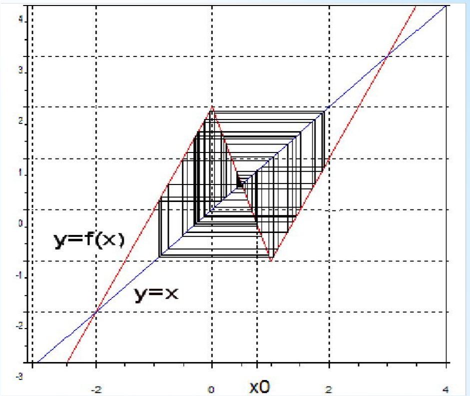
Динамика нелинейного тентообразного отображения с параметром

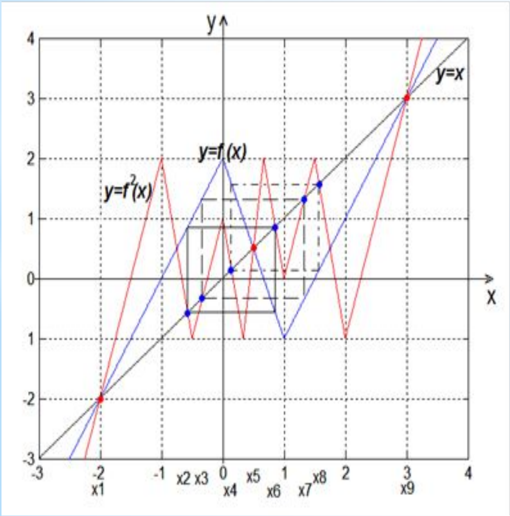
Работу выполнила ученица 10 класса
МБОУ «Высокогорская школа №2»
Уразова Диляра
Научные руководители Аксанова И.И.,
Насырова Н.И.

Актуальность темы исследования

2. Построение орбиты начальной точки $x_0 = 0,77$



Для многих природных явлений, изучение которых классическими методами просто невозможно, могут быть построены математические модели, описывающие эти явления как динамические системы.



Огромное количество приложений динамических систем в биологии и других отраслях знаний, изучение проблемы изменения численности биологических популяций, исследование динамики различных кусочно-непрерывных отображений определяют ***актуальность темы исследовательской работы***.

Математические популяционные модели

1) Логистическая модель $f(x)=rx(1-x)$, $x \in [0;1]$, $r \neq 0$.

2) Модель Рикера (Ricker) $f(x)=rxe^{-x}$, $x \geq 0$, $r \neq 0$.

3) Модель Бивертона-Холта (Beverton-Holt)

$$f(x) = \frac{rx}{1+x^{\gamma}}, \quad x \geq 0,\ r \neq 0,\ \gamma > 0.$$

4) Модель Дерисо-Шнуте (Deriso-Schnute)

$$f(x)=r(1-\gamma x)^{1/\gamma}, \quad \gamma < 0.$$

5) Симметрическая палатка $f(x) = \begin{cases} rx, & x \leq 1/2 \\ r(1-x), & x > 1/2 \end{cases}$

6) Асимметрическая палатка $f(x) = \begin{cases} 1+ax, & x \leq 0 \\ 1-bx, & x \geq 0 \end{cases}$

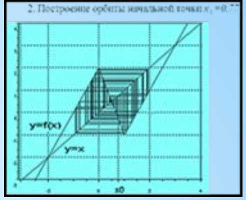
7) Криволинейная палатка $f(x) = \begin{cases} ax^{\alpha}, & 0 \leq x \leq 1 \\ ax^{\beta}, & x > 1 \end{cases}$

Цели исследовательской работы:

* ***Основная цель нашей работы*** - исследовать динамику нелинейного тентообразного отображения

* $$f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{a}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$$

Задачи исследовательской работы:



- \- изучить литературу по теме исследования;
- \- найти неподвижные точки отображения и определить их тип в зависимости от значений параметра;
- \- найти двупериодические точки и определить их тип в зависимости от значений параметра;
- \- для всех значений параметра ***a*** описать динамику отображения ***f(x)*** на интервалах действительной оси (Ox), заданных неподвижными и двупериодическими точками.

Основные понятия дискретных динамических систем

Простейшая дискретная динамическая система определяется непрерывной функцией $f(x)$, называемой итерируемой. Она отображает некоторое множество X в множество X. Задается также начальная точка x_0 из множества X. В дальнейшем мы будем в качестве X брать множество R всех вещественных чисел. Возьмем точку $x \in R$ и найдем значение функции в этой точке: $f(x)$.

Определение 1. Переход от x к $f(x)$ называется ***итерацией***.

Пусть x_0 – начальная точка. Тогда $x_1=f(x_0)$ –первая итерация точки x_0. Находя итерацию точки x_1, получаем $x_2=f(x_1)=f(f(x_0))=f^{(2)}(x_0)$, она называется второй итерацией точки x_0. Далее находим

$x_3=f(x_2)=f(f(f(x_0)))=f^{(3)}(x_0)$ – третью итерацию точки x_0,

…,

$x_n=f(x_{n-1})=f(f(f(\ldots(f(x_0)\ldots)))=f^{(n)}(x_0)$ – n-ю итерацию точки x_0,

…

Процесс построения итераций называется ***итерационным***.

Определение 2. Последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется ***орбитой начальной точки*** $\boldsymbol{x_0}$.

Орбиту можно записать: $x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to \ldots \to x_n \to \ldots$

Определение 3. δ-окрестностью точки x называется интервал $(x-\delta,\ x+\delta)$. Множество называется окрестностью точки x, если оно является δ-окрестностью точки x для некоторого $\delta>0$.

Определение 4. Последовательность точек x_n сходится к точке x, если вне любой окрестности точки x лежит только конечное число точек последовательности.

Определение 5. Последовательность точек x_n сходится к ∞, если в любой окрестности точки 0 лежит только конечное число точек последовательности.

Определение 6. Последовательность точек x_n сходится к $+\infty$, если x_n сходится к ∞ и в отрицательной части числовой оси лежит только конечное число точек последовательности.

Определение 7. Последовательность точек x_n сходится к $-\infty$, если x_n сходится к ∞ и в положительной части числовой оси лежит только конечное число точек последовательности.

Определение 8. Точка *x* называется ***неподвижной точкой*** отображения *f(x)*, если она является решением уравнения $f(x)=x$.

Определение 9. Неподвижная точка *x* называется ***притягивающей*** или ***аттрактором***, если орбиты всех точек из некоторой её окрестности $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta>0$, сходятся к ней.

Определение 10. Неподвижная точка *x* называется ***отталкивающей*** или ***репеллером***, если орбиты всех точек из некоторой её окрестности $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta>0$, удаляются от этой точки.

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$. Напомним, что *орбитой* точки x_0 называется последовательность $x_0 \to f(x_0) \to f^{(2)}(x) \to f^{(3)}(x) \to \ldots \to f^{(n)}(x) \to \ldots$. Если орбита точки имеет вид $x_0 \to x_1 = f(x_0) \to x_0 \to x_1 \to \ldots$, где $x_1 \neq x_0$, то она называется ***двупериодической***.

Определение 11. Точка x_0 называется ***двупериодической***, если ее орбита двупериодическая, т.е. x_0 является решением уравнения $f^{(2)}(x) = x$ и не является неподвижной точкой.

Определение 12. Двупериодическая орбита $x_0 \to x_1 = f(x_0) \to x_0 \to x_1 \to \ldots$ называется ***притягивающей*** или ***аттрактором***, если орбиты всех точек из некоторой окрестности данной двупериодической орбиты сходятся к ней.

Определение 13. Двупериодическая орбита $x_0 \to x_1 = f(x_0) \to x_0 \to x_1 \to \ldots$ называется ***отталкивающей*** или ***репеллером***, если орбиты всех точек из некоторой окрестности данной двупериодической орбиты, удаляются от неё

Определение 14. Если $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to \ldots$ – орбита точки x_0 и последовательность итераций x_n сходится к точке x', то орбита называется ***сходящейся*** (к точке x').

Определение 15. Если $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to \ldots$ – орбита точки x_0 и последовательность итераций x_n сходится к бесконечности, то орбита называется ***расходящейся***.

Определение 16. Если x_0 – неподвижная точка функции $f(x)$, то орбита этой точки $x_0 \to x_0 \to x_0 \to \ldots$ называется ***постоянной***.

Определение 17. Орбита называется ***периодической с периодом p (p-периодической)***, если для любого натурального числа n $(n \in N)$ $x_{n+p}=x_n$, где p – период орбиты и первые p точек различны.

Определение 18. Орбита называется ***в конечном итоге периодической,*** если она будет периодической после удаления нескольких первых итераций.

Определение 19. В конечном итоге неподвижной точкой называется точка, которая после конечного числа итераций становится неподвижной.

Рассмотрим некоторую вещественно-значную функцию [illegible] = [illegible]([illegible]) одной переменной [illegible] [illegible].

Утверждение 1. Если x неподвижная точка $f(x)$, функция имеет производную $f'(x)$ в точке x и $|f'(x)| < 1$, то x – притягивающая точка.

Утверждение 2. Если x неподвижная точка $f(x)$, функция имеет производную $f'(x)$ в точке x и $|f'(x)| > 1$, то x - отталкивающая точка.

Утверждение 3. Если точка x_0 –- двупериодическая и существует производная $(f^{(2)}(x_0))'$ второй итерации в точке x_0, то в случае $|(f^{(2)}(x_0))'| < 1$ точка x_0- притягивающая, а если $|(f^{(2)}(x_0))'| > 1$, то x_0 – отталкивающая.

Утверждение 4. Пусть функция [illegible] определена на множество R и удовлетворяет следующим условиям на интервале [illegible] = [illegible], [illegible], где [illegible], [illegible] [illegible]: p-неподвижная точка функции [illegible]; [illegible] < [illegible] < [illegible] для любого [illegible] [illegible]. Тогда интервал [illegible] = ([illegible], [illegible])- входит в бассейн притяжения неподвижной точки p.

Утверждение 5. Пусть функции [illegible] не имеет двупериодических орбит на некотором интервале J, тогда на этом же интервале J у функции [illegible]([illegible]) не существуют периодические орбиты более высокого периода, чем 2.

Исследование динамики нелинейного тентообразного отображения с параметром

* В работе проведено полное исследование динамики криволинейной палатки, заданной отображением с одним параметром:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{a}{x}, x \geq 1 \end{cases}$$

по следующему плану:

1. Нахождение неподвижных точек определение их типа
2. Нахождение второй итерации $f^{(2)}(x)$.
3. Нахождение двупериодических точек и определение их типа.
4. Описание динамики отображения на промежутках, заданных разбиением числовой прямой неподвижными и двупериодическими точками.
5. Построение паутинных диаграмм для различных значений х.
6. Общие выводы о динамике исследуемого отображения.

2.1. Исследование динамики $f(x)$ при $a<0$

Рассмотрим случай $a<0$ и $f(x)=\begin{cases} ax^2, & 0\le x\le 1\\ \frac{a}{x}, & x\ge 1\end{cases}$.

Построим график $f(x)$ и паутинные диаграммы некоторых точек при $a=-2$,

то есть $f(x)=\begin{cases} -2x^2, & 0\le x\le 1\\ \frac{-2}{x}, & x\ge 1\end{cases}$ (рис.1).

1) Найдем неподвижные точки $f(x)$, то есть корни уравнения $f(x)=x$

$\begin{cases} ax^2=x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{a}{x}=x\\ x\ge 1\end{cases}$

$\begin{cases} x(ax-1)=0\\ 0\le x\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases} x^2=a\\ x\ge 1\end{cases}$

$x_1=0$ или $x_2=\frac{1}{a}$ или $\varnothing$, так как $a<0$

Так как $a<0$, то $x_2\notin[0;1]$.

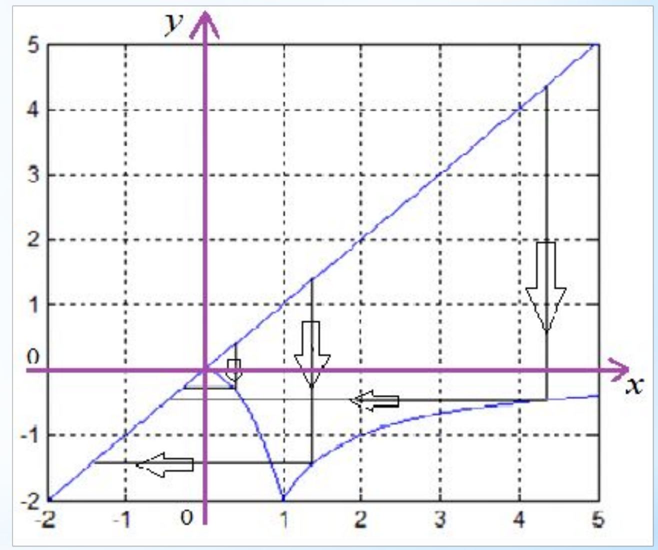


Рис. 1

Итак, при $a<0$ существует единственная неподвижная точка $x_1=0$.

2) Рассмотрим $\forall x>0$, тогда $f(x)<0$, то есть $f(x)$ не принадлежит области определения отображения и орбиты всех точек, кроме $x_1=0$, вырождены.

2.2. Исследование динамики $f(x)$ при a=0

Построим график [illegible] и паутинные диаграммы некоторых точек при [illegible] = 0, то есть [illegible] = 0, при [illegible] ≥ 0 (рис. 2) .

1) Найдем неподвижные точки [illegible], то есть корни уравнения [illegible] = [illegible]

Получаем [illegible] = 0 неподвижная точка.

2) Найдем в конечном итоге неподвижные точки [illegible], то есть корни уравнения [illegible] = [illegible]. Имеем тождество 0 = 0.

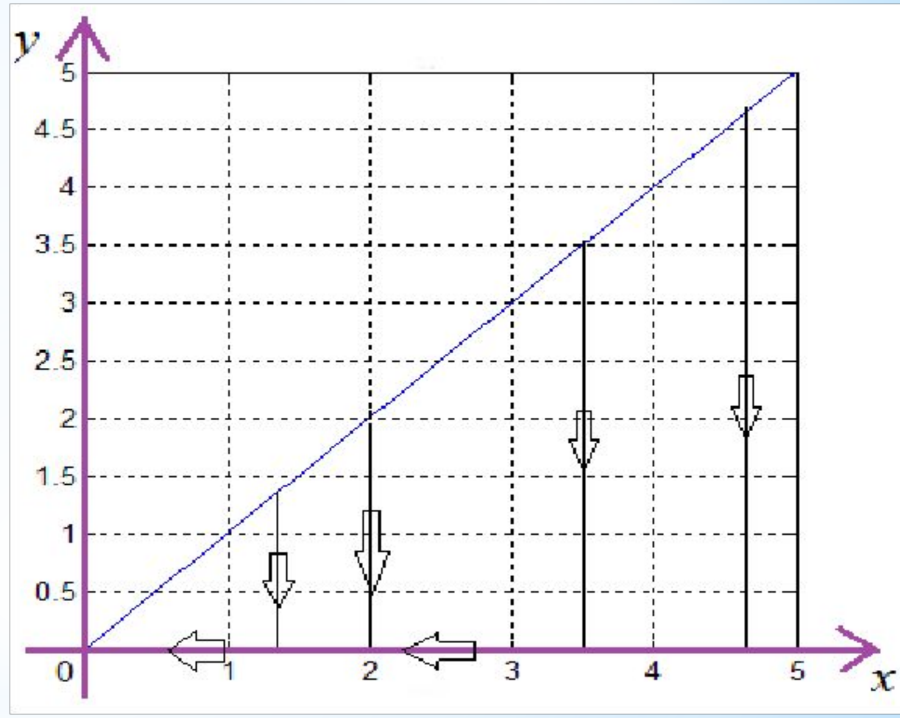


Рис. 2

Значит оно верно для любых x из области определения [illegible]. Исключая неподвижную точку [illegible] = 0 , получаем, что [illegible] > 0 является в конечном итоге неподвижной точкой.

2.3. Исследование динамики $f(x)$ при $0<a<1$

Построим график $f(x)$ и паутинные диаграммы некоторых точек при $a = \frac{1}{2}$, то есть $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2x}, & x \ge 1 \end{cases}$ (рис. 3) .

Найдем неподвижные точки, решая уравнение $f(x) = x$

$$\begin{cases} ax^2 = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{a}{x} = x \\ x \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{a} \end{cases} \\ 0 \le x \le 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - a = 0 \\ x \ge 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} \begin{cases} x_3 = \sqrt{a} \\ x_4 = -\sqrt{a} \end{cases} \\ x \ge 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \quad <=> \quad \varnothing$$

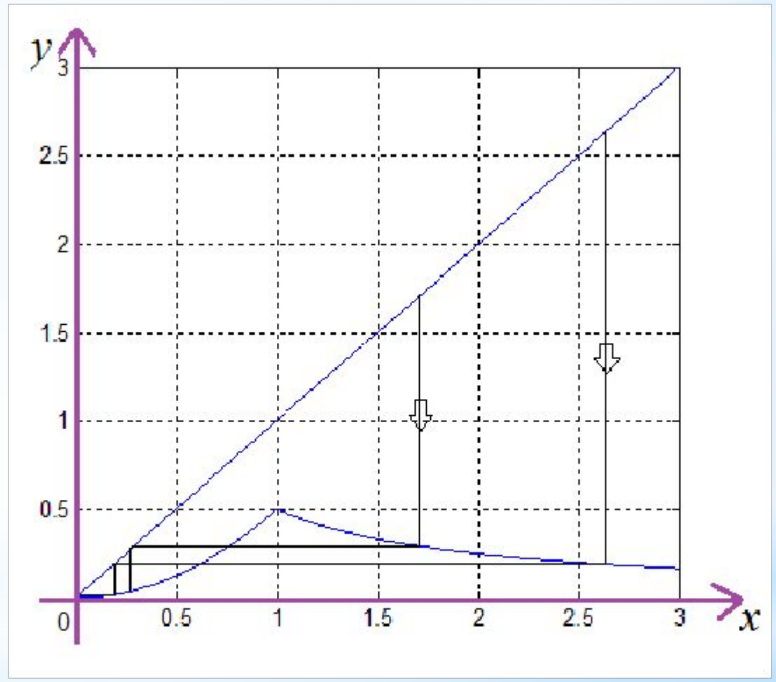


Рис. 3

Таким образом, при $0 < a < 1$ $f(x)$ имеет единственную неподвижную точку $x_1 = 0$.

2.4. Исследование динамики $f(x)$ при a=1

Рассмотрим случай $a = 1$, тогда $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$ (рис. 4) .

1) Найдем неподвижные точки $f(x)$, то есть корни уравнения $f(x) = x$

Рассмотрим два случая:

а) $\begin{cases} x^2 = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

$f(x)$ имеет 2 неподвижные точки.

б) $\begin{cases} \frac{1}{x} = x \\ x \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x = 1 = x_2 \\ x = -1 \end{cases}$

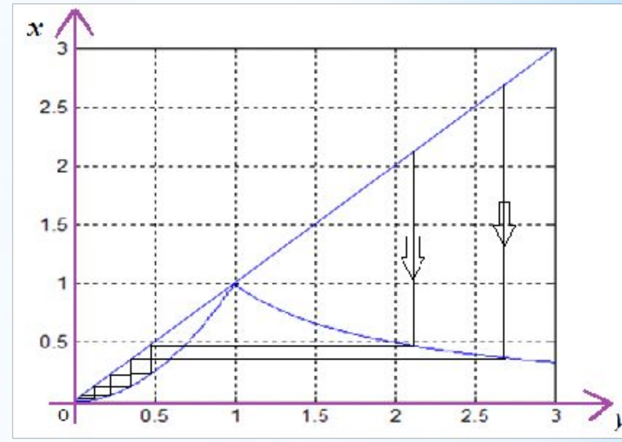


Рис. 4

Итак, $f(x)$ имеет 2 неподвижные точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

2) Определим тип неподвижных точек. Для этого найдем производную функции и ее модуль сравним с единицей.

Рассмотрим две неподвижные точки.

а) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $|f'(0)| = |2 \cdot 0| < 1$ => неподвижная точка $x_1 = 0$ - притягивающая по Утверждению 1.

б) $f(x) = x^2$, $|f'(1)| = |2| > 1$ => неподвижная точка $x_2 = 1$ - отталкивающая по Утверждению 2.

1.5. Исследование динамики $f(x)$ при a>1

Наибольший интерес представляет динамика отображения

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{a}{x}, & x \ge 1 \end{cases} \quad \text{при } a > 1 .$$

2.5.1. Нахождение неподвижных точек отображения

Решаем уравнение $f(x)=x$.

1) $f(x) = f_1(x) = ax^2, 0 \le x \le 1.$

$$\begin{cases} ax^2 = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(ax - 1) = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

а) $\begin{cases} x = 0 \\ 0 \le x \le 1 \\ a > 1 \end{cases}$. Получаем неподвижную точку $x_1 = 0$ при $a>1$.

б) $ax = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ 0 \le x \le 1 \\ a > 0 \end{cases}$. Получаем неподвижную точку $x_2 = \frac{1}{a}$ при $a>1$.

2) $f(x) = f_2(x) = \frac{a}{x}, \ x \ge 1$

$$\begin{cases} \frac{a}{x} = x \\ x \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{a - x^2}{x} = 0 \\ x \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{(\sqrt{a} - x)(\sqrt{a} + x)}{x} = 0 \\ x \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{-(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})}{x} = 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

$$<=> \begin{cases} \begin{cases} x_3 = \sqrt{a} \\ x_4 = -\sqrt{a} \end{cases} \\ x \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x_3 = \sqrt{a} \\ a \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x_3 = \sqrt{a} - \text{неподвижная точка} \\ a > 1 \end{cases}$$

Итак, при $a > 1$ существуют 3 неподвижные точки $x_1 = 0, \ x_2 = \frac{1}{a}, \ x_3 = \sqrt{a}.$

2.5.2. Нахождение в конечном итоге неподвижных точек

Решим уравнение ▯▯▯▯ = ▯$_{н.т.}$.

1) Рассмотрим неподвижную точку ▯$_1$ = 0.

▯) ▯▯▯▯ = ▯$_1$ = 0, при 0 ≤ ▯ ≤ 1.

Решением системы ▯ { ▯▯▯^{2} = 0 ; 0 ≤ ▯ ≤ 1 ; ▯ > 1 } является неподвижная точка ▯$_1$ = 0.

б) ▯▯▯▯ = ▯$_1$ = 0 при ▯ ≥ 1

▯ { ▯/▯ = 0 ; ▯ ≥ 1 ; ▯ > 1 } Система не имеет решений.

1) Рассмотрим неподвижную точку $\text{[illegible]}_2 = \frac{1}{\text{[illegible]}}$.

$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]}_2 = \frac{1}{\text{[illegible]}}$$

а) $\begin{cases} \text{[illegible]}^2 = \frac{1}{\text{[illegible]}} \\ \text{[illegible]} > 1 \\ 0 \le \text{[illegible]} \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{\text{[illegible]}^2\text{[illegible]}^2 - 1}{\text{[illegible]}} = 0 \\ \text{[illegible]} > 1 \\ 0 \le \text{[illegible]} \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} (\text{[illegible]} - 1)(\text{[illegible]} + 1) = 0 \\ \text{[illegible]} > 1 \\ 0 \le \text{[illegible]} \le 1 \end{cases} <=>$

$<=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \text{[illegible]} = -\frac{1}{\text{[illegible]}} \\ \text{[illegible]} > 1 \\ 0 \le \text{[illegible]} \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \text{[illegible]} = \frac{1}{\text{[illegible]}} \\ \text{[illegible]} > 1 \\ 0 \le \text{[illegible]} \le 1 \end{cases} \end{array} \right. <=> \begin{cases} \text{[illegible]}_2 = \frac{1}{\text{[illegible]}} - \text{неподвижная точка.} \\ \text{[illegible]} > 1 \end{cases}$

Здесь нет в конечном итоге неподвижных точек.

б) $\begin{cases} \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} = \frac{1}{\text{[illegible]}} \\ \text{[illegible]} > 1 \\ \text{[illegible]} \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \text{[illegible]} = \text{[illegible]}^2 \\ \text{[illegible]} > 1 \\ \text{[illegible]}^2 \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \text{[illegible]}_4 = \text{[illegible]}^2 \\ \text{[illegible]} > 1 \end{cases}$

При $\text{[illegible]} > 1$ существует в конечном итоге неподвижная точка $\text{[illegible]}_4 = \text{[illegible]}^2$, причем её орбита имеет вид $\text{[illegible]}_4 \text{[illegible]} \text{[illegible]}_2 \text{[illegible]} \text{[illegible]}_2 \text{[illegible]} \text{[illegible]}$

1) Рассмотрим неподвижную точку $\boxtimes_3 = \xi\overline{\boxtimes}$ и решим уравнение

$\boxtimes\boxtimes\boxtimes\boxtimes = \boxtimes_3 = \xi\overline{\boxtimes}$.

а) $\begin{cases} \boxtimes\boxtimes\boxtimes^2 = \xi\overline{\boxtimes} \\ \boxtimes\boxtimes > 1 \\ 0 \le \boxtimes\boxtimes \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \boxtimes^2\boxtimes\boxtimes^4 = \boxtimes\boxtimes \\ \boxtimes\boxtimes > 1 \\ 0 \le \boxtimes\boxtimes \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \boxtimes\boxtimes\boxtimes^4 = 1 \\ \boxtimes\boxtimes > 1 \\ 0 \le \boxtimes\boxtimes \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \boxtimes\boxtimes = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi\overline{\boxtimes}}} \\ \boxtimes\boxtimes > 1 \\ 0 \le \boxtimes\boxtimes \le 1 \end{cases} <=>$

$<=> \begin{cases} \boxtimes\boxtimes = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi\overline{\boxtimes}}} \\ \boxtimes\boxtimes > 1 \\ 0 \le \frac{1}{\sqrt[4]{\xi\overline{\boxtimes}}} \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \boxtimes_5 = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi\overline{\boxtimes}}} \\ \boxtimes\boxtimes > 1 \end{cases}$ в конечном итоге неподвижная точка

б) $\begin{cases} \frac{\boxtimes}{\boxtimes} = \xi\overline{\boxtimes\boxtimes} \\ \boxtimes\boxtimes \ge 1 \\ \boxtimes\boxtimes > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \boxtimes\boxtimes = \frac{\boxtimes}{\xi\overline{\boxtimes}} \\ \boxtimes\boxtimes \ge 1 \\ \boxtimes\boxtimes > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \boxtimes\boxtimes = \xi\overline{\boxtimes} = \boxtimes_3 \\ \boxtimes\boxtimes \ge 1 \\ \boxtimes\boxtimes > 1 \end{cases}$ неподвижная точка

Таким образом, при $\boxtimes\boxtimes > 1$ существует 2 в конечном итоге неподвижные точки $\boxtimes_4 = \boxtimes^2$ и $\boxtimes_5 = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi\overline{\boxtimes}}}$.

2.5.3. Определение типа неподвижных точек

При ⊠⊠ > 1 существуют 3 неподвижные точки ⊠⊠$_1 = 0$, ⊠⊠$_2 = \frac{1}{⊠⊠}$ и ⊠⊠$_3 =$ ξ $\overline{⊠⊠}$.

1. Неподвижная точка ⊠⊠$_1 = 0$, тогда ⊠⊠⊠⊠ = ⊠⊠⊠^{2}, $0 \le$ ⊠⊠ ≤ 1.

⊠′⊠⊠⊠ $= 2$⊠⊠⊠ ȁ⊠′(0)ȁ $= 0 < 1$, значит, при ⊠⊠ > 1 неподвижная точка ⊠⊠$_1 = 0$ является притягивающей.

2. Неподвижная точка ⊠⊠$_2 = \frac{1}{⊠⊠}$, ⊠⊠ > 1 => $0 <$ ⊠⊠$_2 < 1$, поэтому ⊠⊠⊠⊠ = ⊠⊠⊠^{2}.

Тогда ⊠′⊠⊠⊠ $= 2$⊠⊠⊠, ⊠′ ⊠$\frac{1}{⊠⊠}$⊠ $= 2$, ⊠⊠′ ⊠$\frac{1}{⊠⊠}$⊠⊠ = ȁ2ȁ > 1.

При ⊠⊠ > 1 неподвижная точка ⊠⊠$_2 = \frac{1}{⊠⊠}$ является отталкивающей.

Ранее найдена в конечном итоге неподвижная точка ⊠⊠$_4 =$ ⊠⊠^{2}. Ее орбита имеет вид ⊠⊠$_4$ ⊠ ⊠⊠$_2$ ⊠ ⊠⊠$_2$ ⊠ ⊠ . В этом случае ⊠⊠$_4$ имеет тот же вид, что и неподвижная точка ⊠⊠$_2$, то есть ⊠⊠$_4 =$ ⊠⊠^{2} является отталкивающей.

1. Рассмотрим неподвижную точку $x_3 = \sqrt{a}$.

$f(x) = \frac{a}{x}$, $x \geq 1$, так как $a > 1$

$$f'(x) = \left(\frac{a}{x}\right)' = (a x^{-1})' = a(-1)x^{-2} = \frac{-a}{x^2}$$

$|f'(\sqrt{a})| = \left|\frac{-a}{(\sqrt{a})^2}\right| = \left|\frac{-a}{a}\right| = |-1| = 1$. Значит, неподвижная точка $x_3 = \sqrt{a}$ не является ни отталкивающей, ни притягивающей.

2.5.4. Нахождение второй итерации отображения $f^{(2)}(x)$

Значения $f(x)$ могут попадать в любой из промежутков задания функции $f(x)$: $0 \le x \le 1$ или $x \ge 1$. От этого будет зависеть нахождение второй итерации функции $f(x) = \begin{cases} \xi x^2, 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, \ x \ge 1 \end{cases}$.

1) $0 \le x \le 1$

$$f^{(2)}(x) = f_1(f_1(x)) = f(\xi x^2)^2 = \xi^3 x^4, \text{ при условии } \begin{cases} \xi > 1 \\ \xi x^2 \ge 0 \\ \xi x^2 \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}.$$

Решая систему, мы получаем, что при $\xi > 1$ $f^{2}(x) = \xi^3 x^4$ для $0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{\xi}}$.

2) $f^{2}(x) = f_2(f_1(x)) = \frac{1}{\xi x^2} = \frac{1}{x^2}$, если выполняются условия $\begin{cases} f_1(x) \ge 1 \\ 0 \le x \le 1 \\ \xi > 1 \end{cases}$

В результате получаем, что при $\xi > 1$ $f^{(2)}(x) = \frac{1}{x^2}$ для $\frac{1}{\sqrt{\xi}} \le x \le 1$.

3) $□ \geq 1$

$□^2□□□ = □_1□□_2□□□□ = □□\frac{□}{□}□^2 = \frac{□^3}{□^2}$, если

$$\begin{cases} 0 \leq □_2(□) \leq 1 \\ □ \geq 1 \\ □ > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{□}{□} \leq 1 \\ \frac{□}{□} \geq 0 \\ □ \geq 1 \\ □ > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □ > 1 \\ □ \geq □ \\ □ \geq 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □ > 1 \\ □ \geq □ \end{cases}$$

Получаем, что при $□ > 1$ $□^{□2□}□□□ = \frac{□^3}{□}$ для $□ \geq □$.

4) $□^{□2□}(□) = □_2(□_2□□□) = \frac{□□□}{□} = □$ при условии

$$\begin{cases} \frac{□}{□} \geq 1 \\ □ \geq 1 \\ □ > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □ \geq □ \\ □ \geq 1 \\ □ > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □ \leq □ \\ □ \geq 1 \\ □ > 1 \end{cases}$$

Получаем, что при $□ > 1$ $□^{□2□}□□□ = □$ для $1 \leq □ \leq □$.

Итак, при $□ > 1$ вторая итерация данного отображения имеет вид:

$□^{□2□}□□□ = □^3□^4$ для $0 \leq □ \leq \frac{1}{\xi □}$,

$□^{□2□}□□□ = \frac{1}{□^2}$ для $\frac{1}{\xi □} \leq □ \leq 1$,

$□^{□2□}□□□ = □$ для $1 \leq □ \leq □$.

$□^{□2□}□□□ = \frac{□^3}{□^2}$ для $□ \geq □$,

2.5.5. Нахождение двупериодических точек

Решим уравнение $f^{(2)}(x)=x$ и отбросим из множества его корней неподвижные точки.

1) При $0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{a}}$ $f^{(2)}(x) = a^3x^4$, где $a > 1$.

$$\begin{cases} f^{(2)}(x) = x \\ a > 1 \\ 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{a}} \end{cases} <=> \begin{cases} a^3x^4 = x \\ a > 1 \\ 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{a}} \end{cases} <=> \begin{cases} x(a^3x^3 - 1) = 0 \\ a > 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x(a^3x^3 - 1) = 0 \\ a > 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$x = 0 = x_1$ неподвижная точка, которая не является двупериодической точкой.

$(ax)^3 - 1 = 0 => (ax - 1)((ax)^2 + ax + 1) = 0 => ax = 1$

$x = \frac{1}{a}$, так как $a > 1$, то $\frac{1}{a} = x_2$ и является неподвижной точкой.

Второй сомножитель $(a^2x^2 + ax + 1)$ имеет $D = a^2 - 4a^2 = 3a^2 < 0$, поэтому не имеет корней.

Таким образом, в первом случае двупериодических точек нет.

2) при $\frac{1}{\xi□} \le □ \le 1$ $\quad □^{(2)}(□) = \frac{1}{□^2}$

$$\begin{cases} □^{(2)}(□) = □ \\ □ > 1 \\ \frac{1}{□} \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{1}{□^2} = □ \\ □ > 1 \\ \frac{1}{\xi□} \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □^3 = 1 \\ □ > 1 \\ \frac{1}{\xi□} \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □ = 1 \\ □ > 1 \\ \frac{1}{\xi□} \le □ \le 1 \end{cases}$$

Проверим удовлетворяет ли $□ = 1$ условию $\frac{1}{\xi□} \le □ \le 1$

$$\begin{cases} □ > 1 \\ □ \ge \frac{1}{\xi□} \\ 1 \le 1 \end{cases} \text{ истина}$$

Вывод: $□_6 = 1$ двупериодическая точка.

Вычислим $□(□_6)$: $□(□_6) = □(1) = □ = □_8$; $0 \le □ \le 1$.

Найдем $□(□) = \frac{□}{□} = 1$ $(□ \ge 1)$ $□ = □ > 1$. Выпишем орбиту $□_6 = 1 \to □ \to 1 \to □ \to 1 \ldots$

Получаем двупериодические точки $□_6 = 1$ и $□_8 = □$.

3) при 1 ≤ □ ≤ □ □2□□□□ = □

□2□□□□ = □ □ = □ 0 = 0

□□ > 1 < = > □□ > 1 < = > □□ > 1

1 ≤ □ ≤ □ 1 ≤ □ ≤ □ 1 ≤ □ ≤ □

Отбросим неподвижную точку □3 = ξ□ при заданных условиях □ > 1, 1 ≤ □ ≤ □

Получаем □ □ □ □1; ξ□) □ (ξ□; □□ является двупериодической точкой при □ > 1.

4) при $\square \geq \square$ $\square^{(2)}(\square) = \frac{\square^3}{\square^2}$

$$\begin{cases} \square^{(2)}(\square) = \square \\ \square > 1 \\ \square \geq \square \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{\square^3}{\square^2} = \square \\ \square > 1 \\ \square \geq \square \end{cases} <=> \begin{cases} \square^3 - \square^3 = 0 \\ \square > 1 \\ \square \geq \square \end{cases} <=> \begin{cases} (\square - \square)(\square^2 + \square\square + \square^2) = 0 \\ \square > 1 \\ \square \geq \square \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} \square = \square \\ \square > 1 \\ \square \geq \square \end{cases}$ или $\square^2 + \square\square + \square^2 = 0$

$\square = \square^2 - 4\square^2 = -3\square^2 < 0$, нет решений.

Следовательно, $\square_8 = \square$ – двупериодическая точка.

Итак, при $\square > 1$ $\square \square \in (1; \sqrt{\square}) \cup (\sqrt{\square}; \square)$ является двупериодиоческой точкой, а $\square \square \in (0; 1) \cup (\square; +\infty)$ не имеют двупериодических орбит.

1.5.6. Определение типа двупериодических точек

Отображение [illegible] $= \begin{cases} [illegible]^2, 0 \le [illegible] \le 1 \\ \frac{[illegible]}{[illegible]}, [illegible] \ge 1 \end{cases}$ имеет двупериодические точки только при [illegible] > 1 на промежутке [illegible]$1; \xi$ [illegible] ξ [illegible]. В этом случае [illegible]^2[illegible] $=$ [illegible]. Найдем [illegible]^2[illegible]$'$ $=$ [illegible] $= 1$. Значит о типе двупериодических орбит по Утверждению 3 ничего сказать нельзя. Но так как [illegible] $1; \xi$ [illegible] ξ [illegible] определяет двупериодическую орбиту, значит эти орбиты не являются ни притягивающими, ни отталкивающими.

1.5.6. Динамика отображения на различных интервалах

При исследовании динамики отображения $f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{a}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$ при условии $a > 1$ мы нашли неподвижные, в конечном итоге неподвижные и двупериодические точки. Эти точки разбивают область определения $f(x)$ на интервалы:

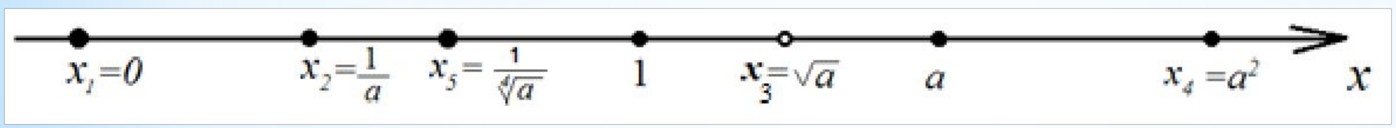


Рис. 5

Изучим динамику $f(x)$ на каждом из этих интервалов.

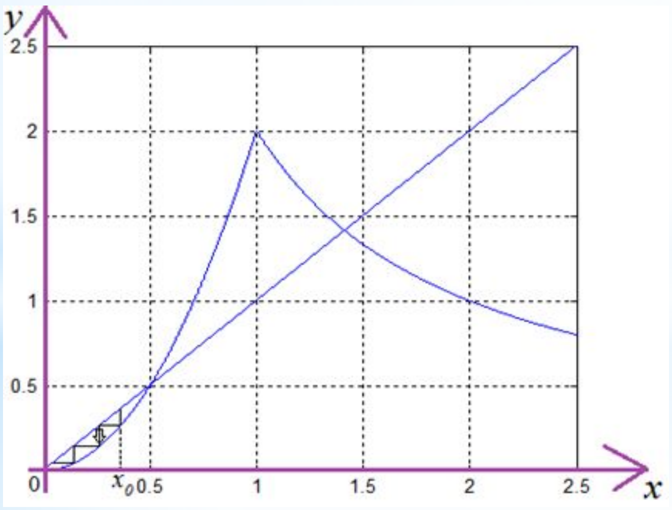
1. ***Рассмотрим интервал*** $x \in \left(0; \frac{1}{a}\right)$**.**

Теорема 3. Орбита любой точки $x \in \left(0; \frac{1}{a}\right)$ притягивается к неподвижной точке $x_1 = 0$, при $a > 1$.

1.*Рассмотрим интервал* $x \in \left(0; \frac{1}{a}\right)$.

Теорема 3. Орбита любой точки $x \in \left(0; \frac{1}{a}\right)$ притягивается к неподвижной точке $x_1 = 0$, при $a > 1$.

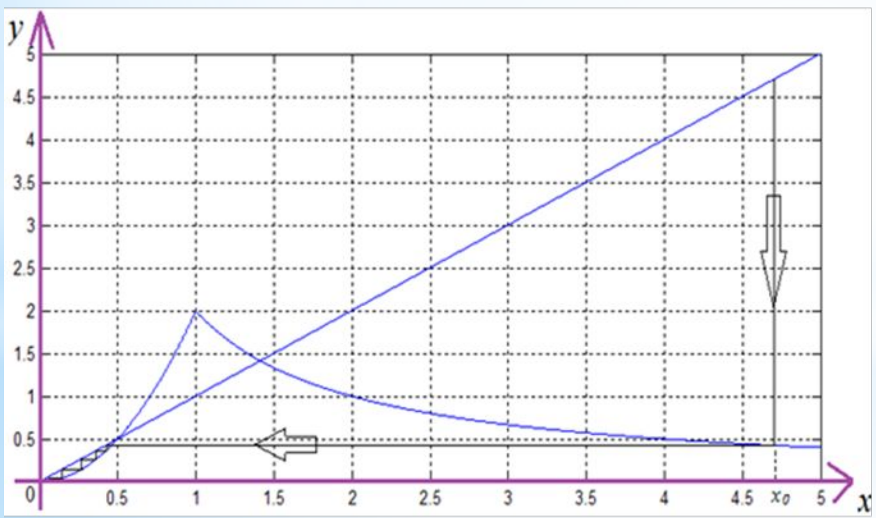
Так как условия выполняются, то интервал $I = \left(0; \frac{1}{a}\right)$ входит в бассейн притяжения неподвижной точки $x_1 = 0$.



1. ***Рассмотрим интервал*** $(\boldsymbol{a^2};\ +\infty)$ **.**

Теорема 4. Орбита любой точки $x \in (a^2; +\infty)$ попадает в бассейн притяжения неподвижной точки $x_1 = 0$.

Итак, первая итерация произвольной точки $x \in (a^2; +\infty)$ попадает в интервал $\left(0; \frac{1}{a}\right)$, который входит в бассейн притяжения неподвижной точки $x_1 = 0$ по Теореме 3. Значит орбиты всех точек интервала $(a^2; +\infty)$ будут притягиваться к неподвижной точке $x_1 = 0$.



1. ***Рассмотрим объединение интервалов*** [illegible]; ξ [illegible]) [illegible] (ξ [illegible]; [illegible],

где точки 1 и [illegible] образуют двупериодическую орбиту, а [illegible]$_5$ = ξ [illegible] является неподвижной точкой. При изучении двупериодических точек отображения мы доказали:

Теорему 5. Любая точка [illegible] [illegible]1; ξ [illegible]) [illegible] (ξ [illegible]; [illegible] является двупериодической.

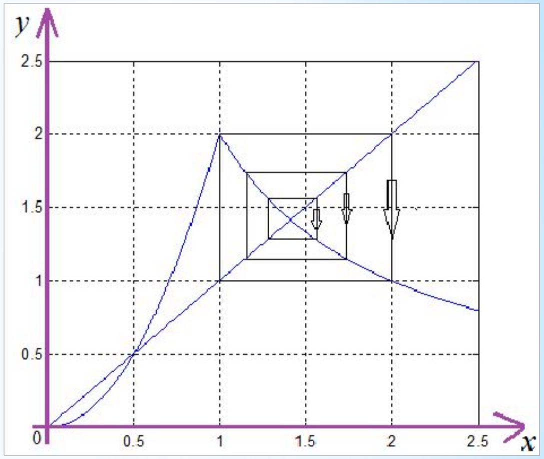


Рис. 8

1. ***Рассмотрим интервал*** □□ □ (□□; □□$^{□□}$) .

Теорема 6. Если □ □□ □ □□; □□^{2}□, то □□(□□) попадает в интервал □$\frac{1}{□□}$; 1□ .

Доказательство. Рассмотрим □□ < □□ < □□^{2} . Так как □□ > 1 , то □□ > □□ > 1 . Значит □□□□□ = $\frac{□□}{□□}$. Из положительного неравенства □□ < □□ < □□^{2} следует, что $\frac{1}{□□^2} < \frac{1}{□□} < \frac{1}{□□}$. Умножим неравенство на параметр □□ и получим

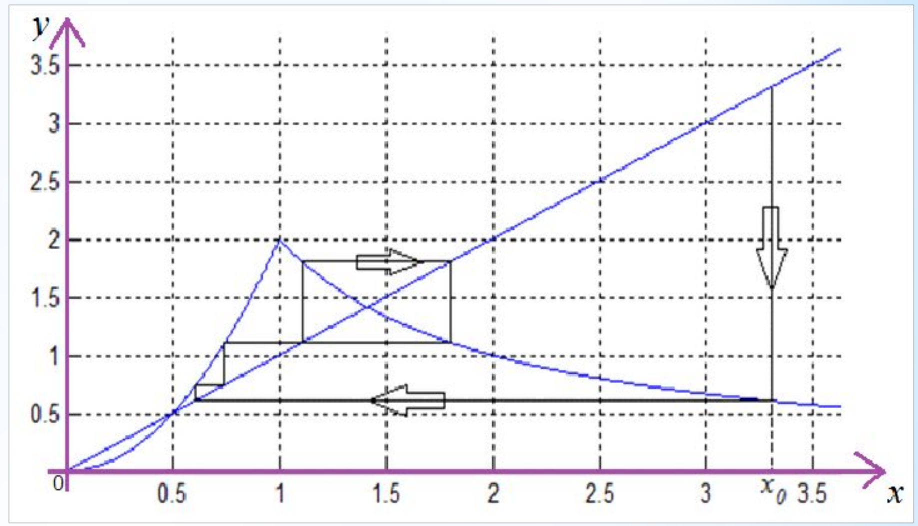
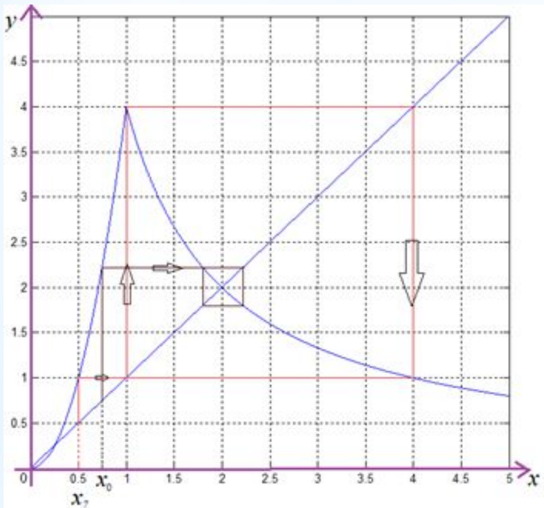


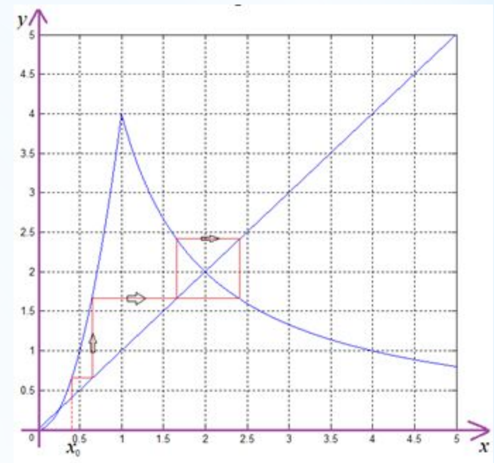
Рис. 9

$\frac{1}{□□} < \frac{□□}{□□} < 1$ или $\frac{1}{□□} <$ □□(□□) < 1 . Таким образом, □□(□□) □ □$\frac{1}{□□}$; 1□ для □ □□ □ □□; □□^{2}□ .

1. *Рассмотрим интервал* $\left(\frac{[illegible]}{[illegible]}; [illegible]\right)$.

Теорема 7. Если [illegible] $\left(\frac{1}{[illegible]}; 1\right)$, то [illegible] попадает в $(1; [illegible])$.





Таким образом, [illegible] $\left(\frac{1}{[illegible]}; 1\right)$ имеет [illegible] $(1; [illegible])$, то есть любая точка [illegible] из интервала $\left(\frac{1}{[illegible]}; 1\right)$ будет в конечном итоге неподвижной или в конечном итоге двупериодической.

2.6. Общие выводы о динамике исследуемого отображения

Исследование динамики нелинейного тентообразного отображения $\square\square\square\square\square = \begin{cases} \square\square\square^2, 0 \le \square \le 1 \\ \frac{\square}{\square}, \square \ge 1 \end{cases}$ включило в себя нахождение неподвижных и двупериодических, в конечном итоге неподвижных и двупериодических точек, определение их типов, изучение интервалов с интересной динамикой отображения для всех действительных значений параметра a.

Мы получили, следующие результаты:

при $a<0$ существует единственная неподвижная точка $x_1=0$, а орбиты всех точек $x>0$ вырождены, т.к. $f(x)$ не попадает в область определения заданной функции;

при $a=0$ существует единственная неподвижная точка $x_1=0$, а орбиты всех $x>0$ притягиваются к x_1 и при этом точки x являются в конечном итоге неподвижными;

при $0< a <1$ неподвижная точка $x_1=0$ является глобальным аттрактором и притягивает орбиты любых точек x из интервала $(0; +\infty)$;

при $a=1$ существует 2 неподвижные точки, причем $x_1=0$ притягивает орбиты всех точек области определения, кроме неподвижной отталкивающей точки $x_2=1$.

При $a>1$ отображение имеет более сложную динамику. Опишем её.

Отображение имеет три неподвижные точки, причем $x_1=0$ является притягивающей, $x_2=1/a$ – отталкивающей, а $x_3=\xi\overline{\square}$ не является ни притягивающей, ни отталкивающей. Две в конечном итоге неподвижные точки отображения $\square_4 = \square^2$ и $\square_5 = \frac{1}{4\xi\overline{\square}}$, соответственно являются отталкивающей и ни притягивающей, ни отталкивающей.

Объединение интервалов $\left(0;\frac{1}{a}\right)\cup(a^2;+\infty)$ входит в бассейн притяжения неподвижной точки $x_1 = 0$.

Орбиты всех точек x отрезка $[1,a]$ являются двупериодическими, за исключением неподвижной точки $x_3=\xi(\bar{a})$.

$x \in \left(\frac{1}{a};1\right)\cup(a;a^2)$ будет в конечном итоге неподвижной или в конечном итоге двупериодической точкой.

Заключение

В исследовательской работе изучены основные понятия и утверждения теории дискретных динамических систем.

Самостоятельно проведено полное исследование динамики нелинейного тентообразного отображения $f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{a}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$, зависящего от параметра *a*. Найдены неподвижные и двупериодические точки, определены их типы. Полностью описано поведение орбит всех точек из области определения отображения в зависимости от параметра *a*, пробегающего все множество действительных чисел.

Полученные результаты могут быть использованы при изучении и прогнозировании численности биологической популяции, математическая модель которой строится как дискретная динамическая система, заданная отображением [illegible]. Исследование динамики [illegible] позволяет сделать вывод, что наиболее благоприятные условия для жизнедеятельности и развития популяции будут при значениях параметра $a>1$ и для любых значений переменной x из интервала [illegible]. В этом случае численность популяции, в конечном итоге, будет колебаться между двумя значениями [illegible] и [illegible] (двупериодическая орбита), что и обеспечивает её стабильность.

При построении графиков функций, паутинных диаграмм и орбит мы применяли пакет прикладных математических программ MatLab.

Список литературы

1. Кроновер Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. - Москва: Техносфера, 2006.

2. Lindstrom T., Thunberg H. An elementary approach to dynamics and bifurcations of skew tent maps // Journal of Difference Equations and Applications. – 2008. – V. 14. – P. 819 – 833.

3. Sushko I., Gardini L. Degenerate bifurcations and border collisions in piecewise smooth 1D and 2D maps // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2010. – V. 20, No. 7. – P. 2045 – 2070.

4. Зеель Э.О. Математический анализ. Часть 1. Пределы. Непрерывность. - Архангельск: ПГУ, 1998.

5. Электронный курс д-ра математики Г. Сёдербакка (G. Soederbacka, Abo Akademi, Finland): www.abo.fi/~gsoderba

6. Говорухин В.Н., Цибулина В.Г. Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX. Уч. курс. – С.-Пб.: Питер, 2001.

7. Рикер У. Е. Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяций рыб: Пер. с англ. – М.: Пищевая пром-сть, 1979.

Спасибо за внимание!