

КВАНТОВЫЕ ИГРЫ

и теоретико-игровые основания
прагматики

В.Л.Васюков

профессор
кафедры онтологии, логики
и теории познания
НИУ ВШЭ
vasyukov4@gmail.com



Кубиты и все такое...

$$\psi = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

n-кубитный регистр

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha \in [0,1]^n} \alpha_x |x\rangle$$
$$\sum_{\alpha \in [0,1]^n} |\alpha|^2 = 1$$

кубит

Переключатель
знака состояния

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

NOT

регистры
Паули

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\psi_1 \psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \alpha_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Преобразование Адамара

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

Алгоритм квантового компьютера

- Приготовь начальное состояние (обычно берется $|00\dots 0\rangle$)
- Примени последовательность унитарных преобразований
- Прodelай измерение для считывания состояния

ОСНОВЫ КВАНТОВЫХ ИГРЫ

Классические игры

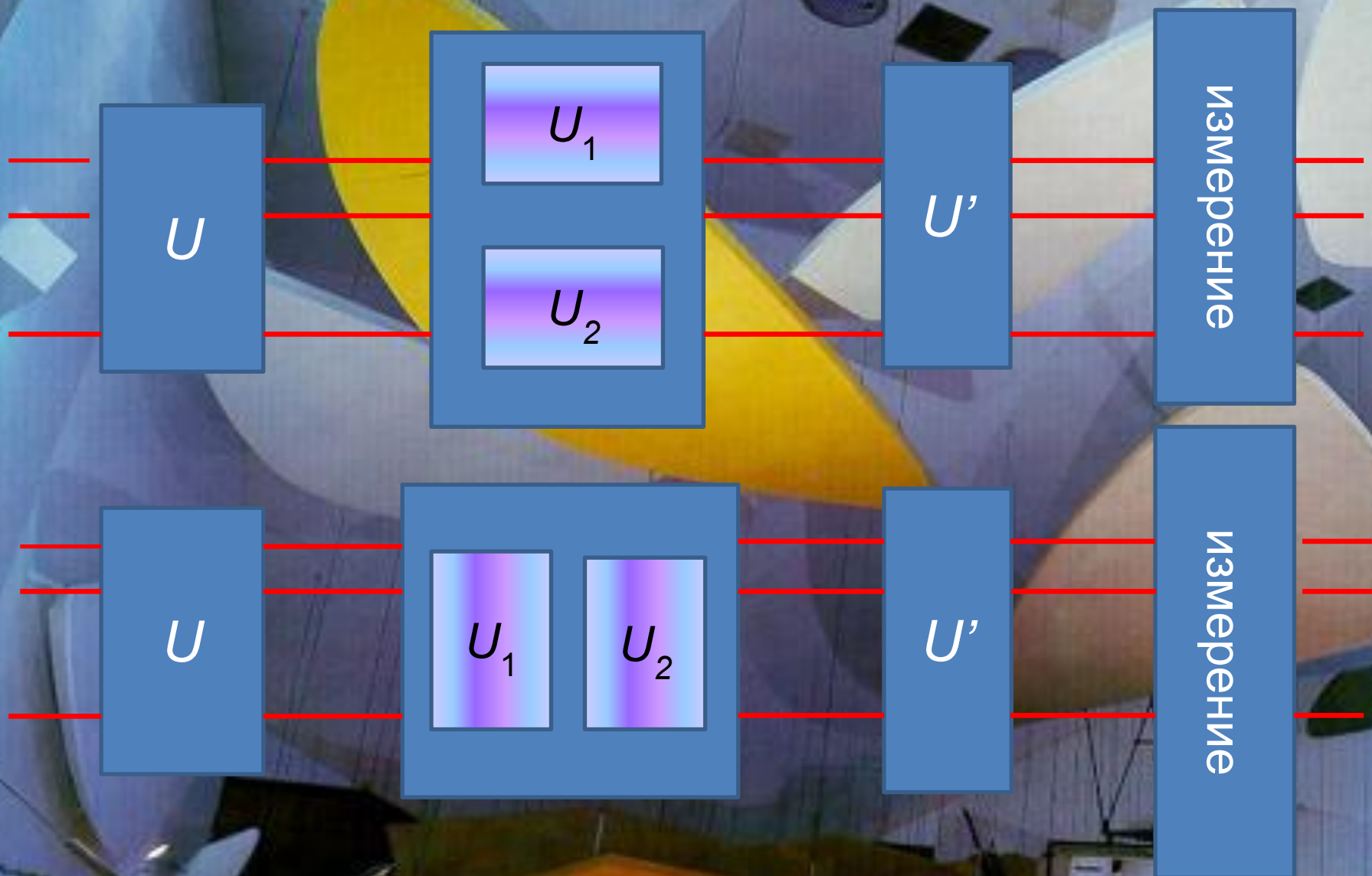
- $G(n, S, u)$
- n – количество игроков
- $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, где $S_i, i = 1, \dots, n$ – пространства стратегий
- $u = u_1 \times \dots \times u_n$, где $u_i(s_1, \dots, s_n), i = 1, \dots, n$ – функции выигрыша, $s_n \in S_i$



Квантовые игры

- $G(n, \Theta(\mathbb{H}), \rho, S, u)$
- n – количество игроков
- \mathbb{H} - двумерное гильбертово пространство
- $\Theta(\mathbb{H})$ – пространство состояний игры
- $\rho \in \Theta(\mathbb{H})$ – начальное состояние
- $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ – пространство стратегий
- $u = u_1 \times \dots \times u_n$, - функция полезности, где $u_i: \Theta(\mathbb{H}) \rightarrow \mathfrak{R}$ для игрока i

Статические и динамические квантовые игры



Переворачивание монеты

P против **Q**

Классический случай

Ходы:

- судья кладет монету орлом вверх
- Q либо переворачивает ее (F), либо нет (N)
- затем P либо переворачивает монету (F) либо нет (N)
- и наконец Q делает финальный ход либо переворачивая монету (F) либо нет (N)

Если в конце монета лежит орлом вверх, то выигрывает P с выигрышем +1, а проигрыш Q составляет -1. В противном случае Q получает +1, а P получает -1.

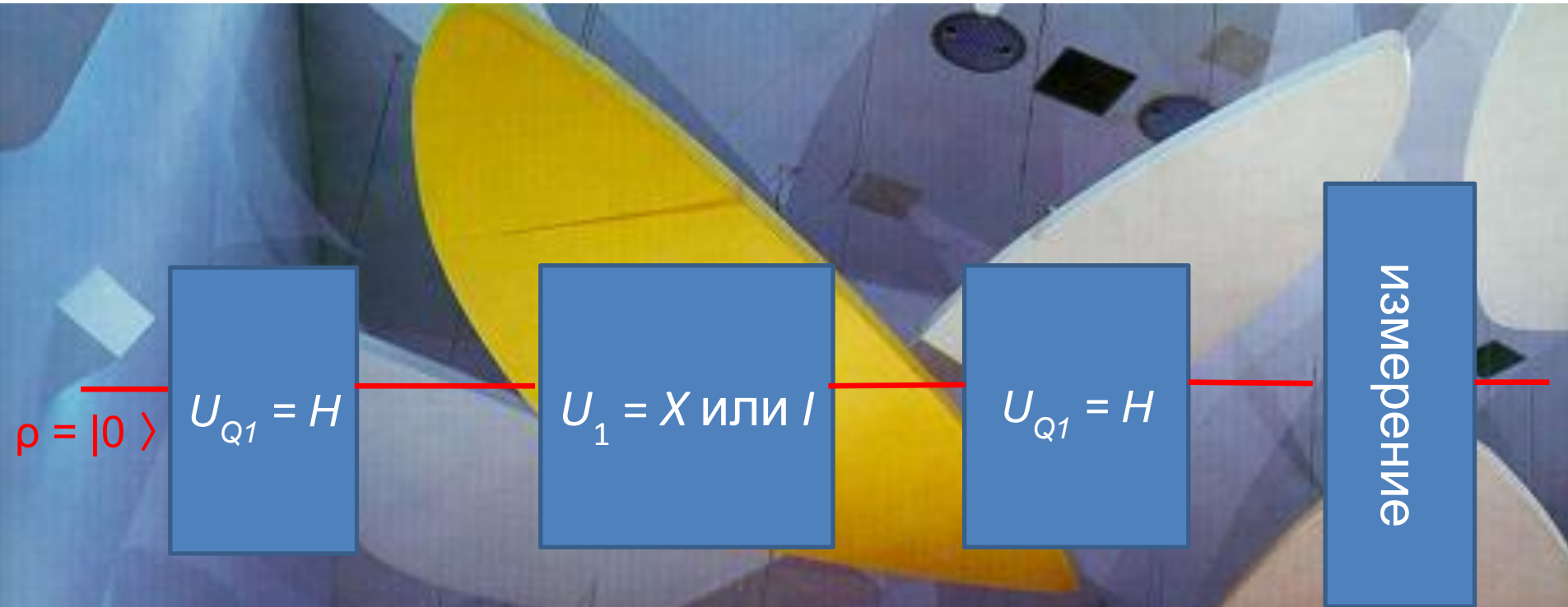
Матрица выигрышей

| | | | | |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| Q | NN | NF | FN | FF |
| P:N | (-1, +1) | (+1, -1) | (+1, -1) | (-1, +1) |
| P:F | (+1, -1) | (-1, +1) | (-1, +1) | (+1, -1) |

Квантовый случай

- Q применяет квантовую стратегию
- P обречен на классическую стратегию
- $|0\rangle$ - орел
- $|1\rangle$ - решка
- состояние игры представляется кубитом $\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- начальное состояние игры $\rho = |0\rangle$
- первый ход – тождественное преобразование U
- переворачивание F и непереворачивание N представляются преобразованиями X и I соответственно
- P может сыграть либо X , либо I , а Q может выбрать любое унитарное преобразование (используется преобразование Адамара)
- игра характеризуется как $G(n = 2, \Theta(\mathbb{H}) = \mathbb{H}, \rho = |0\rangle, S_1 \times S_2, u)$
- $S_1 = \{X, I\}$, S_2 есть множество всех унитарных матриц
- U совпадает с классическим случаем

PQ – переворачивание монеты



$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

Логика квантовых вычислений QCL

Регистры Тоффли

$$T^{(1,1,1)}: \otimes^3 \mathbb{H} \rightarrow \otimes^3 \mathbb{H}$$

$$T^{(1,1,1)}(|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle) = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |\min(x,y) \otimes z\rangle$$

$$Q^{(1,1,1)}: \otimes^3 \mathbb{H} \rightarrow \otimes^3 \mathbb{H}$$

$$Q^{(1,1,1)}(|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle) = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |\max(x,y) \otimes z\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{AND}(|\phi\rangle, |\psi\rangle) &= T^{(1,1,1)}(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |0\rangle) \\ \text{NOT}(|\phi\rangle) &= T^{(1,1,1)}(|\phi\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle) \\ \text{OR}(|\phi\rangle, |\psi\rangle) &= Q^{(1,1,1)}(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |0\rangle) \end{aligned}$$

$$\text{QUB: } Form^L \rightarrow U_n \otimes^3 \mathbb{H}$$

$$|\neg\beta\rangle = \text{NOT}(|\beta\rangle) \in \otimes^n \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$$

$$|\beta \wedge \gamma\rangle = \text{AND}(|\beta\rangle, |\gamma\rangle) \in \otimes^n \mathbb{H} \otimes (\otimes^m \mathbb{H}) \otimes \mathbb{H}$$

$$|\beta \vee \gamma\rangle = \text{OR}(|\beta\rangle, |\gamma\rangle) \in \otimes^n \mathbb{H} \otimes (\otimes^m \mathbb{H}) \otimes \mathbb{H}$$

Аксиоматизируема ли
QCL?

Логика Дишканта LQ

- Г.Дишкант [1978] предложил включить аксиомы Макки в исчисление Лукасевича $\mathcal{L}_{\exists 0}$ и построил модальное расширение логики, обогатив систему модальным символом Q и четырьмя модальными правилами вывода. Высказывание QA при этом означает «A подтверждается экспериментом», а наиболее специфическое правило вывода можно сформулировать так: для совместных измерений импликация эквивалентна подтверждению материальной импликации.

Логика Дишканта LQ

- $I: W^0 \rightarrow S$ есть LQ - интерпретация, если она удовлетворяет следующим условиям:
- (I) $I(A \rightarrow B) = \min(1, 1 - I(A) + I(B))$;
- (II) $I(\neg A) = 1 - I(A)$;
- (III) $I(QA) = q(I(A))$;
- для любых $A, B \in W^0$, где W^0 – множество формул LQ.
- При этом $1: \psi \rightarrow \{1\}$, где ψ - множество всех состояний объекта, причем состояние, как обычно, представляет собой вектор гильбертова пространства, а любая функция $g: \psi \rightarrow [0, 1]$ называется обобщенным вопросом. Далее, $P \subseteq S$, где S - множество всех обобщенных вопросов, а P – множество обычных квантовологических вопросов («да-нет»-измерений), и функция $q: S \rightarrow P$ определяется условиями:
- a1. $g \leq h \Rightarrow q(g) \leq q(h)$;
- a2. $q(p) = p$;
- для любых $g, h \in S$; $p \in P$.
- Очевидным образом при таком определении для модальных формул LQ функция q играет ту же роль, что и функция p у Макки, ставящая в соответствие каждой тройке (A, α, E) (где $A \in \mathbf{A}$, $\alpha \in S$, $E \in \mathbf{B}$; \mathbf{A} – множество наблюдаемых, S - множество состояний, \mathbf{B} – множество всех борелевских подмножеств действительной числовой прямой) число $p(A, \alpha, E)$, $0 \leq p(A, \alpha, E) \leq 1$. Роль множества наблюдаемых выполняет W^0 , множества состояний – $\text{dom}(S)$, множества \mathbf{B} – $\text{rng}(S)$.

Логика Дишканта LQ

- **A1.** $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- **A2.** $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- **A3.** $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$
- **A4.** $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- **B5.** $A, A \rightarrow B$
- B
- **B6.** A
- QA
- **B7.** A
- $\neg Q\neg A$
- **B8.** $A \rightarrow B$
- $QA \rightarrow QB$
- **B9.** $QA \rightarrow QB$
- $(QB \rightarrow QA) \leftrightarrow Q(QB \supset QA)$
- **D4.** $A \supset B =_{def} \neg A \vee B$

К приведенным аксиомам может быть добавлена еще одна:

$$\mathbf{A10.} \quad QA \leftrightarrow \neg Q\neg A$$

Логика Дишканта LQ

\mathcal{L} -фрейм $\langle O, K, R, * \rangle$,

где K есть непустое множество, $O \in K$,

R - тернарное отношение достижимости на K

и $*$ - унарная операция на K .

- $p1. ROaa$
- $p2. Raaa$
- $p3. R^2abcd \Rightarrow R^2acbd$
- $p4. R^2Oabc \Rightarrow Rabc$
- $p5. Rabc \Rightarrow Rac*b*$
- $p6. a** = a$
- $p7. ROab \underline{\vee} ROb$
- $d1. a < b =_{def} Roab$
- $d2. R^2abcd =_{def}$

$\exists x(Rabx \ \& \ Rxcd \ \& \ x \in K)$

v есть **оценка** в \mathcal{L} -фрейме, т.е. v является функцией $v: S \times K \rightarrow S_{[0,1]}$ (S есть множество пропозициональных переменных и $S_{[0,1]}$ есть обычная логическая матрица для $\mathcal{L}_{\{0,1\}}$), которая для всякого $p \in S$ и всяких $a, b \in K$ удовлетворяет следующему условию:

$$(1) a < b \ \& \ v(p, a) \neq 0 \Rightarrow v(p, b) \neq 0;$$

I есть **интерпретация**, ассоциированная с v , т.е. I есть функция $I: F \times K \rightarrow S_{[0,1]}$ (F есть множество формул), удовлетворяющая — для всякого $p \in S$, всяких $A, B \in F$ и всякого $a \in K$ — следующим условиям:

- $I(p, a) = v(p, a)$;
- $I(\neg A, a) = 1 - x$ тогда и только тогда, когда $I(A, a^*) = x$;
- $I(A \rightarrow B, a) = \min(1, 1 - x + y)$ тогда и только тогда, когда для всяких $b, c \in K$ $Rabc$ и $I(A, b) = x \Rightarrow I(B, c) = y$.
- $I(QA, a) = \inf\{I(A, c) : \text{for any } b \in K(ROab) \Rightarrow c \in K(RObc \Rightarrow I(A, c) \neq 0)\}$

Логика Дишканта LQ

- (R1) Если 1^й игрок принимает $A \rightarrow B$ в точке a , то всякий раз как 2^й игрок пытается опровергнуть это утверждение, полагая A в точке b , 1^й должен также принимать B в точке c , где точки выбираются согласно приведенным ранее условиям. (И наоборот, т.е. когда 1^й и 2^й меняются ролями.)
- (R¬) Если 1^й игрок принимает $\neg A$ в точке a , то 2^й игрок пытается опровергнуть это утверждение, полагая A в точке a^* где точки выбираются согласно приведенным ранее условиям. (И наоборот, т.е. когда 1^й и 2^й меняются ролями.)
- (RQ) Если 1^й игрок принимает QA , то 1^й игрок также должен принимать A (его интерпретация должна быть отлична от 0) в любой точке, которую 2^й игрок может выбрать, используя приведенные ранее условия. И наоборот, т.е. когда 1^й и 2^й меняются ролями.)



КОНЕЦ ДОКЛАДА

Благодарю за внимание