (по x)

Аналогично

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}.$$

Частная производная (по y)

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}; \quad u'_y, \ f'_y(x_0, y_0, z_0); \quad D_y u, \ D_y f(x_0, y_0, z_0).$$

Обозначения частной производной (по y)

Примеры

Пример 1.1 Найти частные производные для функции $f(x, y) = 2x^3y^2 + 2x + 4y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y^2 + 2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3y + 4$$

Пример 1.2 Найти частные производные для функции $f(x, y) = x^y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

Пример 1.3 Записать функцию, выражающую сторону треугольника через две другие стороны и угол. Найти все частные производные этой функции.

Произведение частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ на произвольное приращение Δx называется *частным дифференциалом по x функции u*; его обозначают символом

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x.$$

Если и здесь *под дифференциалом dx независимой переменной x разуметь приращение Δx*, то предыдущая формула напишется так:

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx.$$

Аналогично,

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy, \qquad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz.$$

Таким образом, мы видим, что можно было бы и частные производные представить в виде дробей

$$\frac{d_x u}{dx}, \quad \frac{d_y u}{dy}, \quad \frac{d_z u}{dz},$$

но при непременном условии указывать, по какой переменной берется дифференциал.

Полное приращение функции

Если, исходя из значений $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ независимых переменных, придать всем этим переменным некоторые приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, то функция $u = f(x, y, z)$ получит приращение

$\Delta u = \Delta f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$,

которое называется **полным приращением функции**.

Для функции одной переменной $y = f(x)$ для приращения была справедлива формула

$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$,

где α зависит от Δx и $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. А $f'(x_0)$ НЕ зависит от Δx !

Аналогичное выражение для функции трех переменных будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = \\ = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + \\ + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z,\end{aligned} \quad \text{(формула 1.4)}$$

$\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\chi \to 0$ при $\Delta y \to 0$, $\gamma \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Если частные производные в некоторой точке существуют и непрерывны, то функция в этой точке непрерывна. Обратное неверно!

Определение. Функция $f(x,y,z)$ называется дифференцируемой в точке (x,y,z), если её полное приращение имеет вид

$$\Delta f(x,y,z) = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z \qquad (4)$$

где A,B,C **НЕ ЗАВИСЯТ** от $\Delta x, \Delta y, \Delta z$,

а $\lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0, \Delta z\to 0} \alpha =$

$= \lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0, \Delta z\to 0} \beta =$

$= \lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0, \Delta z\to 0} \gamma = 0$

Или другая форма – функция дифференцируема, если её полное приращение представимо в виде

$$\Delta f(x,y,z) = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ (5)

Теорема. Если функция дифференцируема в точке M(x,y,z), то в этой точке существуют частные производные, причем

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Определение. Линейная часть формул (4) и (5) называется **полным дифференциалом** и обозначается

$$df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z =$$
$$= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot dz \qquad \textbf{(1.6)}$$

или

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz. \qquad \textbf{(1.6*)}$$

При этом каждое из слагаемых в формуле (1.6) называется **частным дифференциалом** . Таким образом, полный дифференциал есть сумма частных дифференциалов. А приращения независимых переменных равны (как и в случае функции одной переменной) дифференциалам.

Пример. **Найти частные дифференциалы по каждой из независимых переменных и полный дифференциал функции**

$$u = \sin(x + y) - \cos(z - x)$$

Решение.

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x + y) - \sin(z - x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x + y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sin(z - x),$$

тогда частные дифференциалы будут

$d_x u = \left(\cos(x + y) - \sin(z - x)\right)dx$, $d_y u = \cos(x + y)dy$, $d_z u = \sin(z - x)dz$

А полный дифференциал

$$du = \left(\cos(x + y) - \sin(z - x)\right)dx + \cos(x + y)dy + \sin(z - x)dz$$

Применение дифференциала при приближенных вычислениях

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) = f(x_0, y_0, z_0) + \Delta f$$

$$\Delta f \approx df = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + f'_z \cdot \Delta z$$

Пример 1.12. Вычислить приближенно $1{,}02^{0{,}97}$

Решение. Рассмотрим функцию двух переменных

$f(x,y) = x^y$

Пусть $x_0 = 1, \Delta x = 0{,}02$ и $y_0 = 1, \Delta y = -0{,}03$

Найдем $f(x_0, y_0) = 1^1 = 1$

Найдем частные производные (см. пример 1.2) в точке (x_0, y_0);

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = y \cdot x^{y-1} = 1 \cdot 1^{1-1} = 1 \quad , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = x^y \cdot \ln x = 1^1 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

Тогда

$$1{,}02^{0{,}97} \approx f(x_0, y_0, z_0) + f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y = 1 + 1 \cdot 0{,}02 + 0 \cdot (-0.03) = 1{,}02$$