Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл

- Первообразная, неопределенный интеграл
- Свойства НИ
- Таблица интегралов и первообразных
- Методы интегрирования

Первообразная, неопределенный интеграл

- Опр. Функция $F(x)$ – ***первообразная*** функции $f(x)$, если $F(x)$ дифференцируема на *D* и $F'(x) = f(x)$.

Пример. Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной функции $f(x) = x^2$.

Теорема 1. Первообразные одной функции отличаются не более чем на постоянную величину. (т.е. если $F(x)$ и $\Phi(x)$ две первообразные функции $f(x)$, то $\exists c \in \boldsymbol{R}$:

$F(x) = \Phi(x) + c$)

Опр. Семейство всевозможных первообразных функции называется ***неопределенным интегралом***

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x).$$

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int dF(x) = F(x) + c$;
3. Линейность:
   $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$;
4. Подобие: если $F(x)$ – *первообразная* $f(x)$**,** то
   $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$;
5. Смещение: если $F(x)$ – *первообразная* $f(x)$**,** то
   $\int f(x+b)dx = F(x+b) + c$;
6. Неопределенный интеграл инвариантен относительно переменной: т.е., если $\int f(x)dx = F(x) + c$, то
   $\int f(t)dt = F(t) + c$,

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = c;$

2. $\int Adx = Ax + c;$

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \in \boldsymbol{N};$

3.1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1;$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$

4.1. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c;$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ (a > 0, a \neq 1);$

5.1 $\int e^x dx = e^x + c;$

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c;$

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + c;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + c;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + c;$

Таблица интегралов (продолжение)

- **10.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + c, \\ -\arccos\frac{x}{a} + c \end{cases}$

11. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c \end{cases}$

12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c;$

13.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c;$

14. $\int \operatorname{sh}x\, dx = \operatorname{ch}x + c;$

15. $\int \operatorname{ch}x\, dx = \operatorname{sh}x + c$

Методы интегрирования

1. ***Непосредственное интегрирование*** - метод при котором интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

2. **Метод замены переменной** (метод подстановки)

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = x(t) \\ dx = x'(t)dt \end{vmatrix} = \int f\big(x(t)\big)x'(t)dt$$

$$\int f\big(u(x)\big)u'(x)dx = \begin{vmatrix} u = u(x) \\ u'(x)dx = du \end{vmatrix} = \int f(u)du$$

Методы интегрирования (продолжение)

3. ***Интегрирование по частям.***

Теорема 1. Если $u(x), v(x)$ дифференцируемые функции, то

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\,.$$

Формула для запоминания: $\int u\,dv = uv - \int v\,du.$

Замечание. Не интегрируются в элементарных функциях

Интеграл Пуассона $\int e^{-x^2}\,dx$;

Интегралы Френеля $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$;

Интегральный логарифм $\int \frac{dx}{\ln x}$;

Интегральные синус и косинус $\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx$

Методы интегрирования

- Интегрирование рациональных дробей
- Интегрирование иррациональных функций
- Интегрирование тригонометрических функций

Интегрирование рациональных дробей

- Любая рациональная функция представима в виде рациональной дроби:

$$R(x) = \frac{Q_n(x)}{P_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$$

Любая правильная рациональная дробь представима в виде линейной комбинации элементарных дробей.

I. $\frac{A}{x+a}$; II. $\frac{A}{(x+a)^k}$; III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$.

Метод разложения – метод неопределенных коэффициентов.

Интегрирование рациональных дробей

Интегрирование элементарных дробей

1. $\int \frac{A}{x+a}\,dx = A\ln|x+a| + c;$

2. $\int \frac{A}{(x+a)^k}\,dx = \frac{A}{(1-k)(x+a)^{k-1}} + c;$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c;$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{A}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} +$

$$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Интегрирование иррациональных функций

1. $\int R(x, x^{n/m}, \dots, x^{s/r})\,dx$

Замена переменной: $x = t^k,\ dx = kt^{k-1}dt,$

где k- наименьший общий знаменатель дробей $\frac{n}{m}, \dots, \frac{s}{r}$

2. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Подстановка $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, \quad x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$

3. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$

3.1 квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни

$x_1, x_2,$

сводим к 2. соотношением $ax^2 + bx + c = \frac{a(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x-x_1)}$

Интегрирование иррациональных функций

- 3.2 уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, $a > 0$

Подстановка Эйлера $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}$,

$$x = \frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}$$

3.3 уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, $a < 0$, $c > 0$

Подстановка Эйлера $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$

Выделение полного квадрата $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$,

подстановка $\boldsymbol{u = x + \frac{b}{2a}}$, сведение к 4.

Интегрирование иррациональных функций

- 3.4 $\int \frac{dx}{(mx+n)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $k = 1,2$ подстановка: $mx + n = \frac{1}{t}$

4. $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ $\qquad x = a\sin t$

$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ $\qquad x = a\,\mathrm{ch}t,$ где $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$

$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ $\qquad x = a\,\mathrm{tg}t$ или $x = a\,\mathrm{sh}t$

Интегрирование тригонометрических функций

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

2. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ - нечетная по $\sin x$ -

подстановка $t = \cos x$

3. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ - нечетная по $\cos x$ -

подстановка $t = \sin x$

4. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ - четная по $\cos x$ и $\sin x$

подстановка $t = \operatorname{tg} x$

Интегрирование тригонометрических функций

5. $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$, где m, n – четные, то формула понижения степени: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

6. Интегрирование произведений синусов и косинусов – приводим к сумме по формулам:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

Методические указания:

Лазарева Н.Б., Ловцова Н.Н. Интегральное исчисление: http://pnu.edu.ru/media/filer_public/2013/02/26/lazareva_ii.pdf

Определенный интеграл

- Понятие определенного интеграла
- Свойства определенного интеграла

Понятие определенного интеграла

- Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Разобьём $[a, b]$ на *n* частей произвольными точками: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ – произведено ***разбиение*** *R* отрезка $[a, b]$. Далее выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n-1$.

Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Рассмотрим ***интегральную сумму Римана,*** соответствующую разбиению *R*: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Опр. Определенным интегралом функции $f(x)$ на $[a, b]$ - называется предел интегральных сумм при стремлении $\sigma = \max_i \Delta x_i \to 0$, если он существует независимоот разбиения *R и* выбора точек ξ_i *:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\sigma \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Понятие определенного интеграла

- Если предел интегральных сумм существует и конечен, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$ по Риману*.

Теорема 1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ по Риману, то она ограничена на отрезке $[a,b]$.

Теорема 2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 3. Если $f(x)$ ограничена и кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема.

---

*Риман Георг Фридрих Бернхард (1826 -1866 гг) - немецкий математик, механик и физик, основоположник римановой геометрии: геометрического направления теории аналитических функций, теории конформных отображений.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0,$ 2. $\int_a^b 0dx = 0;$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,;$

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

5. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx;$

Свойства о неравенствах:

6. $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a)$, где $|f(x)| \leq M, \forall x$

7. Если $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ и $a < b$, то $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$

8. Если $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)dx\,.$$

Свойства определенного интеграла

9. Если постоянные m и M такие что, $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$ и $a < b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

10. **Теорема о среднем**. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и постоянные m и M такие что, $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$, то $\exists \mu \in [m,M]$: $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

11. Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\exists$c $\in [a,b]$: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Замечание: $f(c)$ и μ называются ***средним значением*** функции на отрезке

Свойства определенного интеграла

12. **Обобщенная теорема о среднем.** Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и постоянные m и M такие что, $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$, а $g(x)$ одного знака, то

$\exists \mu \in [m, M]$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

13. Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $g(x)$ интегрируема и одного знака на $[a,b]$, то $\exists$c $\in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Замечание: $f(c)$ и μ называются ***средневзвешенным значением*** функции $f(x)$ на отрезке.

Свойства определенного интеграла

14. Если $f(x)$ – четная на отрезке $[-a, a]$ функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)dx$.

15. Если $f(x)$ – нечетная на отрезке $[-a, a]$ функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Формула Ньютона-Лейбница

- Интеграл с переменным верхним пределом
- Формула Ньютона-Лейбница
- Замена переменных в определенном интеграле
- Формула интегрирования по частям
- Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.

Интеграл с переменным верхним пределом

- Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и $x \in [a,b]$, тогда $f(t)$ интегрируема на $[a,x]$, $\forall x \in [a,b]$.

Рассмотрим $F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad F(a) = 0, \; F(b) = \int_a^b f(x)dx$.

Теорема 1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и $F'(x) = f(x)$.

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $F(x)$ - первообразная $f(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

Формула Ньютона-Лейбница

- **Теорема 3.** (формула Ньютона-Лейбница*) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\Phi(x)$ – первообразная $f(x)$, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Опр. $f(x)$ называется *кусочно-гладкой* на $[a, b]$, если существует разбиение R отрезка $[a, b]$: $f(x)$ непрерывно дифференцируема внутри каждого отрезка разбиения $\left(x_{i-1,} x_i\right)$ и $\exists \lim_{x \to x_i \pm 0} f(x) < \infty$.

Теорема 4. Если $F(x)$ – непрерывная, кусочно-гладкая функция на $[a, b]$, то $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$.

____

*Го́тфрид Ви́льгельм Ле́йбниц (1646 —1716) - немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель математического анализа. В 1708 году вспыхнул печально известный спор Лейбница с Ньютоном о научном приоритете открытия дифференциального исчисления. Известно, что Лейбниц и Ньютон работали над дифференциальным исчислением параллельно и что в Лондоне Лейбниц ознакомился с некоторыми неопубликованными работами и письмами Ньютона, но пришёл к тем же результатам самостоятельно.

Замена переменных в определенном интеграле

- Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 1. Пусть $x = x(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_a, t_b]$ и $a = x(t_a)$, $b = x(t_b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f\big(x(t)\big)x'(t)dt.$$

Формула интегрирования по частям

Теорема 2. Если $u(x), v(x)$ непрерывные, кусочно-гладкие функции, то имеет место

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Формула для запоминания: $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$.

Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского

- Пусть $y = f(x)$, непрерывная, возрастающая функция и $f(0) = 0$; $x = g(y)$ – обратная к $f(x)$.

Пусть $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi,\ G(y) = \int_0^y g(\zeta)d\zeta$.

Тогда $\forall x, y > 0\ \ xy \leq F(x) + G(y)$ – *неравенство Юнга**

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$ *- неравенство Юнга,*

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**Джон Радфорд Юнг – (1799—1885) — английский математик, профессор.*

Неравенства Юнга, Гёльдера, Минковского

- Пусть $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, тогда имеет место *неравенство Гельдера** при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{1/q}$$

Если $\mathrm{p} = 2$ – *неравенство Коши-Буняковского***

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2\right)^{1/2}.$$

____

*Отто Людвиг Гёльдер (1859 —1937) — известный немецкий математик, наиболее известен по неравенству Гёльдера, условию Гёльдера и теореме Жордана — Гёльдера, теореме Гёльдера (в теории групп), пространствам Гельдера.

**Виктор Яковлевич Буняко́вский (1804-1889) - русский математик, вице-президент академии наук в 1864—1889 годах. Наиболее известный труд «Основания математической теории вероятностей»

Неравенства Юнга, Гёльдера, Минковского

- $\left(\int_a^b |f(x)g(x)|dx\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\right)^{1/p}$ - неравенство Минковского*

---

*Ге́рман Минко́вский (1864-1909) — немецкий математик, разработавший геометрическую теорию чисел и геометрическую четырёхмерную модель теории относительности.

Несобственные интегралы

- Несобственный интеграл с единственной особенностью
- Сходимость несобственных интегралов

Понятие несобственного интеграла

- Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b']$, где $b' < b$, пусть $f(x)$ не ограничена в $U(b)$ или $b \to +\infty$.

Опр. ***Несобственный интеграл*** с единственной особенностью в точке *b* есть

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)dx < \infty$$

или $$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b' \to \infty} \int_a^{b'} f(x)dx$$

Опр. ***Несобственный интеграл*** с единственной особенностью в точке *a* есть

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a' \to a} \int_{a'}^b f(x)dx < \infty$$

или $$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a' \to -\infty} \int_{a'}^b f(x)dx$$

Сходимость несобственного интеграла

- Если пределы существуют и конечны, несобственный интеграл называется ***сходящимся (сходится).***

Условие Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_0 < b$: $\forall b', b''$: $b_0 < b' < b'' < b$

выполнено $\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

Теорема 1. Для того чтобы несобственный интеграл с единственной особенностью сходился необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие Коши.

Пример. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geq 1$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.

Сходимость несобственных интегралов

- Опр. Несобственный интеграл ***сходится абсолютно,*** если сходится интеграл от модуля функции.

Замечание. Все свойства определенных интегралов выполнены и для несобственных

Теорема 2. Абсолютно сходящийся интеграл – сходится.

Теорема 3. Если $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема внутри интервала, то

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx\,.$$

Теорема 4. Пусть $\forall x \in [a, b)$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$, тогда $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ и, если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а если $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

Сходимость несобственных интегралов

- Пусть $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ несобственные интегралы с единственной особенностью.

Теорема 4 (Признак сравнения**).** Пусть $\forall x \in [a, b)$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$, тогда $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ и, если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а если $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

Теорема 5 (предельный признак сравнения). Если $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ и $\exists \lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, тогда несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Теорема 6. Если выполнены условия теоремы 5 и $\varphi(x) \geq 0$, непрерывна на $[a, b]$, несобственные интегралы $\int_a^b \varphi(x)f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)g(x)dx$ сходятся одновременно.

Сходимость несобственных интегралов

- **Теорема 7** (**признак Дирихле***). Пусть $F(x)$ – дифференцируема на (a, ∞) и ограничена на $[a, \infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, то $\int_a^\infty F'(x)g(x)dx$ сходится.

____

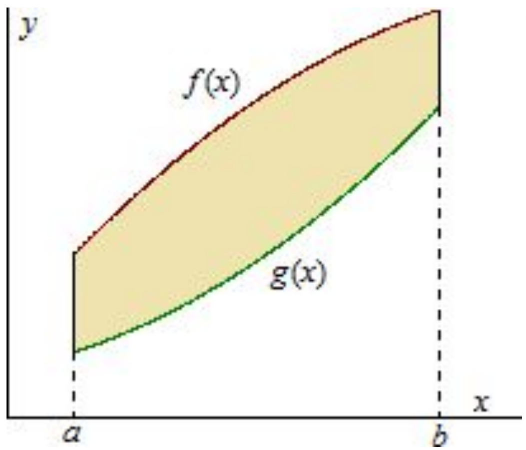
*Ио́ганн Пе́тер Гу́став Лежён Дирихле́ (1805- 1859) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел. Член Берлинской и многих других академий наук, в том числе Петербургской

Приложения определенных интегралов

- Площади
- Длина дуги кривой
- Объем тела вращения
- Площадь поверхности вращения
- Масса материальной пластины, материальной кривой
- Координаты центра тяжести
- Работа силы

Площадь плоской фигуры

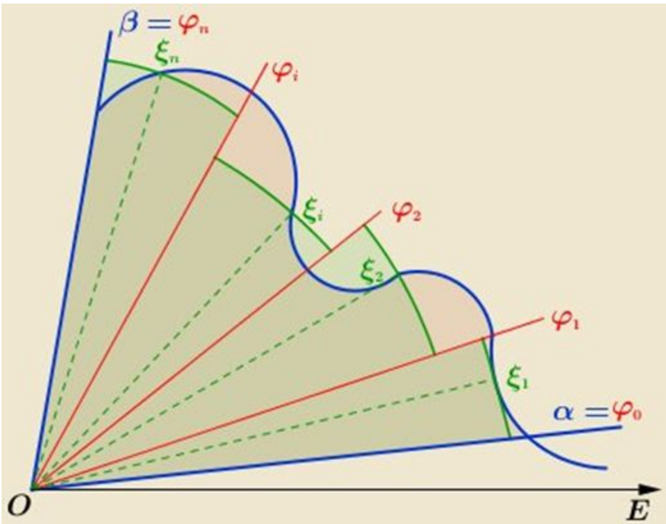
- **Задача**. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x),\ y = g(x), a \le x \le b$.



$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Замечание: формула верна вне зависимости от знака функций $f(x)$ и $g(x)$.

Площадь в полярной системе координат



ПСК : полярная система координат $M(\varphi, \rho)$, где φ – угол наклона луча относительно оси, ρ – расстояние от точки до центра.

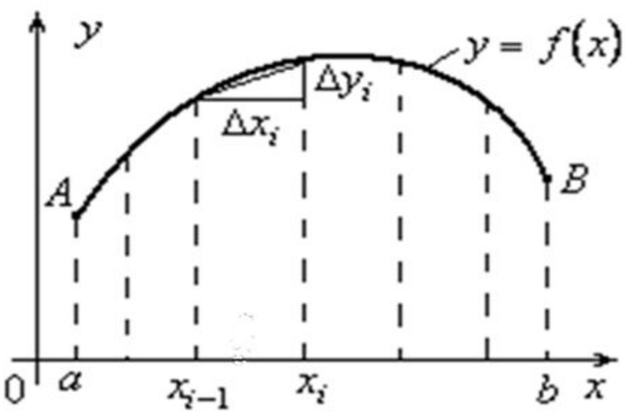
Кривая в ПСК : $\rho = \rho(\varphi)$.

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и прямыми $\varphi = \alpha, \quad \varphi = \beta$.

$$S_{\varphi,\rho} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi\,.$$

Длина дуги кривой

- Длина дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$ на



интервале (a, b):

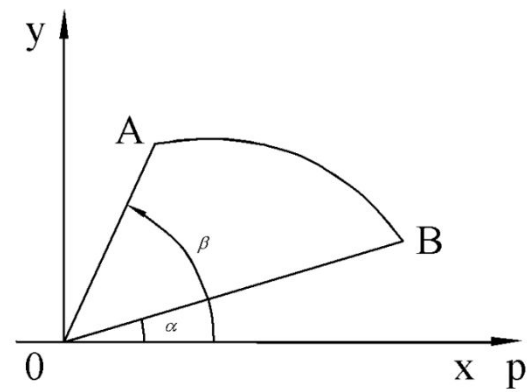
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx;$$

заданной параметрически:

$$l_t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

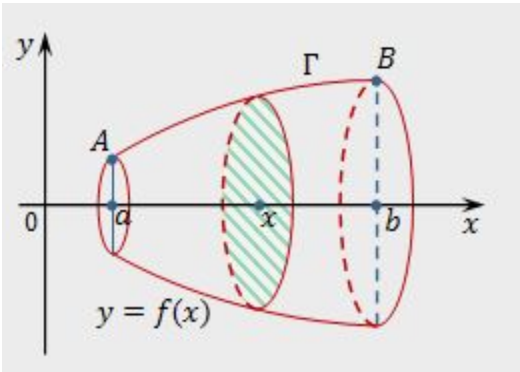
В полярной системе координат:

$$l_\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi\,.$$



Объем тела вращения

- **Задача**. Найти объем тела вращения криволинейной трапеции, ограниченной $y = f(x),\ y = 0, a \leq x \leq b$

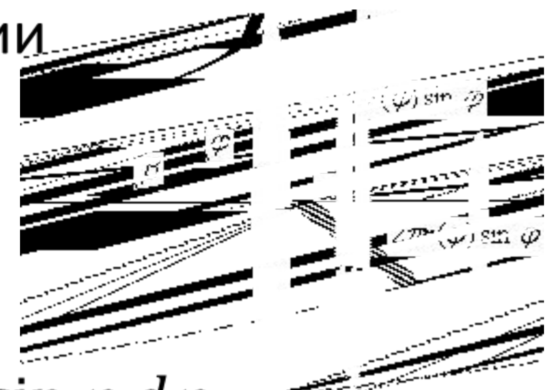


вокруг оси OX:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

вокруг оси OY: $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx.$

Объём тела, получающийся при вращении сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вокруг полярной оси



находится по формуле: $V_\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi.$

Площадь поверхности вращения

- Площадь поверхности вращения, образующейся при вращении вокруг оси Ox дифференцируемой кривой, определяется по формулам:

В декартовой системе координат:

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx;$$

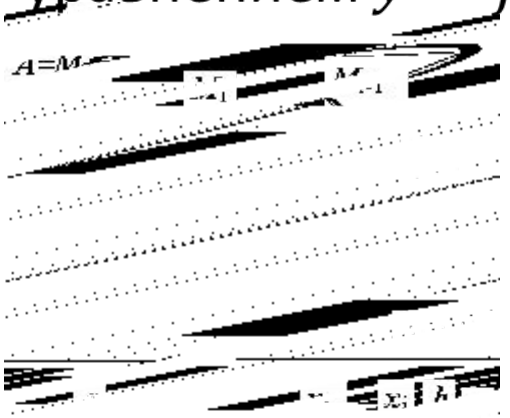
Параметрически: $S_t = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt;$

В полярной системе координат:

$S_\varphi = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi)|\sin\varphi|\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi.$

Масса материальной кривой

Задача. Найти массу материальной кривой $\breve{AB}$, заданной уравнением $y = f(x)$ с линейной плотностью $\gamma(x)$.



Разобьем кривую $\breve{AB}$ на *n* частей, будем считать , что на участке $\overparen{M_{i-1}M_i}$ плотность постоянная и равна $\gamma(x_i)$, тогда $m_l \cong \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)|\overparen{M_{i-1}M_i}|$,

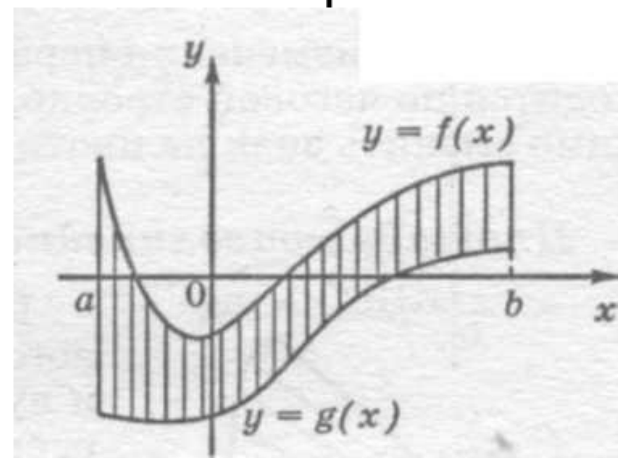
переходя к пределу получаем:

$$m_l = \int_a^b \gamma(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Масса пластины

Задача. Найти массу пластины , ограниченной кривыми $y = f(x), y = g(x), a \le x \le b$

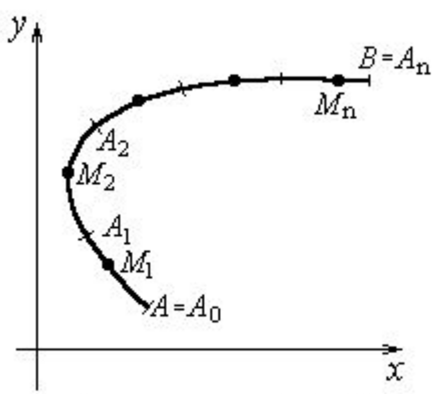
с поверхностной плотностью $\sigma(x)$.



$$m = \int_a^b \sigma(x)(f(x) - g(x))\,dx.$$

Координаты центра тяжести

- Пусть дана система материальных точек $\{M_i\}$ с массами m_i.



Разбиение кривой $L = AB$

тогда $x_i m_i$ - статический момент M_i относительно оси Oy, а $y_i m_i$ - статический момент M_i относительно оси Ox

Координаты центра тяжести системы материальных точек :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{m}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{m},$$

Здесь $M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ - **статический момент** системы точек относительно оси *Oy*, $M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i$ - **статический момент** системы точек относительно оси *O*x.

Статические моменты

- Статические моменты материальной кривой $\breve{AB}$, заданной уравнением $y = f(x)$ с линейной плотностью $\gamma(x)$:

$$M_y = \int_a^b x\gamma(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$M_x = \int_a^b f(x)\gamma(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

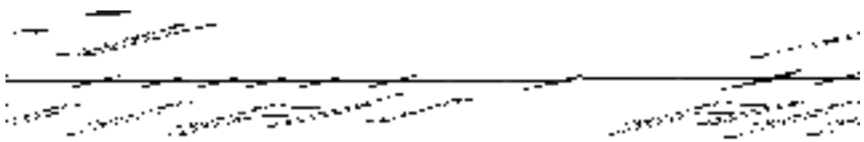
Статические моменты пластины , ограниченной кривыми $y = f(x), y = g(x), a \le x \le b$ с поверхностной плотностью $\sigma(x)$:

$$M_y = \int_a^b x\sigma(x)(f(x) - g(x))\, dx,$$

$$M_x = \int_a^b \sigma(x)(f^2(x) - g^2(x))\, dx.$$

Работа силы

- Пусть материальная точка *M* перемещается по действием силы $F(x)$, направленной вдоль оси Ох и имеющей переменную величину , где *x* – абсцисса движущейся точки *M*.



Найдем работу *A* силы $\vec{F}$ по перемещению точки *M* вдоль оси Ох из точки *x* = *a* в точку *x* = *b* (*a* < *b*). Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей, тогда можно считать , что на каждой малой части разбиения сила постоянная и работа равна сумме произведений величины силы на участке на величину перемещения.

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b F(x)dx.$$