Тема учебного занятия:
КОМБИНАТОРИКА

Задание:

Записать лекцию, разобраться в решении задач по примерам!

Выполнить задания на последнем слайде и сбросить в аверс до 17 часов на дату, где взяли задание!

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами.

Комбинаторика изучает комбинации и перестановки предметов, расположение элементов, обладающее заданными свойствами.

Обычные вопросы в комбинаторных задачах:

Сколькими способами..? Сколько вариантов..?

N-факториал

N! – это воспроизведение чисел от 1 до n

Например:

5!=1*2*3*4*5=120

Подсчитать: 7! 4! 6!

Основные комбинаторные формулы

- ***Размещения***
- ***Перестановки***
- ***Сочетания***

Размещения

Размещениями из ***n*** элементов по ***m*** элементов называются комбинации, составленные из данных ***n*** элементов по ***m*** элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

- ***Число размещений без повторений*** из ***n*** по ***m*** (*n* различных элементов) вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- ***Размещениями с повторениями*** из ***n*** элементов по ***m*** называются *упорядоченные* ***m***-элементные выборки, в которых элементы могут ***повторяться***.

Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

НАПРИМЕР

Возьмем буквы Б, А, Р. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если: 1) буквы в Наборе не повторяются; 2) буквы могут повторяться?

Решение.

1) Получатся следующие наборы: ***БА, БР, АР, АБ, РБ, РА***.

По формуле 1

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$$

получаем: 6 наборов

2) Получатся наборы: ***ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.***

По формуле 2

$$\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$$

получаем 9 наборов

Решить: Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: "красный", "желтый", "зеленый"?

Перестановки

Перестановками из ***n*** элементов называются размещения из этих *n* элементов по ***n*** (Перестановки - частный случай размещений).

- **Число перестановок без повторений** (n различных элементов) вычисляется по формуле: $P_n = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 1 = n!$

- ***Число перестановок с повторениями*** (*k* различных элементов, где элементы могут повторяться m1, m2, …, mk раз и m1 + m2 +… + mk = n, где n - общее количество элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}.$$

НАПРИМЕР

Возьмем буквы ***Б, А, Р***. Какие перестановки из этих букв можно получить? Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буква А повторяется два раза?

Решение.

1) Получатся наборы: БАР, БРА, АРБ, АБР, РАБ.

По формуле (1) получаем: Р3=1*2*3=6 наборов.

2) Получатся наборы: ***БАРА, БРАА, БААР, ААРБ, ААБР, АБАР, АРАБ, АРБА, АБРА, РАБА, РААБ, РБАА.***

По формуле (2) получаем: $P_4(2,1,1) = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 3\cdot 4 = 12.$ наборов

Решить: Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

Сочетания

Сочетаниями из n элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных ***n*** элементов по ***m*** элементов, которые различаются хотя бы одним элементом (отличие сочетаний от размещений в том, что в сочетаниях не учитывается порядок элементов).

- ***Число сочетаний без повторений*** (***n*** различных элементов, взятых по ***m***) вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- ***Число сочетаний с повторениями*** (***n*** элементов, взятых по ***m***, где элементы в наборе могут повторяться) вычисляется по формуле:

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

НАПРИМЕР

*Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие сочетания из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) можно брать по два одинаковые буквы.*

Решение.

1) Получатся наборы: ***БА*** (***БА*** и ***АБ*** - один и тот же набор), ***АР*** и ***РБ***.

По формуле (1) получаем: $C_3^2 - \frac{3}{2!(3-2)!} - \frac{1\ 2\ 3}{1\cdot 2\cdot 1} - 3$ наборов.

2) Получатся наборы: ББ, БА, БР, АА, АР, РР.

По формуле (2) получаем: $\tilde{C}_3^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 3\cdot 2 = 6$ наборов

Решить: Из 20 учащихся надо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Решение задач

- У нас есть 9 разных книг из серии "Занимательная математика". Сколькими способами можно:

1. Расставить их на полке.
2. Подарить три из них победителям школьной олимпиады, занявшим первые три места.

- У бармена есть 6 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай ровно 3 различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?
- В группе из 20 студентов надо выбрать 2 представителей для выступления на конференции. Сколькими способами можно это сделать?
- В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?
- Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из одиннадцати дисциплин.