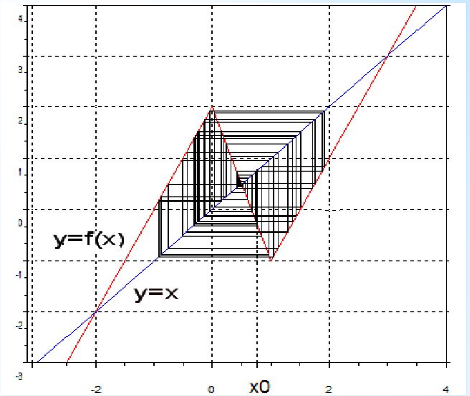
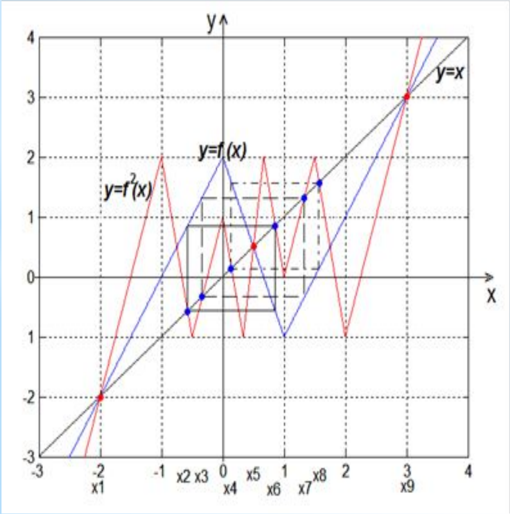
Динамика нелинейного тентообразного отображения с параметром

Работу выполнила ученица 10 класса
МБОУ «Высокогорская школа №2»
Уразова Диляра
Научные руководители Аксанова И.И.,
Насырова Н.И.

Актуальность темы исследования



Для многих природных явлений, изучение которых классическими методами просто невозможно, могут быть построены математические модели, описывающие эти явления как динамические системы.



Огромное количество приложений динамических систем в биологии и других отраслях знаний, изучение проблемы изменения численности биологических популяций, исследование динамики различных кусочно-непрерывных отображений определяют ***актуальность темы исследовательской работы***.

Математические популяционные модели

1) Логистическая модель $f(x)=rx(1-x)$, $x\in[0;1]$, $r\neq 0$.

2) Модель Рикера (Ricker) $f(x)=rxe^{-x}$, $x\geq 0$, $r\neq 0$.

3) Модель Бивертона-Холта (Beverton-Holt)

$$f(x)=\frac{rx}{1+x^{\gamma}}, \; x\geq 0,\; r\neq 0,\; \gamma>0.$$

4) Модель Дерисо-Шнуте (Deriso-Schnute)

$f(x)=r(1-\gamma x)^{1/\gamma}$, $\gamma<0$.

5) Симметрическая палатка $f(x) = \begin{cases} rx, & x\leq 1/2 \\ r(1-x), & x>1/2 \end{cases}$

6) Асимметрическая палатка $f(x) = \begin{cases} 1+ax, & x\leq 0 \\ 1-bx, & x\geq 0 \end{cases}$

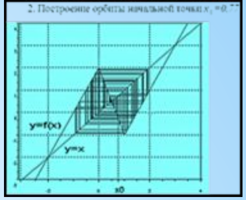
7) Криволинейная палатка $f(x) = \begin{cases} ax^{\alpha}, & 0\leq x\leq 1 \\ ax^{\beta}, & x>1 \end{cases}$

Цели исследовательской работы:

- ***Основная цель нашей работы*** - исследовать динамику нелинейного тентообразного отображения

- $f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Задачи исследовательской работы:



- \- изучить литературу по теме исследования;
- \- найти неподвижные точки отображения и определить их тип в зависимости от значений параметра;
- \- найти двупериодические точки и определить их тип в зависимости от значений параметра;
- \- для всех значений параметра ***a*** описать динамику отображения ***f(x)*** на интервалах действительной оси (*Ox*), заданных неподвижными и двупериодическими точками.

Основные понятия дискретных динамических систем

Простейшая дискретная динамическая система определяется непрерывной функцией $f(x)$, называемой итерируемой. Она отображает некоторое множество X в множество X. Задается также начальная точка x_0 из множества X. В дальнейшем мы будем в качестве X брать множество R всех вещественных чисел. Возьмем точку $x \in R$ и найдем значение функции в этой точке: $f(x)$.

Определение 1. Переход от x к $f(x)$ называется ***итерацией***.

Пусть x_0 – начальная точка. Тогда $x_1=f(x_0)$ –первая итерация точки x_0. Находя итерацию точки x_1, получаем $x_2=f(x_1)=f(f(x_0))=f^{(2)}(x_0)$, она называется второй итерацией точки x_0. Далее находим

$x_3=f(x_2)=f(f(f(x_0)))=f^{(3)}(x_0)$ – третью итерацию точки x_0,

…,

$x_n=f(x_{n-1})=f(f(f(\dots(f(x_0)\dots)))=f^{(n)}(x_0)$ – n-ю итерацию точки x_0,

…

Процесс построения итераций называется ***итерационным***.

Определение 2. Последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называется ***орбитой начальной точки x_0.***

Орбиту можно записать: $x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to \dots \to x_n \to \dots$

Определение 3. δ-окрестностью точки x называется интервал $(x-\delta,\ x+\delta)$. Множество называется окрестностью точки x, если оно является δ-окрестностью точки x для некоторого $\delta>0$.

Определение 4. Последовательность точек x_n сходится к точке x, если вне любой окрестности точки x лежит только конечное число точек последовательности.

Определение 5. Последовательность точек x_n сходится к ∞, если в любой окрестности точки 0 лежит только конечное число точек последовательности.

Определение 6. Последовательность точек x_n сходится к $+\infty$, если x_n сходится к ∞ и в отрицательной части числовой оси лежит только конечное число точек последовательности.

Определение 7. Последовательность точек x_n сходится к $-\infty$, если x_n сходится к ∞ и в положительной части числовой оси лежит только конечное число точек последовательности.

Определение 8. Точка *x* называется ***неподвижной точкой*** отображения *f(x)*, если она является решением уравнения $f(x)=x$.

Определение 9. Неподвижная точка *x* называется ***притягивающей*** или ***аттрактором***, если орбиты всех точек из некоторой её окрестности $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta>0$, сходятся к ней.

Определение 10. Неподвижная точка *x* называется ***отталкивающей*** или ***репеллером***, если орбиты всех точек из некоторой её окрестности $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta>0$, удаляются от этой точки.

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$. Напомним, что *орбитой* точки x_0 называется последовательность $x_0 \to f(x_0) \to f^{(2)}(x) \to f^{(3)}(x) \to \ldots \to f^{(n)}(x) \to \ldots$. Если орбита точки имеет вид $x_0 \to x_1 = f(x_0) \to x_0 \to x_1 \to \ldots$, где $x_1 \neq x_0$, то она называется ***двупериодической***.

Определение 11. Точка x_0 называется ***двупериодической***, если ее орбита двупериодическая, т.е. x_0 является решением уравнения $f^{(2)}(x) = x$ и не является неподвижной точкой.

Определение 12. Двупериодическая орбита $x_0 \to x_1 = f(x_0) \to x_0 \to x_1 \to \ldots$ называется ***притягивающей*** или ***аттрактором***, если орбиты всех точек из некоторой окрестности данной двупериодической орбиты сходятся к ней.

Определение 13. Двупериодическая орбита $x_0 \to x_1 = f(x_0) \to x_0 \to x_1 \to \ldots$ называется ***отталкивающей*** или ***репеллером***, если орбиты всех точек из некоторой окрестности данной двупериодической орбиты, удаляются от неё

Определение 14. Если $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to \ldots$ – орбита точки x_0 и последовательность итераций x_n сходится к точке x', то орбита называется ***сходящейся*** (к точке x').

Определение 15. Если $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to \ldots$ – орбита точки x_0 и последовательность итераций x_n сходится к бесконечности, то орбита называется ***расходящейся***.

Определение 16. Если x_0 – неподвижная точка функции $f(x)$, то орбита этой точки $x_0 \to x_0 \to x_0 \to \ldots$ называется ***постоянной***.

Определение 17. Орбита называется ***периодической с периодом p (p-периодической)***, если для любого натурального числа n ($n \in N$) $x_{n+p}=x_n$, где p – период орбиты и первые p точек различны.

Определение 18. Орбита называется ***в конечном итоге периодической***, если она будет периодической после удаления нескольких первых итераций.

Определение 19. В конечном итоге неподвижной точкой называется точка, которая после конечного числа итераций становится неподвижной.

Рассмотрим некоторую вещественно-значную функцию [illegible] = [illegible]([illegible]) одной переменной [illegible] [illegible].

Утверждение 1. Если x неподвижная точка $f(x)$, функция имеет производную $f'(x)$ в точке x и $|f'(x)|<1$, то x – притягивающая точка.

Утверждение 2. Если x неподвижная точка $f(x)$, функция имеет производную $f'(x)$ в точке x и $|f'(x)|>1$, то x - отталкивающая точка.

Утверждение 3. Если точка x_0 –- двупериодическая и существует производная $(f^{(2)}(x_0))'$ второй итерации в точке x_0, то в случае $|(f^{(2)}(x_0))'|<1$ точка x_0- притягивающая, а если $|(f^{(2)}(x_0))'|>1$, то x_0 – отталкивающая.

Утверждение 4. Пусть функция [illegible] определена на множество R и удовлетворяет следующим условиям на интервале [illegible]= [illegible], [illegible], где [illegible], [illegible] [illegible]: p-неподвижная точка функции [illegible]; [illegible] < [illegible] < [illegible] для любого [illegible] [illegible]. Тогда интервал [illegible]= ([illegible], [illegible])- входит в бассейн притяжения неподвижной точки p.

Утверждение 5. Пусть функции [illegible] не имеет двупериодических орбит на некотором интервале J, тогда на этом же интервале J у функции [illegible]([illegible]) не существуют периодические орбиты более высокого периода, чем 2.

Исследование динамики нелинейного тентообразного отображения с параметром

В работе проведено полное исследование динамики криволинейной палатки, заданной отображением с одним параметром:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{a}{x}, x \ge 1 \end{cases}$$

по следующему плану:

1. Нахождение неподвижных точек определение их типа
2. Нахождение второй итерации $f^{(2)}(x)$.
3. Нахождение двупериодических точек и определение их типа.
4. Описание динамики отображения на промежутках, заданных разбиением числовой прямой неподвижными и двупериодическими точками.
5. Построение паутинных диаграмм для различных значений x.
6. Общие выводы о динамике исследуемого отображения.

2.1. Исследование динамики $f(x)$ при $a<0$

Рассмотрим случай $a < 0$ и $f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{a}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$.

Построим график $f(x)$ и паутинные диаграммы некоторых точек при $a = -2$,

то есть $f(x) = \begin{cases} -2x^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{-2}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$ (рис.1) .

1) Найдем неподвижные точки $f(x)$, то есть корни уравнения $f(x) = x$

$\begin{cases} ax^2 = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{a}{x} = x \\ x \ge 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x(ax - 1) = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 = a \\ x \ge 1 \end{cases}$

$x_1 = 0$ или $x_2 = \frac{1}{a}$ или $\varnothing$, так как $a < 0$

Так как $a < 0$, то $x_2 \notin [0; 1]$.

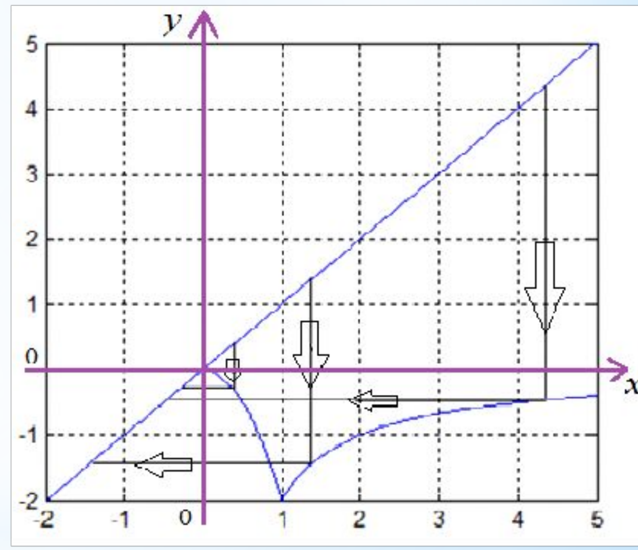


Рис. 1

Итак, при $a < 0$ существует единственная неподвижная точка $x_1 = 0$.

2) Рассмотрим $\forall x > 0$, тогда $f(x) < 0$, то есть $f(x)$ не принадлежит области определения отображения и орбиты всех точек, кроме $x_1 = 0$, вырождены.

2.2. Исследование динамики $f(x)$ при a=0

Построим график [illegible] и паутинные диаграммы некоторых точек при [illegible] = 0, то есть [illegible] = 0, при [illegible] ≥ 0 (рис. 2) .

1) Найдем неподвижные точки [illegible], то есть корни уравнения

[illegible] = [illegible]

Получаем [illegible] = 0 неподвижная точка.

2) Найдем в конечном итоге неподвижные точки [illegible], то есть корни уравнения [illegible] = [illegible]$_{н.т.}$. Имеем тождество 0 = 0.

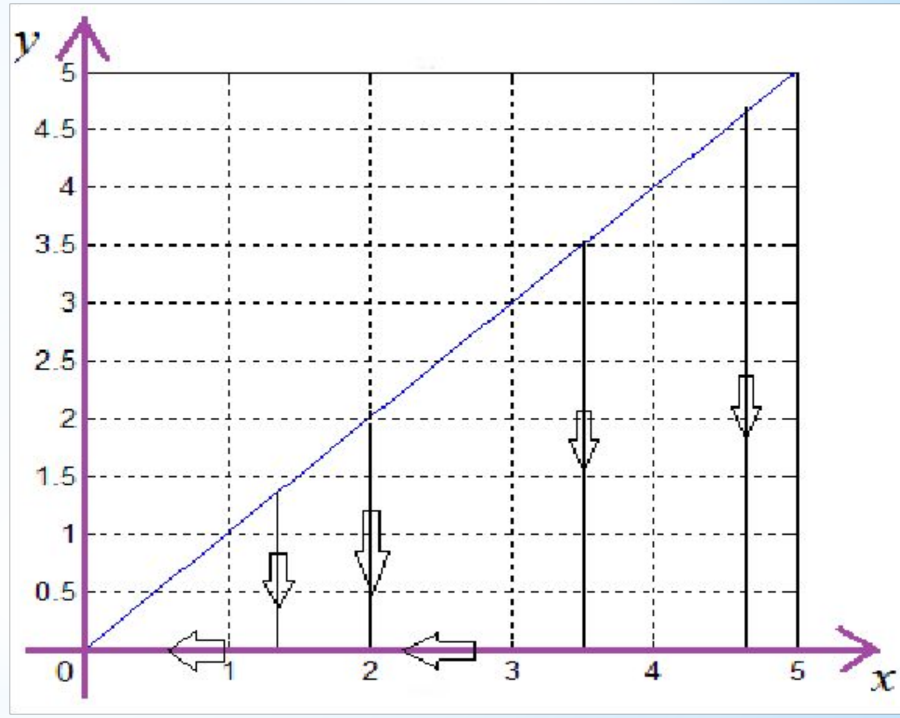


Рис. 2

Значит оно верно для любых x из области определения [illegible]. Исключая неподвижную точку [illegible] = 0 , получаем, что [illegible] > 0 является в конечном итоге неподвижной точкой.

2.3. Исследование динамики $f(x)$ при $0<a<1$

Построим график $f(x)$ и паутинные диаграммы некоторых точек при $a = \frac{1}{2}$, то есть $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2x}, & x \ge 1 \end{cases}$ (рис. 3).

Найдем неподвижные точки, решая уравнение $f(x) = x$

$$\begin{cases} ax^2 = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{a}{x} = x \\ x \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{a} \end{array} \right. \\ 0 \le x \le 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - a = 0 \\ x \ge 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_3 = \sqrt{a} \\ x_4 = -\sqrt{a} \end{array} \right. \\ x \ge 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \quad <=> \quad \varnothing$$

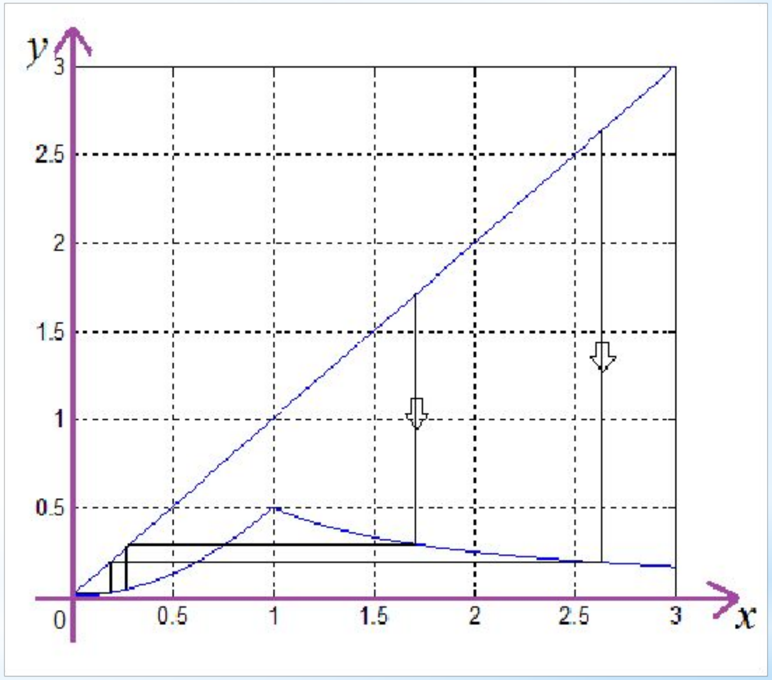


Рис. 3

Таким образом, при $0 < a < 1$ $f(x)$ имеет единственную неподвижную точку $x_1 = 0$.

2.4. Исследование динамики *f*(*x*) при *a*=1

Рассмотрим случай $a = 1$, тогда $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$ (рис. 4) .

1) Найдем неподвижные точки $f(x)$, то есть корни уравнения $f(x) = x$

Рассмотрим два случая:

а) $\begin{cases} x^2 = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

$f(x)$ имеет 2 неподвижные точки.

б) $\begin{cases} \frac{1}{x} = x \\ x \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x = 1 = x_2 \\ x = -1 \end{cases}$

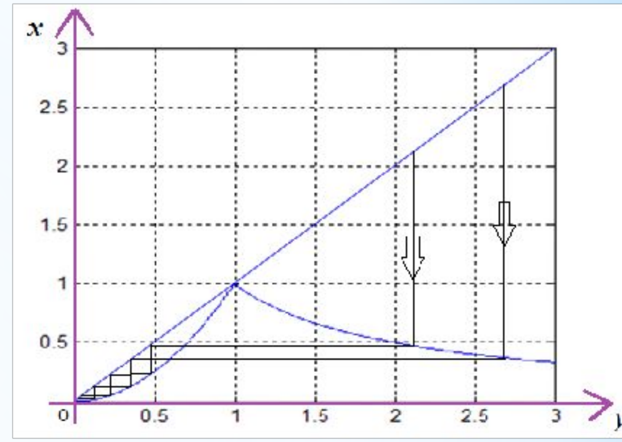


Рис. 4

Итак, $f(x)$ имеет 2 неподвижные точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

2) Определим тип неподвижных точек. Для этого найдем производную функции и ее модуль сравним с единицей.

Рассмотрим две неподвижные точки.

а) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $|f'(0)| = |2 \cdot 0| < 1$ => неподвижная точка $x_1 = 0$ - притягивающая по Утверждению 1.

б) $f(x) = x^2$, $|f'(1)| = |2| > 1$ => неподвижная точка $x_2 = 1$ - отталкивающая по Утверждению 2.

1.5. Исследование динамики $f(x)$ при $a>1$

Наибольший интерес представляет динамика отображения

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{a}{x}, & x \ge 1 \end{cases} \quad \text{при } a > 1 .$$

2.5.1. Нахождение неподвижных точек отображения

Решаем уравнение $f(x)=x$.

1) $f(x) = f_1(x) = ax^2, 0 \le x \le 1.$

$$\begin{cases} ax^2 = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(ax - 1) = 0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

а) $\begin{cases} x = 0 \\ 0 \le x \le 1 \\ a > 1 \end{cases}$. Получаем неподвижную точку $x_1 = 0$ при $a>1$.

б) $ax = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ 0 \le x \le 1 \\ a > 0 \end{cases}$. Получаем неподвижную точку $x_2 = \frac{1}{a}$ при $a>1$.

2) $f(x) = f_2(x) = \frac{a}{x}, \ x \ge 1$

$$\begin{cases} \frac{a}{x} = x \\ x \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{a - x^2}{x} = 0 \\ x \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{(\sqrt{a} - x)(\sqrt{a} + x)}{x} = 0 \\ x \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{-(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})}{x} = 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

$$<=> \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_3 = \sqrt{a} \\ x_4 = -\sqrt{a} \end{array} \right. \\ x \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x_3 = \sqrt{a} \\ a \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x_3 = \sqrt{a} - \text{неподвижная точка} \\ a > 1 \end{cases}$$

Итак, при $a > 1$ существуют 3 неподвижные точки $x_1 = 0, \ x_2 = \frac{1}{a}, \ x_3 = \sqrt{a}$.

2.5.2. Нахождение в конечном итоге неподвижных точек

Решим уравнение [illegible] = [illegible]$_{н.т.}$.

1) Рассмотрим неподвижную точку [illegible]$_1 = 0$.

[illegible]) [illegible] = [illegible]$_1 = 0$, при $0 \leq$ [illegible] ≤ 1.

Решением системы

[illegible]$^2 = 0$
$0 \leq$ [illegible] ≤ 1
[illegible] > 1

является неподвижная точка [illegible]$_1 = 0$.

б) [illegible] = [illegible]$_1 = 0$ при [illegible] ≥ 1

[illegible]/[illegible] $= 0$
[illegible] ≥ 1
[illegible] > 1

Система не имеет решений.

1) Рассмотрим неподвижную точку $□_2 = \frac{1}{□}$.

$$□□□□ = □_2 = \frac{1}{□}$$

$$□)\ \begin{cases} □□□^2 = \frac{1}{□} \\ □ > 1 \\ 0 \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{□^2□^2 - 1}{□} = 0 \\ □ > 1 \\ 0 \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □□□ - 1□□□□ + 1□ = 0 \\ □ > 1 \\ 0 \le □ \le 1 \end{cases} <=>$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} □ = -\frac{1}{□} \\ □ > 1 \\ 0 \le □ \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} □ = \frac{1}{□} \\ □ > 1 \\ 0 \le □ \le 1 \end{cases} \end{array}\right. <=> \begin{cases} □_2 = \frac{1}{□} - \text{неподвижная точка.} \\ □ > 1 \end{cases}$$

Здесь нет в конечном итоге неподвижных точек.

$$б)\ \begin{cases} \frac{□}{□} = \frac{1}{□} \\ □ > 1 \\ □ \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □ = □^2 \\ □ > 1 \\ □^2 \ge 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □_4 = □^2 \\ □ > 1 \end{cases}$$

При $□ > 1$ существует в конечном итоге неподвижная точка $□_4 = □^2$, причем её орбита имеет вид $□_4 □ □_2 □ □_2 □ □$

1) Рассмотрим неподвижную точку $□_3 = \xi\overline{□}$ и решим уравнение

$□□□□ = □_3 = \xi\overline{□}$.

а) $\begin{cases} □□□^2 = \xi\overline{□} \\ □ > 1 \\ 0 \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □^2□^4 = □ \\ □ > 1 \\ 0 \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □□□^4 = 1 \\ □ > 1 \\ 0 \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □ = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi\overline{□}}} \\ □ > 1 \\ 0 \le □ \le 1 \end{cases} <=>$

$<=> \begin{cases} □ = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi\overline{□}}} \\ □ > 1 \\ 0 \le \frac{1}{\sqrt[4]{\xi\overline{□}}} \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □_5 = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi\overline{□}}} \\ □ > 1 \end{cases}$ в конечном итоге неподвижная точка

б) $\begin{cases} \frac{□}{□} = \xi\overline{□} \\ □ \ge 1 \\ □ > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □ = \frac{□}{\xi\overline{□}} \\ □ \ge 1 \\ □ > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □ = \xi\overline{□} = □_3 \\ □ \ge 1 \\ □ > 1 \end{cases}$ неподвижная точка

Таким образом, при $□ > 1$ существует 2 в конечном итоге неподвижные точки $□_4 = □^2$ и $□_5 = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi\overline{□}}}$.

2.5.3. Определение типа неподвижных точек

При $\lambda > 1$ существуют 3 неподвижные точки $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{\lambda}$ и $x_3 = \xi\sqrt{\lambda}$.

1. Неподвижная точка $x_1 = 0$, тогда $f(x) = \lambda x^2$, $0 \le x \le 1$.

$f'(x) = 2\lambda x$ $|f'(0)| = 0 < 1$, значит, при $\lambda > 1$ неподвижная точка $x_1 = 0$ является притягивающей.

2. Неподвижная точка $x_2 = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 1 \Rightarrow 0 < x_2 < 1$, поэтому $f(x) = \lambda x^2$.

Тогда $f'(x) = 2\lambda x$, $f'\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 2$, $\left|f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right| = |2| > 1$.

При $\lambda > 1$ неподвижная точка $x_2 = \frac{1}{\lambda}$ является отталкивающей.

Ранее найдена в конечном итоге неподвижная точка $x_4 = x^2$. Ее орбита имеет вид $x_4 \;\; x_2 \;\; x_2 \;\; \dots$. В этом случае x_4 имеет тот же вид, что и неподвижная точка x_2, то есть $x_4 = x^2$ является отталкивающей.

1. Рассмотрим неподвижную точку $x_3 = \sqrt{a}$.

$f(x) = \frac{a}{x}$, $x \geq 1$, так как $a > 1$

$$f'(x) = \left(\frac{a}{x}\right)' = \left(a x^{-1}\right)' = a(-1)x^{-2} = \frac{-a}{x^2}$$

$\left|f'(\sqrt{a})\right| = \left|\frac{-a}{(\sqrt{a})^2}\right| = \left|\frac{-a}{a}\right| = |-1| = 1$. Значит, неподвижная точка $x_3 = \sqrt{a}$ не является ни отталкивающей, ни притягивающей.

2.5.4. Нахождение второй итерации отображения $f^{(2)}(x)$

Значения $f(x)$ могут попадать в любой из промежутков задания функции $f(x)$: $0 \le x \le 1$ или $x \ge 1$. От этого будет зависеть нахождение второй итерации функции $f(x) = \begin{cases} \xi x^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{\xi}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$.

1) $0 \le x \le 1$

$$f^{(2)}(x) = f_1(f_1(x)) = \xi(\xi x^2)^2 = \xi^3 x^4, \text{ при условии } \begin{cases} \xi > 1 \\ \xi x^2 \ge 0 \\ \xi x^2 \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}.$$

Решая систему, мы получаем, что при $\xi > 1$ $f^{(2)}(x) = \xi^3 x^4$ для $0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{\xi}}$.

2) $f^{(2)}(x) = f_2(f_1(x)) = \frac{\xi}{\xi x^2} = \frac{1}{x^2}$, если выполняются условия $\begin{cases} f_1(x) \ge 1 \\ 0 \le x \le 1 \\ \xi > 1 \end{cases}$

В результате получаем, что при $\xi > 1$ $f^{(2)}(x) = \frac{1}{x^2}$ для $\frac{1}{\sqrt{\xi}} \le x \le 1$.

3) $\square \geq 1$

$\square^2\square\square\square = \square_1\square\square_2\square\square\square\square = \square\square\left(\frac{\square}{\square}\right)^2 = \frac{\square^3}{\square^2}$, если

$$\begin{cases} 0 \leq \square_2(\square) \leq 1 \\ \square \geq 1 \\ \square > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{\square}{\square} \leq 1 \\ \frac{\square}{\square} \geq 0 \\ \square \geq 1 \\ \square > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \square > 1 \\ \square \geq \square \\ \square \geq 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \square > 1 \\ \square \geq \square \end{cases}$$

Получаем, что при $\square > 1$ $\square^{2}\square\square\square = \frac{\square^3}{\square}$ для $\square \geq \square$.

4) $\square^{2}(\square) = \square_2(\square_2\square\square\square) = \frac{\square\square\square}{\square} = \square$ при условии

$$\begin{cases} \frac{\square}{\square} \geq 1 \\ \square \geq 1 \\ \square > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \square \geq \square \\ \square \geq 1 \\ \square > 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \square \leq \square \\ \square \geq 1 \\ \square > 1 \end{cases}$$

Получаем, что при $\square > 1$ $\square^{2}\square\square\square = \square$ для $1 \leq \square \leq \square$.

Итак, при $\square > 1$ вторая итерация данного отображения имеет вид:

$\square^{2}\square\square\square = \square^3\square^4$ для $0 \leq \square \leq \frac{1}{\xi\square}$,

$\square^{2}\square\square\square = \frac{1}{\square^2}$ для $\frac{1}{\xi\square} \leq \square \leq 1$,

$\square^{2}\square\square\square = \square$ для $1 \leq \square \leq \square$.

$\square^{2}\square\square\square = \frac{\square^3}{\square^2}$ для $\square \geq \square$,

2.5.5. Нахождение двупериодических точек

Решим уравнение $f^{(2)}(x) = x$ и отбросим из множества его корней неподвижные точки.

1) При $0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $f^{(2)}(x) = \lambda^3 x^4$, где $\lambda > 1$.

$$\begin{cases} f^{(2)}(x) = x \\ \lambda > 1 \\ 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{cases} <=> \begin{cases} \lambda^3 x^4 = x \\ \lambda > 1 \\ 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{cases} <=> \begin{cases} x(\lambda^3 x^3 - 1) = 0 \\ \lambda > 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} x(\lambda^3 x^3 - 1) = 0 \\ \lambda > 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$x = 0 = x_1$ неподвижная точка, которая не является двупериодической точкой.

$(\lambda x)^3 - 1 = 0 => (\lambda x - 1)((\lambda x)^2 + \lambda x + 1) = 0 => \lambda x = 1$

$x = \frac{1}{\lambda}$, так как $\lambda > 1$, то $\frac{1}{\lambda} = x_2$ и является неподвижной точкой.

Второй сомножитель $(\lambda^2 x^2 + \lambda x + 1)$ имеет $D = \lambda^2 - 4\lambda^2 = 3\lambda^2 < 0$, поэтому не имеет корней.

Таким образом, в первом случае двупериодических точек нет.

2) при $\frac{1}{\xi□} \le □ \le 1$ $□^{□2□}□□□ = \frac{1}{□^2}$

$$\begin{cases} □^{□2□}□□□ = □ \\ □ > 1 \\ \frac{1}{□} \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{1}{□^2} = □ \\ □ > 1 \\ \frac{1}{\xi□} \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □^3 = 1 \\ □ > 1 \\ \frac{1}{\xi□} \le □ \le 1 \end{cases} <=> \begin{cases} □ = 1 \\ □ > 1 \\ \frac{1}{\xi□} \le □ \le 1 \end{cases}$$

Проверим удовлетворяет ли $□ = 1$ условию $\frac{1}{\xi□} \le □ \le 1$

$$\begin{cases} □ > 1 \\ □ \ge \frac{1}{\xi□} \\ 1 \le 1 \end{cases}$$ истина

Вывод: $□_6 = 1$ двупериодическая точка.

Вычислим $□□□_6□$: $□□□_6□ = □□1□ = □ = □_8$; $0 \le □ \le 1$.

Найдем $□□□□ = \frac{□}{□} = 1$ $□□ \ge 1□$ $□ = □ > 1$. Выпишем орбиту $□_6 = 1□$ $□□$ $1□$ $□□$ $1...$

Получаем двупериодические точки $□_6 = 1$ и $□_8 = □$.

3) при 1 ≤ □ ≤ □ □^{2}□□ = □

□^{2}□□ = □ <=> □ = □ <=> 0 = 0

□ > 1 <=> □ > 1 <=> □ > 1

1 ≤ □ ≤ □   1 ≤ □ ≤ □   1 ≤ □ ≤ □

Отбросим неподвижную точку $□_3$ = ξ$\overline{□}$ при заданных условиях □ > 1, 1 ≤ □ ≤ □

Получаем □ □ □ □1; ξ$\overline{□}$) □ (ξ$\overline{□}$; □□ является двупериодической точкой при □ > 1.

4) при $□ \geq □$ $□^{(2)}(□) = \frac{□^3}{□^2}$

$$\begin{cases} □^{(2)}(□) = □ \\ □ > 1 \\ □ \geq □ \end{cases} <=> \begin{cases} \frac{□^3}{□^2} = □ \\ □ > 1 \\ □ \geq □ \end{cases} <=> \begin{cases} □^3 - □^3 = 0 \\ □ > 1 \\ □ \geq □ \end{cases} <=> \begin{cases} (□ - □)(□^2 + □□ + □^2) = 0 \\ □ > 1 \\ □ \geq □ \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} □ = □ \\ □ > 1 \\ □ \geq □ \end{cases}$ или $□^2 + □□ + □^2 = 0$

$□ = □^2 - 4□^2 = -3□^2 < 0$, нет решений.

Следовательно, $□_8 = □$ – двупериодическая точка.

Итак, при $□ > 1$ □ □ □ $(1; \xi □) \cup (\xi □; □)$ является двупериодиоческой точкой, а □ □ □ $(0; 1) \cup (□; +\infty)$ не имеют двупериодических орбит.

1.5.6. Определение типа двупериодических точек

Отображение [illegible] $= \begin{cases} [illegible]^2, 0 \le [illegible] \le 1 \\ \frac{[illegible]}{[illegible]}, [illegible] \ge 1 \end{cases}$ имеет двупериодические точки только при [illegible] > 1 на промежутке $[1; \xi$ [illegible] ξ [illegible] . В этом случае [illegible]^2[illegible] $=$ [illegible] Найдем [illegible]^2[illegible]$' =$ [illegible] $= 1$. Значит о типе двупериодических орбит по Утверждению 3 ничего сказать нельзя. Но так как [illegible] $[1; \xi$ [illegible] ξ [illegible] определяет двупериодическую орбиту, значит эти орбиты не являются ни притягивающими, ни отталкивающими.

1.5.6. Динамика отображения на различных интервалах

При исследовании динамики отображения $f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{a}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$ при условии $a > 1$ мы нашли неподвижные, в конечном итоге неподвижные и двупериодические точки. Эти точки разбивают область определения $f(x)$ на интервалы:

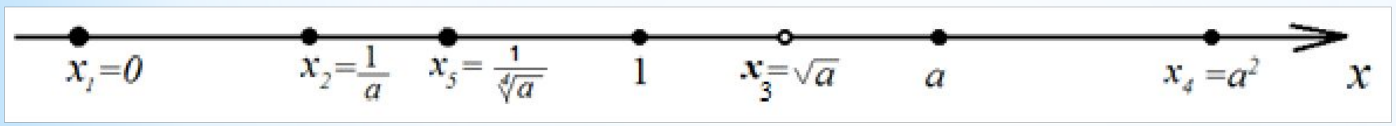


Рис. 5

Изучим динамику $f(x)$ на каждом из этих интервалов.

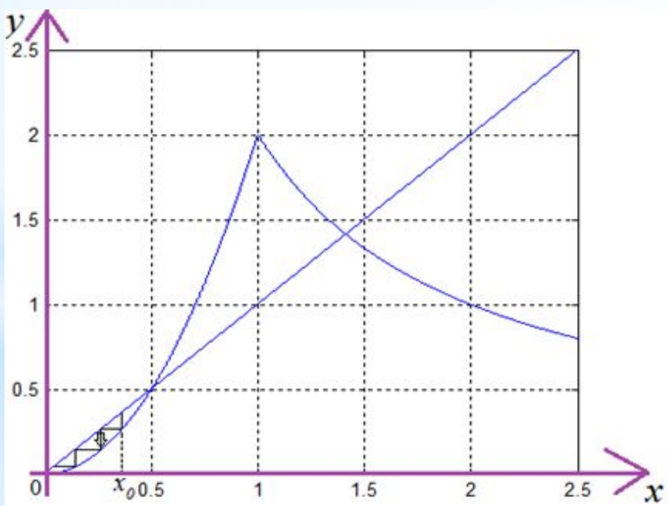
1.*Рассмотрим интервал* $x \in \left(0; \frac{1}{a}\right)$**.**

Теорема 3. Орбита любой точки $x \in \left(0; \frac{1}{a}\right)$ притягивается к неподвижной точке $x_1 = 0$, при $a > 1$.

1.*Рассмотрим интервал* $\square \square \; \square \square; \frac{\square}{\square} \square$.

Теорема 3. Орбита любой точки $\square \square \; \square 0: \frac{1}{\square} \square$ притягивается к неподвижной точке $\square_1 = 0$, при $\square > 1$.

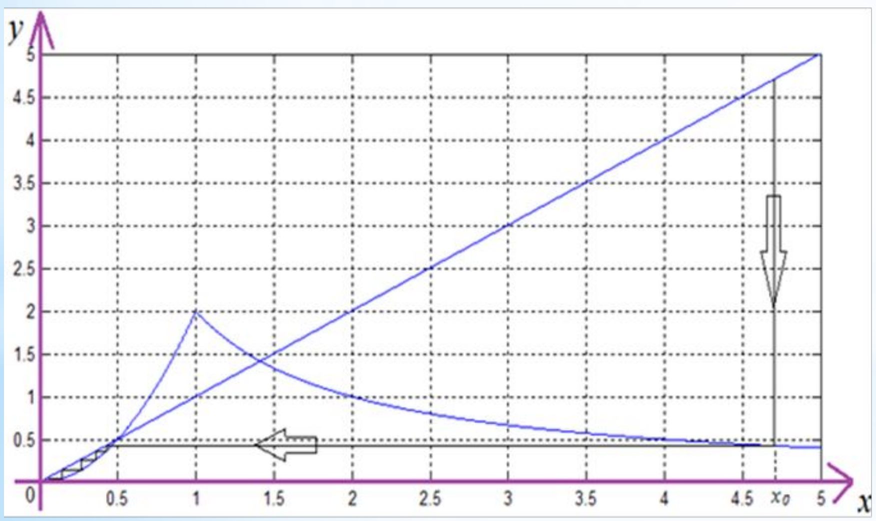
Так как условия выполняются, то интервал $\square = \square 0; \frac{1}{\square} \square$ входит в бассейн притяжения неподвижной точки $\square_1 = 0$.



1. *Рассмотрим интервал* $(a^2;\ +\infty)$ **.**

Теорема 4. Орбита любой точки $x \in (a^2; +\infty)$ попадает в бассейн притяжения неподвижной точки $x_1 = 0$.

Итак, первая итерация произвольной точки $x \in (a^2; +\infty)$ попадает в интервал $\left(0; \frac{1}{a}\right)$, который входит в бассейн притяжения неподвижной точки $x_1 = 0$ по Теореме 3. Значит орбиты всех точек интервала $(a^2; +\infty)$ будут притягиваться к неподвижной точке $x_1 = 0$.



1. ***Рассмотрим объединение интервалов*** [illegible]; ξ [illegible]) [illegible] (ξ [illegible]; [illegible],

где точки 1 и [illegible] образуют двупериодическую орбиту, а [illegible]$_5$ = ξ [illegible] является неподвижной точкой. При изучении двупериодических точек отображения мы доказали:

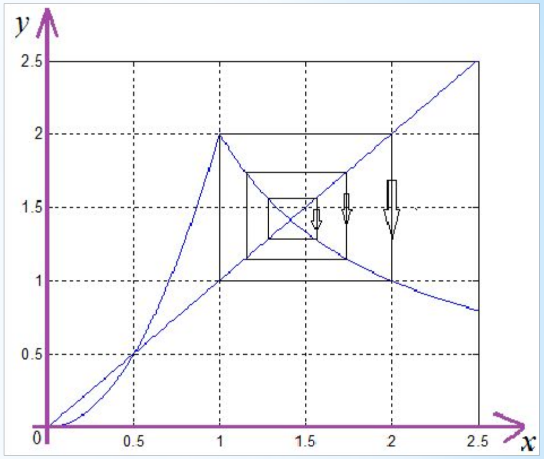


Рис. 8

Теорему 5. Любая точка [illegible] [illegible]1; ξ [illegible]) [illegible] (ξ [illegible]; [illegible] является двупериодической.

1. ***Рассмотрим интервал*** **[illegible] ([illegible]; [illegible]$^{[illegible]}$).**

Теорема 6. Если [illegible] ([illegible]; [illegible]^2), то [illegible]([illegible]) попадает в интервал $\left(\frac{1}{[illegible]}; 1\right)$.

Доказательство. Рассмотрим [illegible] < [illegible] < [illegible]^2 . Так как [illegible] > 1 , то [illegible] > [illegible] > 1 . Значит [illegible] = $\frac{[illegible]}{[illegible]}$. Из положительного неравенства [illegible] < [illegible] < [illegible]^2 следует, что $\frac{1}{[illegible]^2} < \frac{1}{[illegible]} < \frac{1}{[illegible]}$. Умножим неравенство на параметр [illegible] и получим

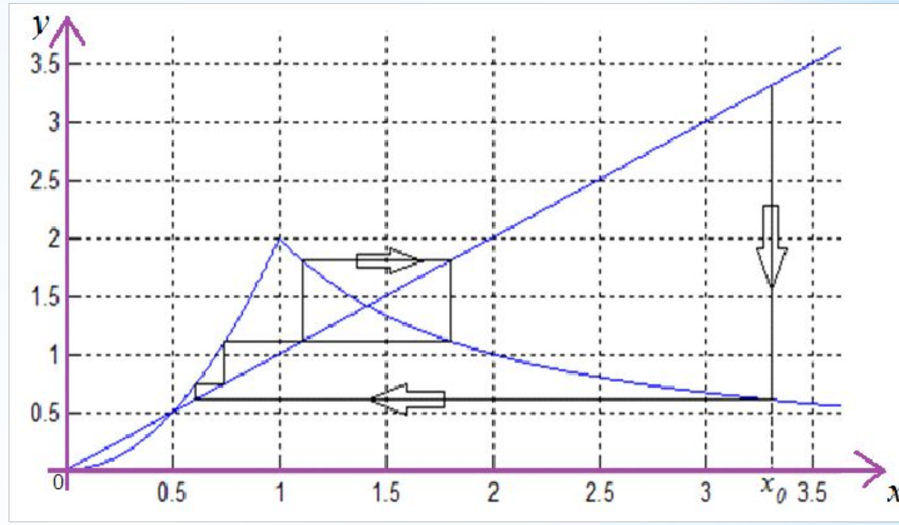
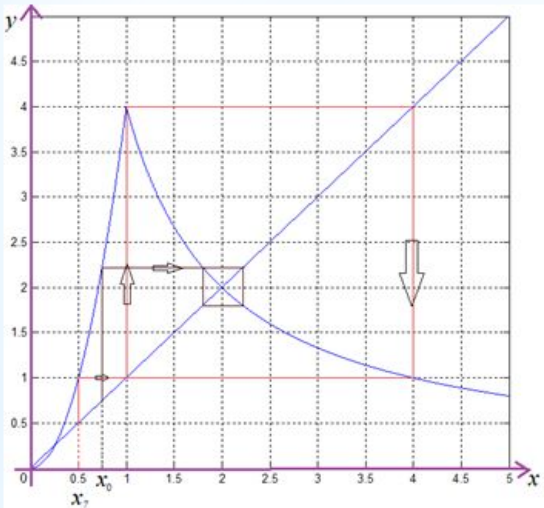


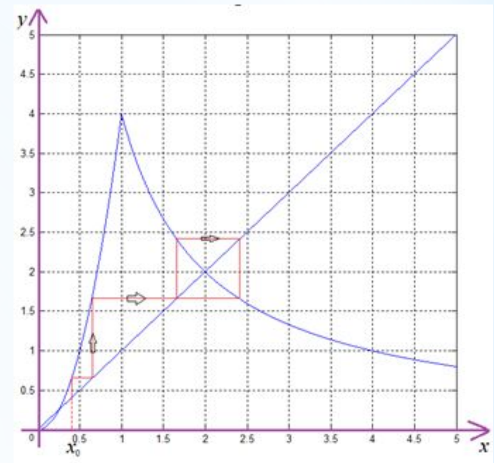
Рис. 9

$\frac{1}{[illegible]} < \frac{[illegible]}{[illegible]} < 1$ или $\frac{1}{[illegible]} <$ [illegible]([illegible]) < 1 . Таким образом, [illegible]([illegible]) [illegible] $\left(\frac{1}{[illegible]}; 1\right)$ для [illegible] ([illegible]; [illegible]^2).

1. ***Рассмотрим интервал*** $\left(\frac{[illegible]}{[illegible]};\ [illegible]\right)$**.**

Теорема 7. Если $[illegible] \in \left(\frac{1}{[illegible]};\ 1\right)$, то $[illegible]$ попадает в $(1;\ [illegible])$.





Таким образом, $[illegible] \in \left(\frac{1}{[illegible]};\ 1\right)$ имеет $[illegible] \in (1;\ [illegible])$, то есть любая точка $[illegible]$ из интервала $\left(\frac{1}{[illegible]};\ 1\right)$ будет в конечном итоге неподвижной или в конечном итоге двупериодической.

2.6. Общие выводы о динамике исследуемого отображения

Исследование динамики нелинейного тентообразного отображения $f(x) = \begin{cases} ax^2, 0 \le x \le 1 \\ \frac{a}{x}, x \ge 1 \end{cases}$ включило в себя нахождение неподвижных и двупериодических, в конечном итоге неподвижных и двупериодических точек, определение их типов, изучение интервалов с интересной динамикой отображения для всех действительных значений параметра *a*.

Мы получили, следующие результаты:

при $a<0$ существует единственная неподвижная точка $x_1=0$, а орбиты всех точек $x>0$ вырождены, т.к. $f(x)$ не попадает в область определения заданной функции;

при $a=0$ существует единственная неподвижная точка $x_1=0$, а орбиты всех $x>0$ притягиваются к x_1 и при этом точки x являются в конечном итоге неподвижными;

при 0< a <1 неподвижная точка x_1=0 является глобальным аттрактором и притягивает орбиты любых точек x из интервала (0; + ∞);

при a=1 существует 2 неподвижные точки, причем x_1=0 притягивает орбиты всех точек области определения, кроме неподвижной отталкивающей точки x_2=1.

При a>1 отображение имеет более сложную динамику. Опишем её.

Отображение имеет три неподвижные точки, причем x_1=0 является притягивающей, $x_2=1/a$ – отталкивающей, а $x_3=\xi\overline{\square}$ не является ни притягивающей, ни отталкивающей. Две в конечном итоге неподвижные точки отображения $\square_4 = \square^2$ и $\square_5 = \frac{1}{4\xi\overline{\square}}$, соответственно являются отталкивающей и ни притягивающей, ни отталкивающей.

Объединение интервалов $\left[0;\frac{1}{a}\right) \cup (a^2;+\infty)$ входит в бассейн притяжения неподвижной точки $x_1 = 0$.

Орбиты всех точек x отрезка $[1,a]$ являются двупериодическими, за исключением неподвижной точки $x_3=\xi$.

$\forall x \in \left(\frac{1}{a};1\right) \cup (a;a^2)$ будет в конечном итоге неподвижной или в конечном итоге двупериодической точкой.

Заключение

В исследовательской работе изучены основные понятия и утверждения теории дискретных динамических систем.

Самостоятельно проведено полное исследование динамики нелинейного тентообразного отображения $f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{a}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$, зависящего от параметра *a*. Найдены неподвижные и двупериодические точки, определены их типы. Полностью описано поведение орбит всех точек из области определения отображения в зависимости от параметра *a*, пробегающего все множество действительных чисел.

Полученные результаты могут быть использованы при изучении и прогнозировании численности биологической популяции, математическая модель которой строится как дискретная динамическая система, заданная отображением [illegible]. Исследование динамики [illegible] позволяет сделать вывод, что наиболее благоприятные условия для жизнедеятельности и развития популяции будут при значениях параметра a>1 и для любых значений переменной x из интервала [illegible]. В этом случае численность популяции, в конечном итоге, будет колебаться между двумя значениями [illegible] и [illegible] (двупериодическая орбита), что и обеспечивает её стабильность.

При построении графиков функций, паутинных диаграмм и орбит мы применяли пакет прикладных математических программ MatLab.

Список литературы

1. Кроновер Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. - Москва: Техносфера, 2006.

2. Lindstrom T., Thunberg H. An elementary approach to dynamics and bifurcations of skew tent maps // Journal of Difference Equations and Applications. – 2008. – V. 14. – P. 819 – 833.

3. Sushko I., Gardini L. Degenerate bifurcations and border collisions in piecewise smooth 1D and 2D maps // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2010. – V. 20, No. 7. – P. 2045 – 2070.

4. Зеель Э.О. Математический анализ. Часть 1. Пределы. Непрерывность. - Архангельск: ПГУ, 1998.

5. Электронный курс д-ра математики Г. Сёдербакка (G. Soederbacka, Abo Akademi, Finland): www.abo.fi/~gsoderba

6. Говорухин В.Н., Цибулина В.Г. Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX. Уч. курс. – С.-Пб.: Питер, 2001.

7. Рикер У. Е. Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяций рыб: Пер. с англ. – М.: Пищевая пром-сть, 1979.

Спасибо за внимание!