

**Тема учебного
занятия:
КОМБИНАТОРИКА**



Задание:

Записать лекцию, разобраться в решении задач по примерам!

Выполнить задания на последнем слайде и сбросить в аверс до 17 часов на дату, где взяли задание!

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами.

Комбинаторика изучает комбинации и перестановки предметов, расположение элементов, обладающее заданными свойствами.

Обычные вопросы в комбинаторных задачах:

Сколькими способами..? Сколько вариантов..?



N-факториал

$N!$ – это произведение чисел от 1 до n

Например:

$$5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$$

Подсчитать: $7!$ $4!$ $6!$



Основные комбинаторные формулы

 **Размещения**

 **Перестановки**

 **Сочетания**



Размещения

Размещениями из n элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число размещений без повторений из n по m (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Размещениями с повторениями из n элементов по m называются упорядоченные m -элементные выборки, в которых элементы могут **повторяться**.

Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

НАПРИМЕР

Возьмем буквы Б, А, Р. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в Наборе не повторяются; 2) буквы могут повторяться?

Решение.

1) Получатся следующие наборы: **БА, БР, АР, АБ, РБ, РА**.

По формуле 1

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$$

получаем: 6 наборов

2) Получатся наборы: **ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА**.

По формуле 2

$$\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$$

получаем 9 наборов

Решить: Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: "красный", "желтый", "зеленый"?

Перестановки

Перестановками из n элементов называются размещения из этих n элементов по n (Перестановки - частный случай размещений).

Число перестановок без повторений (n различных элементов) вычисляется по формуле: $P_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$

Число перестановок с повторениями (k различных элементов, где элементы могут повторяться m_1, m_2, \dots, m_k раз и $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$, где n - общее количество элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!}$$

НАПРИМЕР

Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие перестановки из этих букв можно получить?
Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буква А повторяется два раза?

Решение.

1) Получатся наборы: БАР, BRA, APB, ABR, PAB.

По формуле (1) получаем: $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ наборов.

2) Получатся наборы: **БАРА, BRAА, БААР, ААРБ, ААБР, АБАР, АРАБ, АРБА, АБРА, РАБА, РААБ, РБАА.**

По формуле (2) получаем: $P_4(2, 1, 1) = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 3 \cdot 4 = 12$ наборов

Решить: Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

Сочетания

Сочетаниями из n элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые различаются хотя бы одним элементом (отличие сочетаний от размещений в том, что в сочетаниях не учитывается порядок элементов).

 **Число сочетаний без повторений** (n различных элементов, взяты по m) вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

 **Число сочетаний с повторениями** (n элементов, взяты по m , где элементы в наборе могут повторяться) вычисляется по формуле:

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

НАПРИМЕР

Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие сочетания из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) можно брать по два одинаковые буквы.

Решение.

1) Получатся наборы: **БА** (**БА** и **АБ** - один и тот же набор), **АР** и **РБ**.

По формуле (1) получаем: $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$ наборов.

2) Получатся наборы: **ББ, БА, БР, АА, АР, РР**.

По формуле (2) получаем: $C_3^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 3 \cdot 2 = 6$ наборов

Решить: Из 20 учащихся надо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Решение задач

 У нас есть 9 разных книг из серии "Занимательная математика". Сколькими способами можно:

1. Расставить их на полке.
2. Подарить три из них победителям школьной олимпиады, занявшим первые три места.

 У бармена есть 6 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай ровно 3 различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?

 В группе из 20 студентов надо выбрать 2 представителей для выступления на конференции. Сколькими способами можно это сделать?

 В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?

 Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из одиннадцати дисциплин.

