

Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл

- Первообразная, неопределенный интеграл
- Свойства НИ
- Таблица интегралов и первообразных
- Методы интегрирования

Первообразная, неопределенный интеграл

Опр. Функция $F(x)$ – **первообразная** функции $f(x)$, если $F(x)$ дифференцируема на D и $F'(x) = f(x)$.

Пример. Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной функции $f(x) = x^2$.

Теорема 1. Первообразные одной функции отличаются не более чем на постоянную величину. (т.е. если $F(x)$ и $\Phi(x)$ две первообразные функции $f(x)$, то $\exists c \in \mathbf{R}$:

$$F(x) = \Phi(x) + c$$

Опр. Семейство всевозможных первообразных функции называется **неопределенным интегралом**

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x).$$

Свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x);$
2. $\int dF(x) = F(x) + c;$
3. Линейность:
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx;$$
4. Подобие: если $F(x)$ – первообразная $f(x)$, то
$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + c;$$
5. Смещение: если $F(x)$ – первообразная $f(x)$, то
$$\int f(x + b)dx = F(x + b) + c;$$
6. Неопределенный интеграл инвариантен относительно переменной: т.е., если $\int f(x)dx = F(x) + c$, то
$$\int f(t)dt = F(t) + c,$$

Таблица интегралов

$$1. \int 0 dx = c;$$

$$2. \int A dx = Ax + c;$$

$$3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{N};$$

$$3.1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1;$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$$

$$4.1. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c;$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, (a > 0, a \neq 1);$$

$$5.1 \int e^x dx = e^x + c;$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + c;$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$$

Таблица интегралов (продолжение)

$$\bullet \quad 10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + c, \\ -\arccos \frac{x}{a} + c \end{cases}$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \end{cases}$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c;$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a^2}| + c;$$

$$13.1. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + c;$$

$$14. \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c;$$

$$15. \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c$$

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование - метод при котором интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

2. Метод замены переменной (метод подстановки)

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ dx = x'(t)dt \end{array} \right| = \int f(x(t))x'(t)dt$$

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \left| \begin{array}{l} u = u(x) \\ u'(x)dx = du \end{array} \right| = \int f(u)du$$

Методы интегрирования (продолжение)

3. Интегрирование по частям.

Теорема 1. Если $u(x), v(x)$ дифференцируемые функции, то

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Формула для запоминания: $\int u dv = uv - \int v du.$

Замечание. Не интегрируются в элементарных функциях

Интеграл Пуассона $\int e^{-x^2} dx;$

Интегралы Френеля $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx;$

Интегральный логарифм $\int \frac{dx}{\ln x};$

Интегральные синус и косинус $\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx$

Методы интегрирования

- Интегрирование рациональных дробей
- Интегрирование иррациональных функций
- Интегрирование тригонометрических функций

Интегрирование рациональных дробей

Любая рациональная функция представима в виде рациональной дроби:

$$R(x) = \frac{Q_n(x)}{P_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$$

Любая правильная рациональная дробь представима в виде линейной комбинации элементарных дробей.

$$\text{I. } \frac{A}{x+a}; \quad \text{II. } \frac{A}{(x+a)^k}; \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}.$$

Метод разложения — метод неопределенных коэффициентов.

Интегрирование рациональных дробей

Интегрирование элементарных дробей

$$1. \int \frac{A}{x+a} dx = A \ln|x+a| + c;$$

$$2. \int \frac{A}{(x+a)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x+a)^{k-1}} + c;$$

$$3. \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c;$$

$$4. \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + \\ + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Интегрирование иррациональных функций

1. $\int R(x, x^{n/m}, \dots, x^{s/r}) dx$

Замена переменной: $x = t^k$, $dx = kt^{k-1} dt$,

где k - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{n}{m}, \dots, \frac{s}{r}$

2. $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$

Подстановка $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$

3. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

3.1 квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни

$$x_1, x_2,$$

сводим к 2. соотношением $ax^2 + bx + c = \frac{a(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x-x_1)}$

Интегрирование иррациональных функций

3.2 уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, $a > 0$

Подстановка Эйлера $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}$,

$$x = \frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}$$

3.3 уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, $a < 0$,
 $c > 0$

Подстановка Эйлера $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$

Выделение полного квадрата $ax^2 + bx + c$,

подстановка $u = x + \frac{b}{2a}$, сведение к 4.

Интегрирование иррациональных функций

$$3.4 \int \frac{dx}{(mx+n)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad k = 1, 2 \text{ подстановка: } mx + n = \frac{1}{t}$$

$$4. \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad x = a \sin t$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \quad x = a \operatorname{ch} t, \text{ где } \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \quad x = a \operatorname{tgt} \quad \text{или} \quad x = a \operatorname{sh} t$$

Интегрирование тригонометрических функций

1. $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ - нечетная по $\sin x$ -

подстановка $t = \cos x$

3. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ - нечетная по $\cos x$ -

подстановка $t = \sin x$

4. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ - четная по $\cos x$ и $\sin x$

подстановка $t = \operatorname{tg} x$

Интегрирование тригонометрических функций

5. $\int \sin^n x \cos^m x dx$, где m, n – четные, то формула понижения степени: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

6. Интегрирование произведений синусов и косинусов – приводим к сумме по формулам:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))\end{aligned}$$

Методические указания:

Лазарева Н.Б., Ловцова Н.Н. Интегральное исчисление:

http://pnu.edu.ru/media/filer_public/2013/02/26/lazareva_ii.pdf

Определенный интеграл

- Понятие определенного интеграла
- Свойства определенного интеграла

Понятие определенного интеграла

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Разобьём $[a, b]$ на n частей произвольными точками: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ – произведено **разбиение** R отрезка $[a, b]$. Далее выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n - 1$.

Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Рассмотрим **интегральную сумму Римана**, соответствующую разбиению R : $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.

Опр. Определённым интегралом функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется предел интегральных сумм при стремлении $\sigma = \max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, если он существует независимо от разбиения R и выбора точек ξ_i :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Понятие определенного интеграла

Если предел интегральных сумм существует и конечен, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$ по Риману*.

Теорема 1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ по Риману, то она ограничена на отрезке $[a, b]$.

Теорема 2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 3. Если $f(x)$ ограничена и кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема.

*Риман Георг Фридрих Бернхард (1826 -1866 гг) - немецкий математик, механик и физик, основоположник римановой геометрии: геометрического направления теории аналитических функций, теории конформных отображений.

Свойства определенного интеграла

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0,$$

$$2. \int_a^b 0 dx = 0;$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

$$5. \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

Свойства о неравенствах:

$$6. \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq M(b - a), \text{ где } |f(x)| \leq M, \forall x$$

$$7. \text{ Если } f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \text{ и } a < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

8. Если $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Свойства определенного интеграла

9. Если постоянные m и M такие что, $m \leq f(x) \leq M$
 $\forall x \in [a, b]$ и $a < b$, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

10. **Теорема о среднем.** Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и постоянные m и M такие что, $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$, то $\exists \mu \in [m, M]$: $\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a)$.

11. **Следствие.** Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists c \in [a, b]$: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

Замечание: $f(c)$ и μ называются **средним значением** функции на отрезке

Свойства определенного интеграла

12. **Обобщенная теорема о среднем.** Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и постоянные m и M такие что, $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$, а $g(x)$ одного знака, то

$$\exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

13. **Следствие.** Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $g(x)$ интегрируема и одного знака на $[a, b]$, то $\exists c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Замечание: $f(c)$ и μ называются **средневзвешенным значением** функции $f(x)$ на отрезке.

Свойства определенного интеграла

14. Если $f(x)$ – четная на отрезке $[-a, a]$ функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

15. Если $f(x)$ – нечетная на отрезке $[-a, a]$ функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Формула Ньютона-Лейбница

- Интеграл с переменным верхним пределом
- Формула Ньютона-Лейбница
- Замена переменных в определенном интеграле
- Формула интегрирования по частям
- Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, и $x \in [a, b]$, тогда $f(t)$ интегрируема на $[a, x]$, $\forall x \in [a, b]$.

Рассмотрим $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $F(a) = 0$, $F(b) = \int_a^b f(x)dx$.

Теорема 1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Теорема 2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $F'(x) = f(x)$.

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $F(x)$ - первообразная $f(x)$ $\forall x \in (a, b)$.

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 3. (формула Ньютона-Лейбница*) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\Phi(x)$ – первообразная $f(x)$, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Опр. $f(x)$ называется *кусочно-гладкой* на $[a, b]$, если существует разбиение R отрезка $[a, b]$: $f(x)$ непрерывно дифференцируема внутри каждого отрезка разбиения (x_{i-1}, x_i) и $\exists \lim_{x \rightarrow x_i \pm 0} f(x) < \infty$.

Теорема 4. Если $F(x)$ – непрерывная, кусочно-гладкая функция на $[a, b]$, то $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$.

*Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716) - немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель математического анализа. В 1708 году вспыхнул печально известный спор Лейбница с Ньютоном о научном приоритете открытия дифференциального исчисления. Известно, что Лейбниц и Ньютон работали над дифференциальным исчислением параллельно и что в Лондоне Лейбниц ознакомился с некоторыми неопубликованными работами и письмами Ньютона, но пришёл к тем же результатам самостоятельно.

Замена переменных в определенном интеграле

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Теорема 1. Пусть $x = x(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_a, t_b]$ и $a = x(t_a)$, $b = x(t_b)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_a}^{t_b} f(x(t)) x'(t) dt.$$

Формула интегрирования по частям

Теорема 2. Если $u(x)$, $v(x)$ непрерывные, кусочно-гладкие функции, то имеет место

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Формула для запоминания: $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$

Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского

Пусть $y = f(x)$, непрерывная, возрастающая функция и $f(0) = 0$; $x = g(y)$ – обратная к $f(x)$.

Пусть $F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$, $G(y) = \int_0^y g(\zeta) d\zeta$.

Тогда $\forall x, y > 0 \quad xy \leq F(x) + G(y)$ – неравенство Юнга*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \text{ - неравенство Юнга,}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

*Джон Радфорд Юнг – (1799—1885) — английский математик, профессор.

Неравенства Юнга, Гёльдера, Минковского

Пусть $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, тогда имеет место *неравенство Гельдера** при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{1/q}$$

Если $p = 2$ – *неравенство Коши-Буняковского***

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 \right)^{1/2} .$$

*Отто Людвиг Гёльдер (1859 — 1937) — известный немецкий математик, наиболее известен по неравенству Гёльдера, условию Гёльдера и теореме Жордана — Гёльдера, теореме Гёльдера (в теории групп), пространствам Гельдера.

**Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889) - русский математик, вице-президент академии наук в 1864—1889 годах. Наиболее известный труд «Основания математической теории вероятностей»

Неравенства Юнга, Гёльдера, Минковского

- $\left(\int_a^b |f(x)g(x)| dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\right)^{1/p}$ -
неравенство Минковского*

* Герман Минковский (1864-1909) — немецкий математик, разработавший геометрическую теорию чисел и геометрическую четырёхмерную модель теории относительности.

Несобственные интегралы

- Несобственный интеграл с единственной особенностью
- Сходимость несобственных интегралов

Понятие несобственного интеграла

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b']$, где $b' < b$,
пусть $f(x)$ не ограничена в $U(b)$ или $b \rightarrow +\infty$.

Опр. **Несобственный интеграл** с единственной особенностью в точке b есть

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b' \rightarrow b} \int_a^{b'} f(x)dx < \infty$$

или $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b' \rightarrow \infty} \int_a^{b'} f(x)dx$

Опр. **Несобственный интеграл** с единственной особенностью в точке a есть

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a' \rightarrow a} \int_{a'}^b f(x)dx < \infty$$

или $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a' \rightarrow -\infty} \int_{a'}^b f(x)dx$

Сходимость несобственного интеграла

Если пределы существуют и конечны, несобственный интеграл называется **сходящимся (сходится)**.

Условие Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists b_0 < b: \forall b', b'': b_0 < b' < b'' < b$

выполнено $\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

Теорема 1. Для того чтобы несобственный интеграл с единственной особенностью сходилась необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие Коши.

Пример. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geq 1$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.

Сходимость несобственных интегралов

Опр. Несобственный интеграл *сходится абсолютно*, если сходится интеграл от модуля функции.

Замечание. Все свойства определенных интегралов выполнены и для несобственных

Теорема 2. Абсолютно сходящийся интеграл – сходится.

Теорема 3. Если $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема внутри интервала, то

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx.$$

Теорема 4. Пусть $\forall x \in [a, b) 0 \leq f(x) \leq g(x)$, тогда $0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ и, если $\int_a^b g(x) dx$ сходится, то $\int_a^b f(x) dx$ сходится, а если $\int_a^b f(x) dx$ расходится, то $\int_a^b g(x) dx$ расходится.

Сходимость несобственных интегралов

Пусть $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ несобственные интегралы с единственной особенностью.

Теорема 4 (Признак сравнения). Пусть $\forall x \in [a, b)$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$, тогда $0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ и, если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а если $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

Теорема 5 (предельный признак сравнения). Если $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ и $\exists \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, тогда несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Теорема 6. Если выполнены условия теоремы 5 и $\varphi(x) \geq 0$, непрерывна на $[a, b]$, несобственные интегралы $\int_a^b \varphi(x)f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)g(x)dx$ сходятся одновременно.

Сходимость несобственных интегралов

Теорема 7 (признак Дирихле*). Пусть $F(x)$ – дифференцируема на (a, ∞) и ограничена на $[a, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, то $\int_a^{\infty} F'(x)g(x)dx$ сходится.

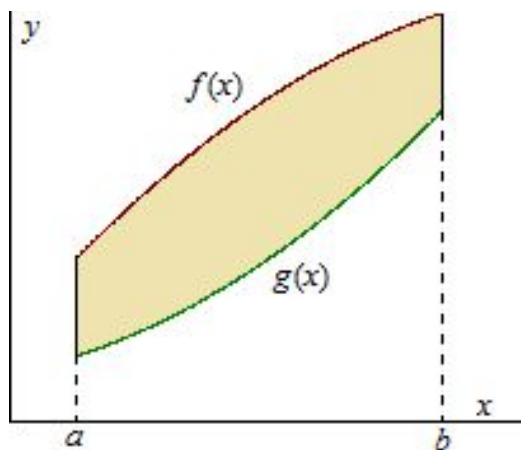
*Иоганн Пётр Густав Лежён Дирихлэ (1805- 1859) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел. Член Берлинской и многих других академий наук, в том числе Петербургской

Приложения определенных интегралов

- Площади
- Длина дуги кривой
- Объем тела вращения
- Площадь поверхности вращения
- Масса материальной пластины, материальной кривой
- Координаты центра тяжести
- Работа силы

Площадь плоской фигуры

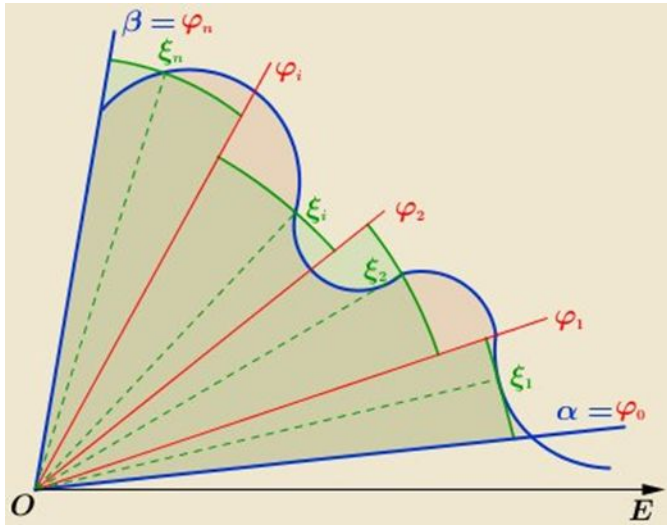
Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$.



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Замечание: формула верна вне зависимости от знака функций $f(x)$ и $g(x)$.

Площадь в полярной системе координат



ПСК : полярная система координат $M(\varphi, \rho)$, где φ – угол наклона луча относительно оси, ρ – расстояние от точки до центра.

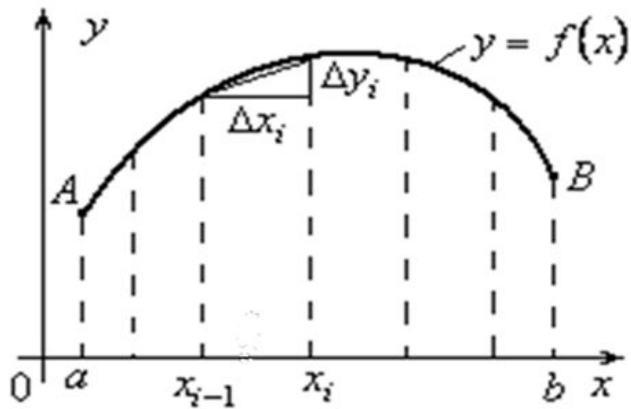
Кривая в ПСК : $\rho = \rho(\varphi)$.

Задача. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и прямыми $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

$$S_{\varphi, \rho} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Длина дуги кривой

Длина дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$ на интервале (a, b) :



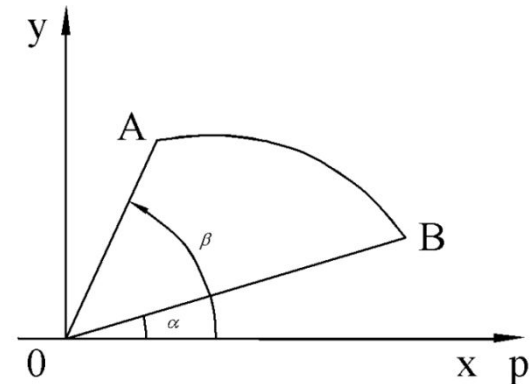
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx;$$

заданной параметрически:

$$l_t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

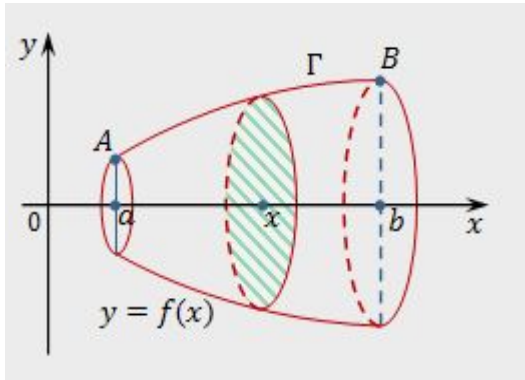
В полярной системе координат:

$$l_\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$



Объем тела вращения

Задача. Найти объем тела вращения криволинейной трапеции, ограниченной $y = f(x)$, $y = 0$, $a \leq x \leq b$



вокруг оси OX :

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

вокруг оси OY : $V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$

Объём тела, получающийся при вращении сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вокруг полярной оси

находится по формуле: $V_\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$



Площадь поверхности вращения

Площадь поверхности вращения, образующейся при вращении вокруг оси Ox дифференцируемой кривой, определяется по формулам:

В декартовой системе координат:

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx;$$

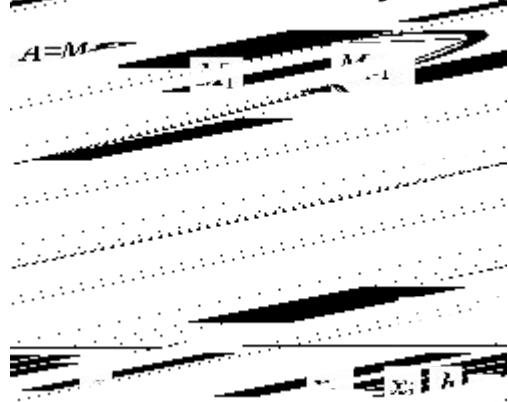
Параметрически: $S_t = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt;$

В полярной системе координат:

$$S_\varphi = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) |\sin \varphi| \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Масса материальной кривой

Задача. Найти массу материальной кривой \overline{AB} , заданной уравнением $y = f(x)$ с линейной плотностью $\gamma(x)$.



Разобьем кривую \overline{AB} на n частей, будем считать, что на участке $\overline{M_{i-1}M_i}$ плотность постоянная и равна $\gamma(x_i)$,

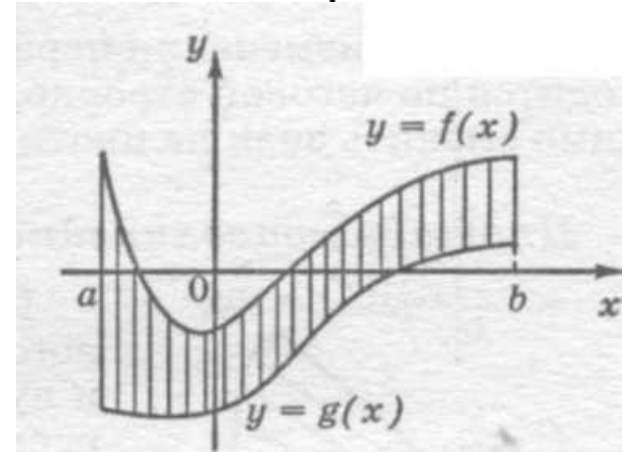
тогда $m_l \cong \sum_{i=1}^n \gamma(x_i) |\overline{M_{i-1}M_i}|$,

переходя к пределу получаем:

$$m_l = \int_a^b \gamma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Масса пластины

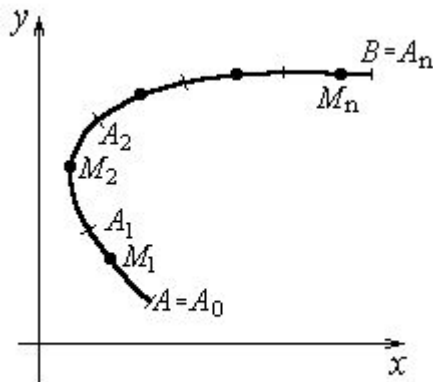
Задача. Найти массу пластины, ограниченной кривыми $y = f(x), y = g(x), a \leq x \leq b$ с поверхностной плотностью $\sigma(x)$.



$$m = \int_a^b \sigma(x)(f(x) - g(x)) dx.$$

Координаты центра тяжести

Пусть дана система материальных точек $\{M_i\}$ с массами m_i .



Разбиение кривой $L=AB$

тогда $x_i m_i$ - статический момент M_i

относительно оси Oy , а

$y_i m_i$ - статический момент M_i

относительно оси Ox

Координаты центра тяжести системы

материальных точек :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{m},$$

Здесь $M_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i$ - **статический момент** системы точек относительно оси Oy , $M_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i$ - **статический момент** системы точек относительно оси Ox .

Статические моменты

Статические моменты материальной кривой \overline{AB} , заданной уравнением $y = f(x)$ с линейной плотностью $\gamma(x)$:

$$M_y = \int_a^b x\gamma(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

$$M_x = \int_a^b f(x)\gamma(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

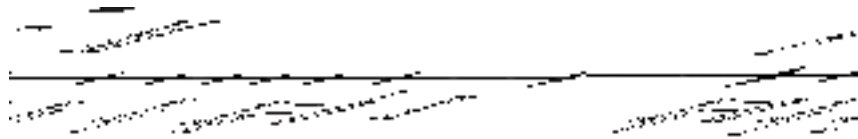
Статические моменты пластины, ограниченной кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$ с поверхностной плотностью $\sigma(x)$:

$$M_y = \int_a^b x\sigma(x)(f(x) - g(x)) dx,$$

$$M_x = \int_a^b \sigma(x)(f^2(x) - g^2(x)) dx.$$

Работа силы

Пусть материальная точка M перемещается по действием силы $F(x)$, направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину, где x – абсцисса движущейся точки M .



Найдем работу A силы \vec{F} по перемещению точки M вдоль оси Ox из точки $x = a$ в точку $x = b$ ($a < b$). Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей, тогда можно считать, что на каждой малой части разбиения сила постоянная и работа равна сумме произведений величины силы на участке на величину перемещения.

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx.$$