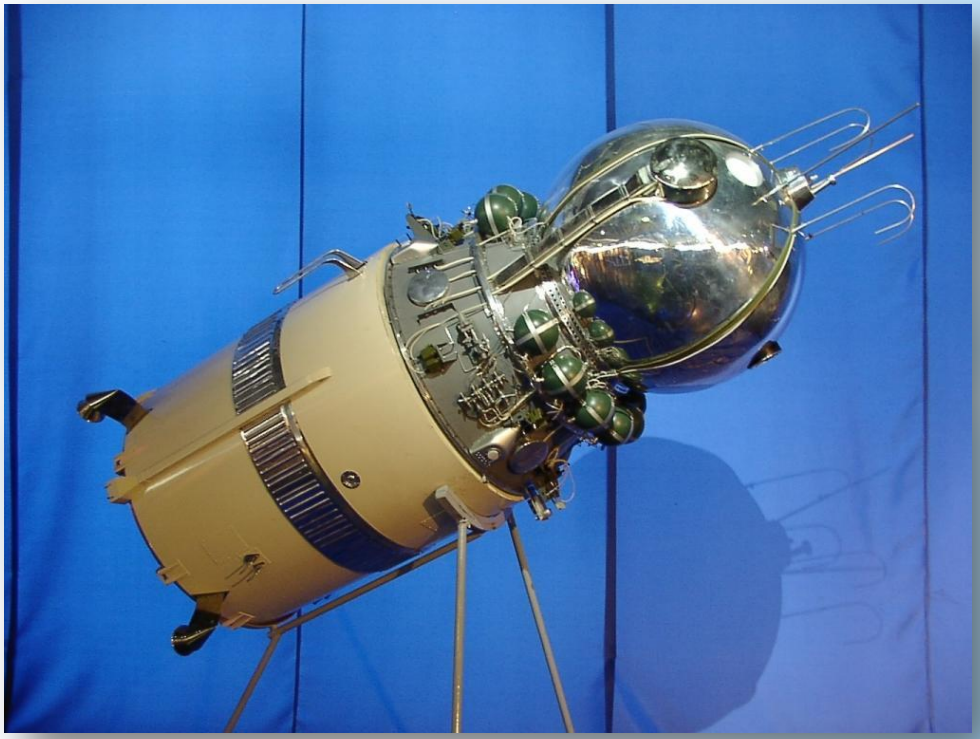
* Показательная функция, ее свойства и график

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов

1) *Например, в теории межпланетных путешествий решается задача об определении массы топлива, необходимого для того, чтобы придать ракете нужную скорость* ***v.*** *Эта масса* ***M*** *зависит от массы* ***m*** *самой ракеты (без топлива) и от скорости* v_o, *с которой продукты горения вытекают из ракетного двигателя. Если не учитывать сопротивление воздуха и притяжение Земли, то масса топлива определяется формулой:*

$M = m(e^{v/v_o}-1)$ *(формула К.Э. Циолковского).*

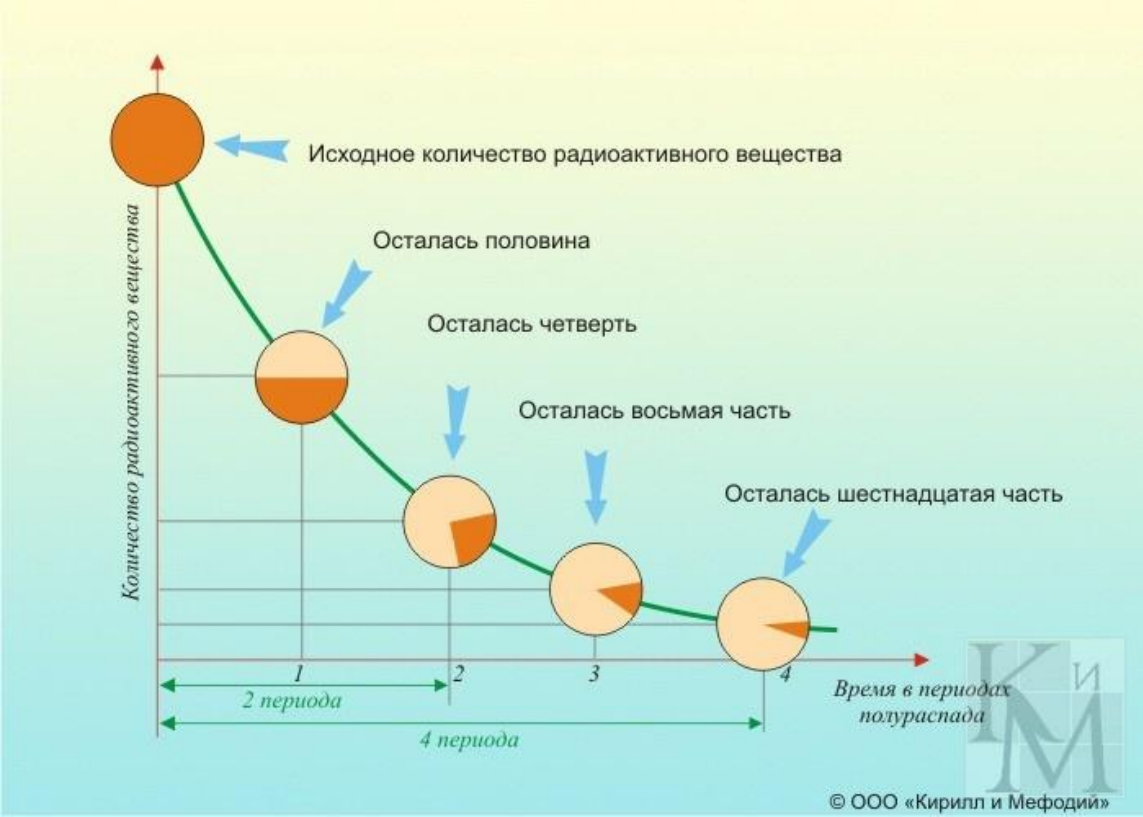
Например, для того чтобы ракета с массой 1,5т имела скорость 8000м/с, надо взять примерно 80т топлива.



Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов

2) *Радиоактивный распад вещества задаётся формулой* $m = m_0(1/2)^{t/to}$, *где* m *и* m_o *– масса радиоактивного вещества в момент времени* t *и в начальный момент времени* $t = 0$; T *- период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшается вдвое).*

Когда радиоактивное вещество распадается, его количество уменьшается.
Через некоторое время остаётся половина первоначального количества вещества.
Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество.



Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов

3) *Изменение атмосферного давления* ***p*** *в зависимости от высоты* ***h*** *над уровнем моря описывается формулой* $p = p_o \cdot a^k$, *где* p_o *– атмосферное давление над уровнем моря,* ***a*** *– некоторая постоянная.*

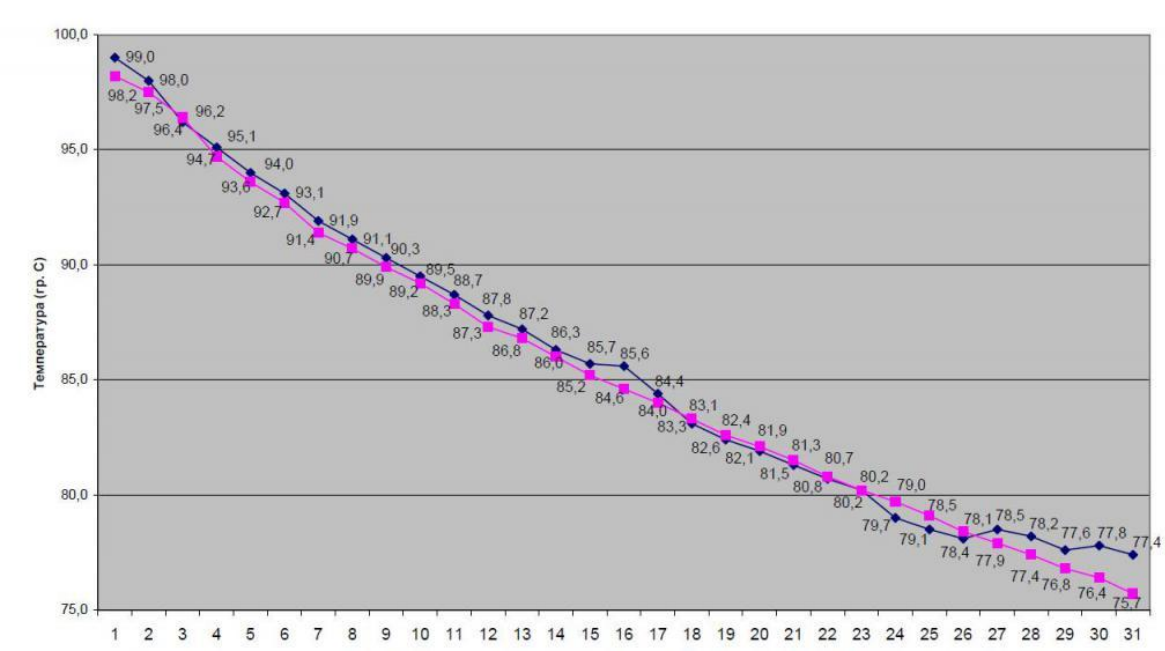
Барограф метеорологический анероидный

Погодная станция Oregon Scientific

Применение показательной функции в жизни, науке и технике

* **Если снять кипящий чайник с огня, то сначала он быстро остывает, а потом остывание идет гораздо медленнее, это явление описывается формулой**

$$T=(T_1-T_0)e^{-kt}+T_1$$



Рост народонаселения

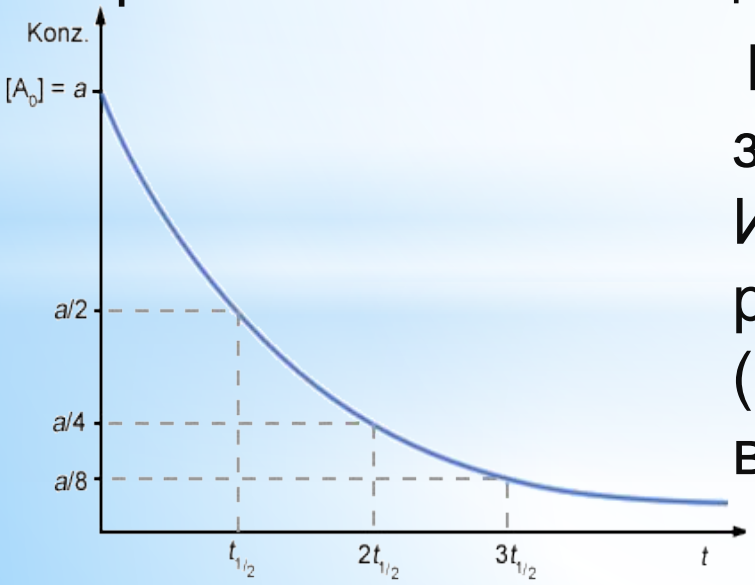
Изменение числа людей в стране на небольшом отрезке времени описывается формулой $N = N_0 e^{kt}$

где N_0 - число людей в момент времени t=0,

N -число людей в момент времени t,

a -константа.

Когда радиоактивное вещество распадается, его количество уменьшается, через некоторое время остается половина от первоначального вещества. Этот промежуток времени t_0 называется периодом полураспада. Общая формула для этого процесса: $m = m_0(1/2)^{-t/t_0}$, где m_0 - первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество. Это явление используют для определения возраста археологических находок.



Радий, например, распадается по закону: $M = M_0e^{-kt}$.
Используя данную формулу ученые рассчитали возраст Земли (радий распадается примерно за время, равное возрасту Земли).

*Определение

Показательная функция – это функция вида $y = a^x$,

где x **– переменная,**

a **- заданное число,** $a > 0$, $a \neq 1$.

Примеры: $y = 3^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = 0{,}4^x$

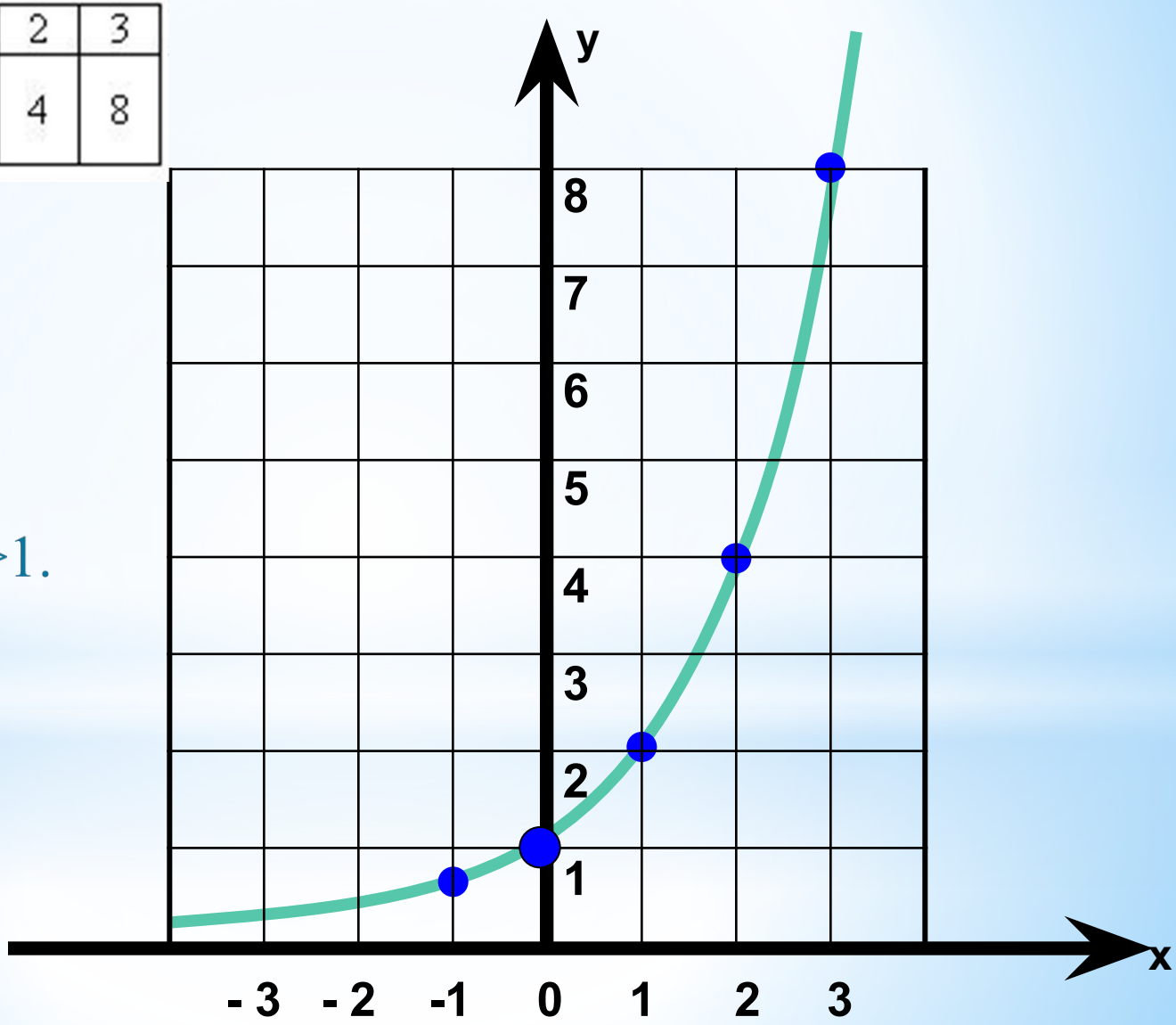
Область определения показательной функции: D (y)=R – множество всех действительных чисел.

Область значений показательной функции: E (y)=R+ - множество всех положительных чисел.

Построить график функции $y = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

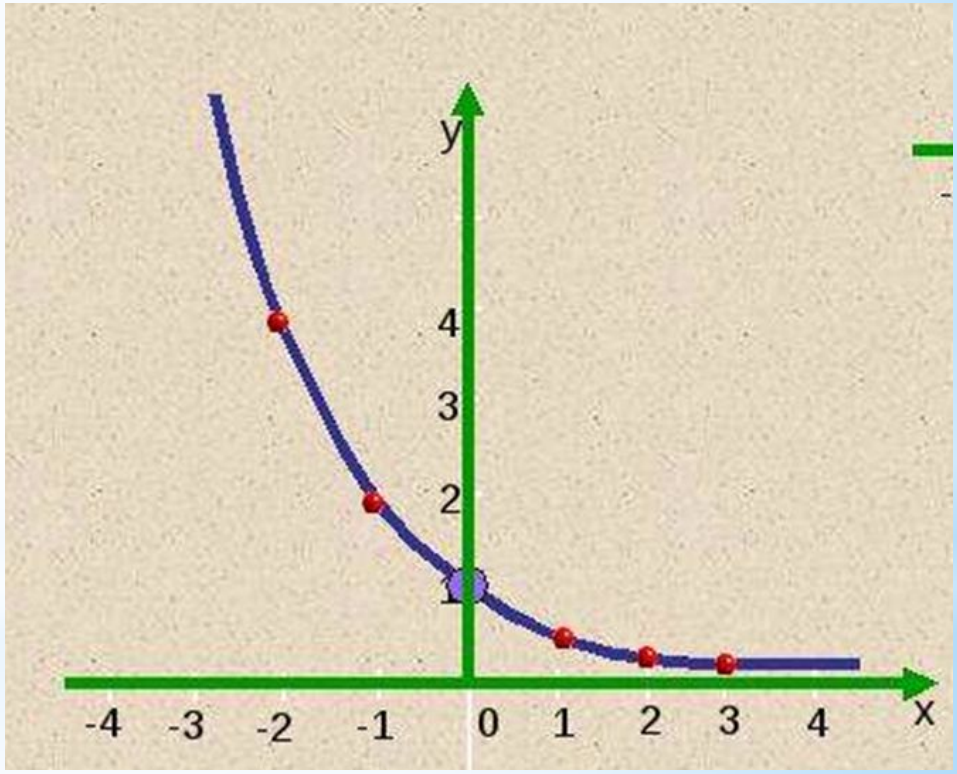
Показательная функция $y=a^x$ возрастает при $a>1$.



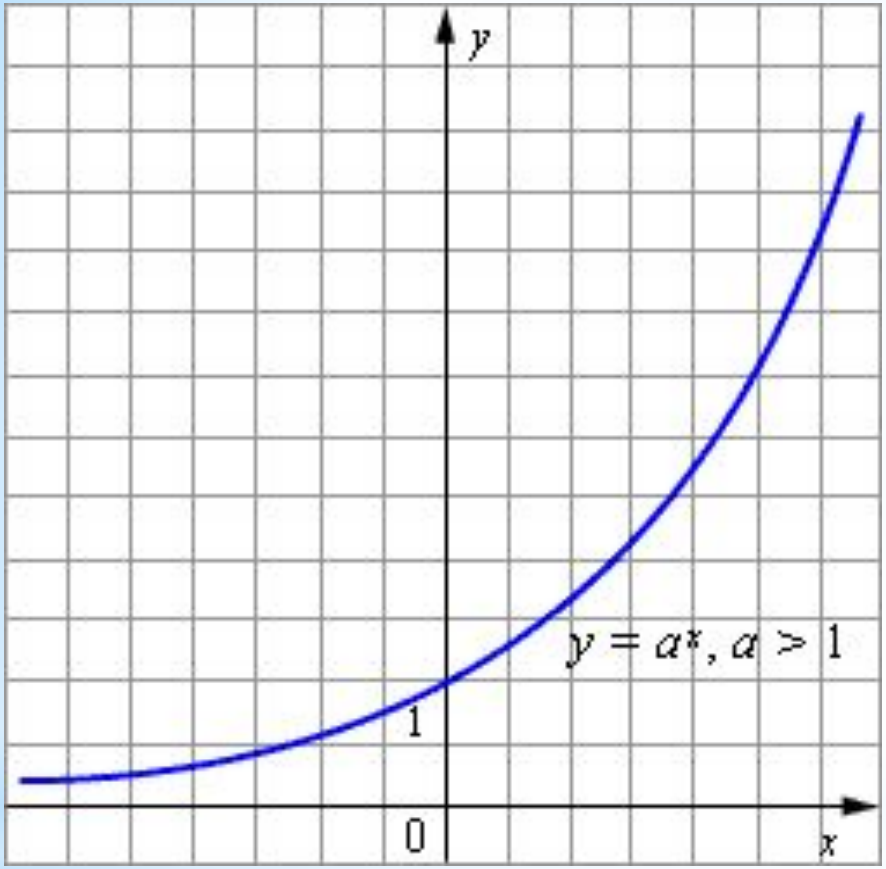
Построить график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

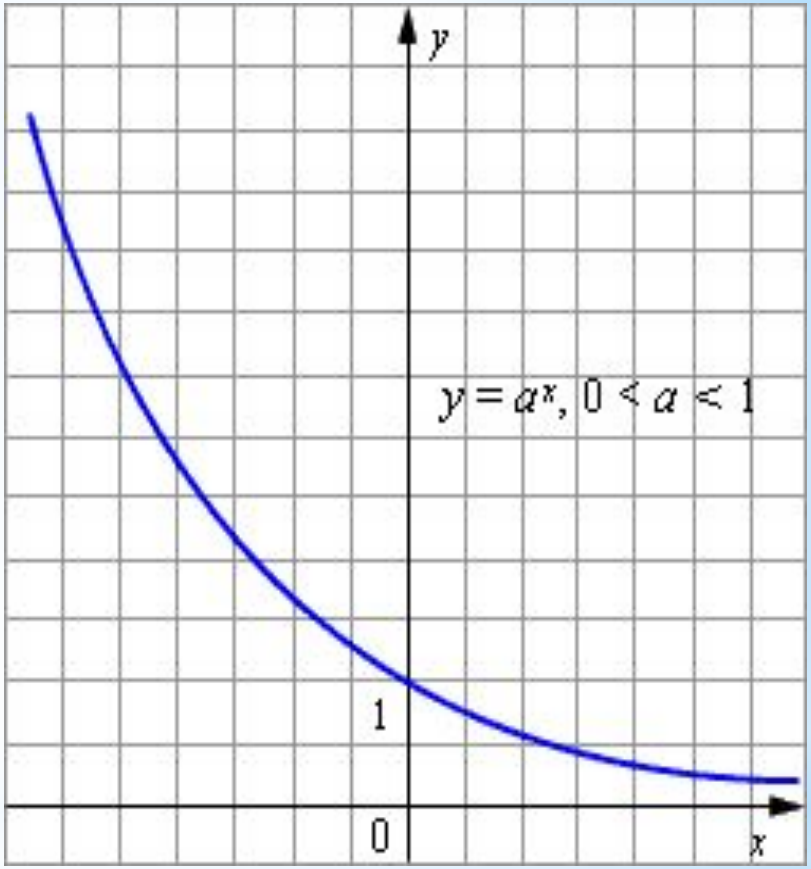
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Показательная функция $y=a^x$ убывает при $0<a<1$.



Графики показательной функции:





Т.к. $a^0 = 1$, то график любой показательной функции проходит через точку (0; 1)

Свойства показательной функции

Свойства функции $y = a^x$		$a > 1$	$0 < a < 1$
$D(y)$		$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
$E(y)$		$(0;\ +\infty)$	$(0;\ +\infty)$
Точки пересечения с осями	с OY:	$(0;\ 1)$	$(0;\ 1)$
	с OX:	–	–
$y > 0$		$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
$y \nearrow$		$(-\infty;\ +\infty)$	–
$y \searrow$		–	$(-\infty;\ +\infty)$

Точек экстремума x_{max} и x_{min} нет.

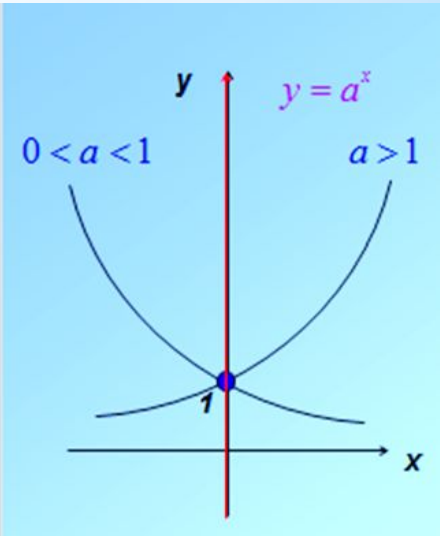
Экстремумов y_{max} и y_{min} нет.

Не является ни четной, ни нечетной (симметрии графика нет);

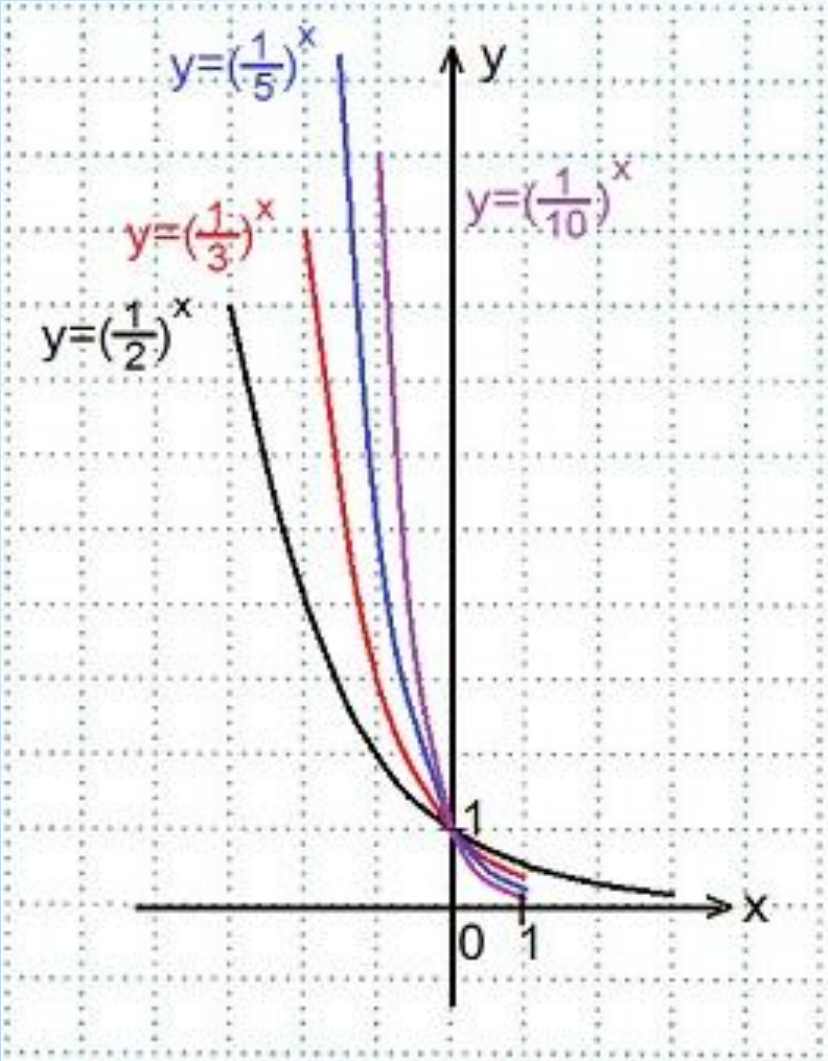
Не ограничена сверху, ограничена снизу осью Ox;

Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;

Непрерывна.



Пример 1. В одной координатной плоскости построить графики функций: $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = (\frac{1}{3})^x$, $y = (\frac{1}{5})^x$, $y = (\frac{1}{10})^x$

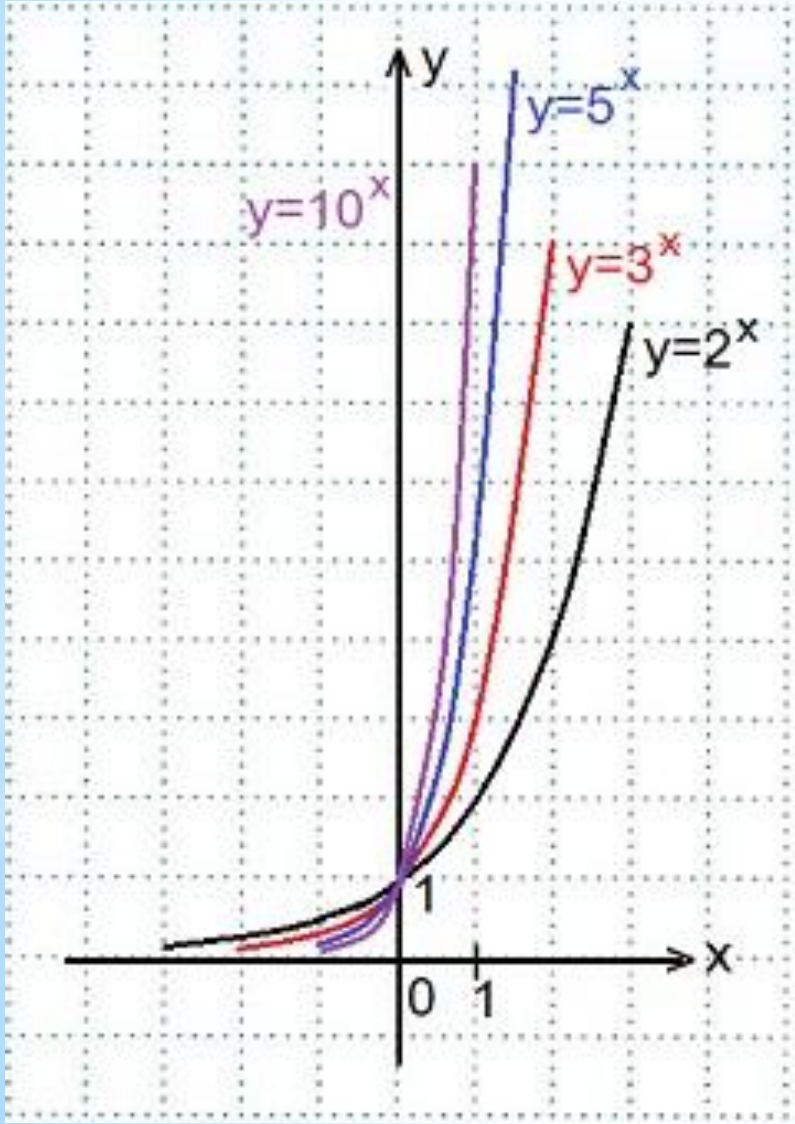


Переменная **x** может принимать любое значение (**D (y)=R**), при этом значение **y** всегда будет больше нуля (**E (y)=R+**).

Графики всех данных функций пересекают ось Оу в точке (0; 1),

Все эти функции являются убывающими, так как большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции

Пример 2. В одной координатной плоскости построить графики функций: $y=2^x$, $y=3^x$, $y=5^x$, $y=10^x$.



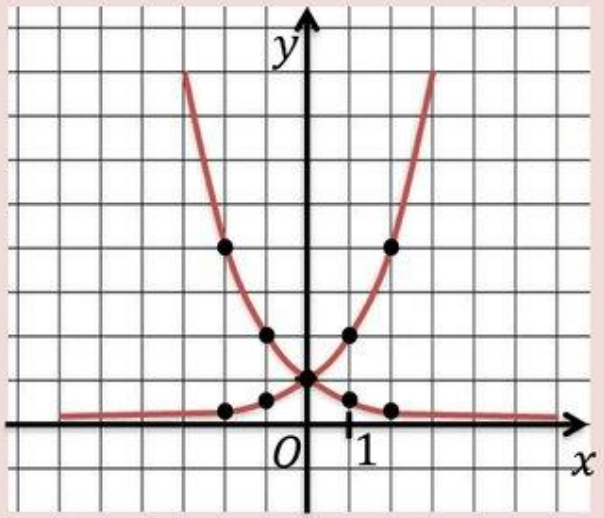
Переменная **x** может принимать любое значение (**D (y)=R**), при этом значение **y** всегда будет больше нуля (**E (y)=R+**).

Графики всех данных функций пересекают ось Оу в точке (0; 1).

Все данные функции являются возрастающими, так как большему значению аргумента соответствует и большее значение функции.

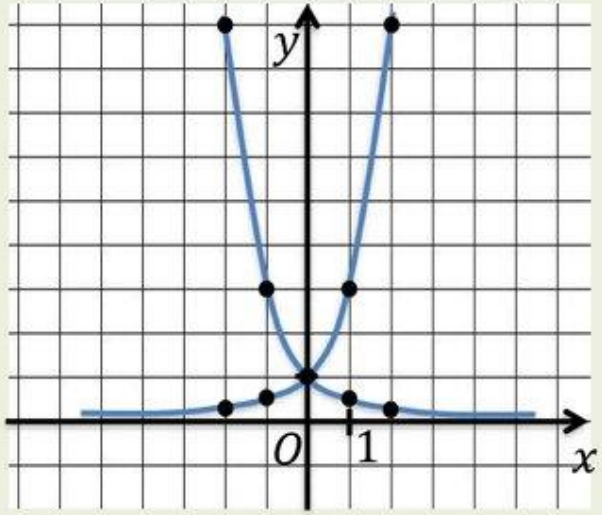
$$y = 2^x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



$$y = 3^x$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$



$$y = 5^x$$

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

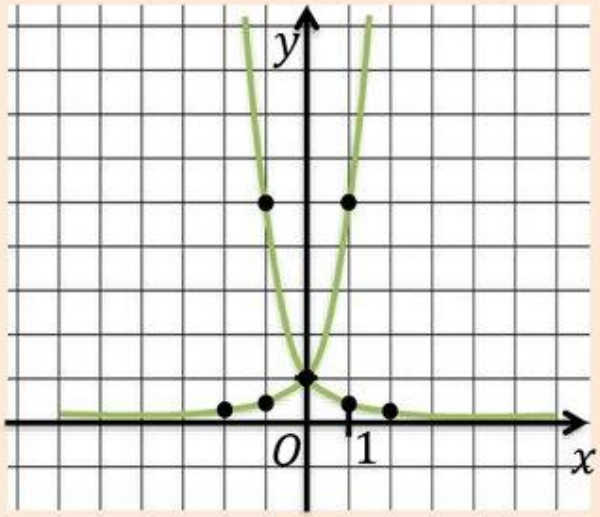


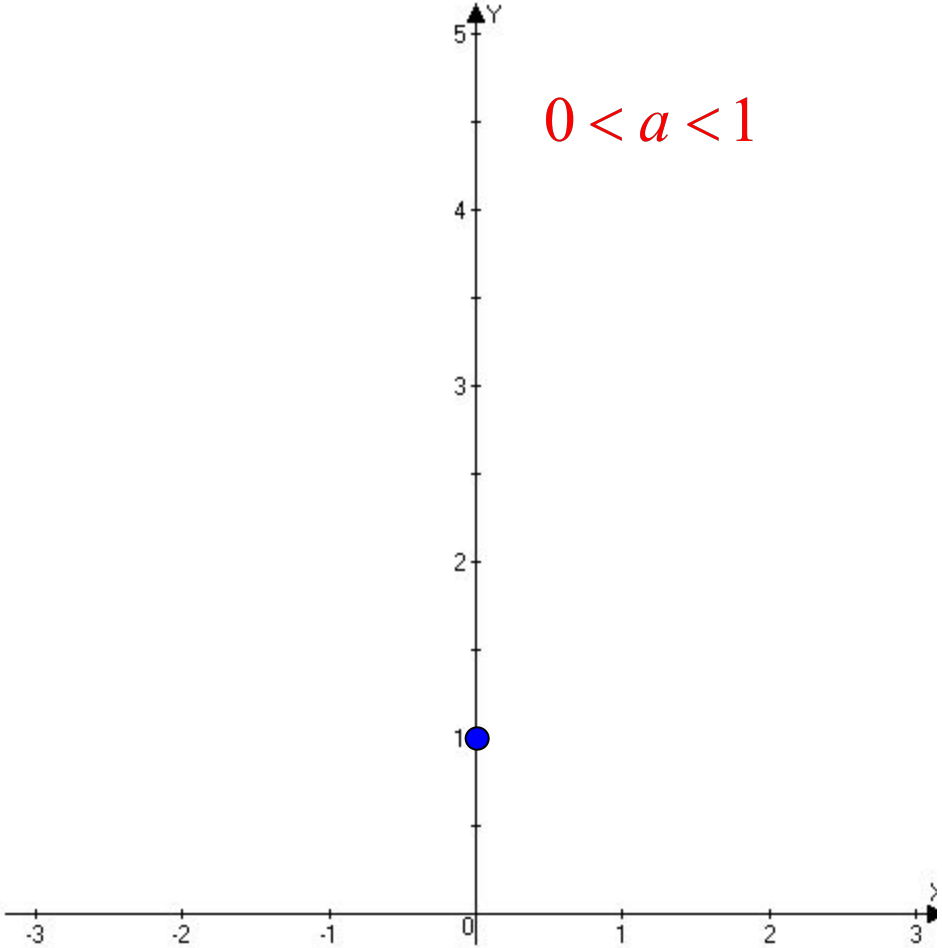
График показательной функции

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

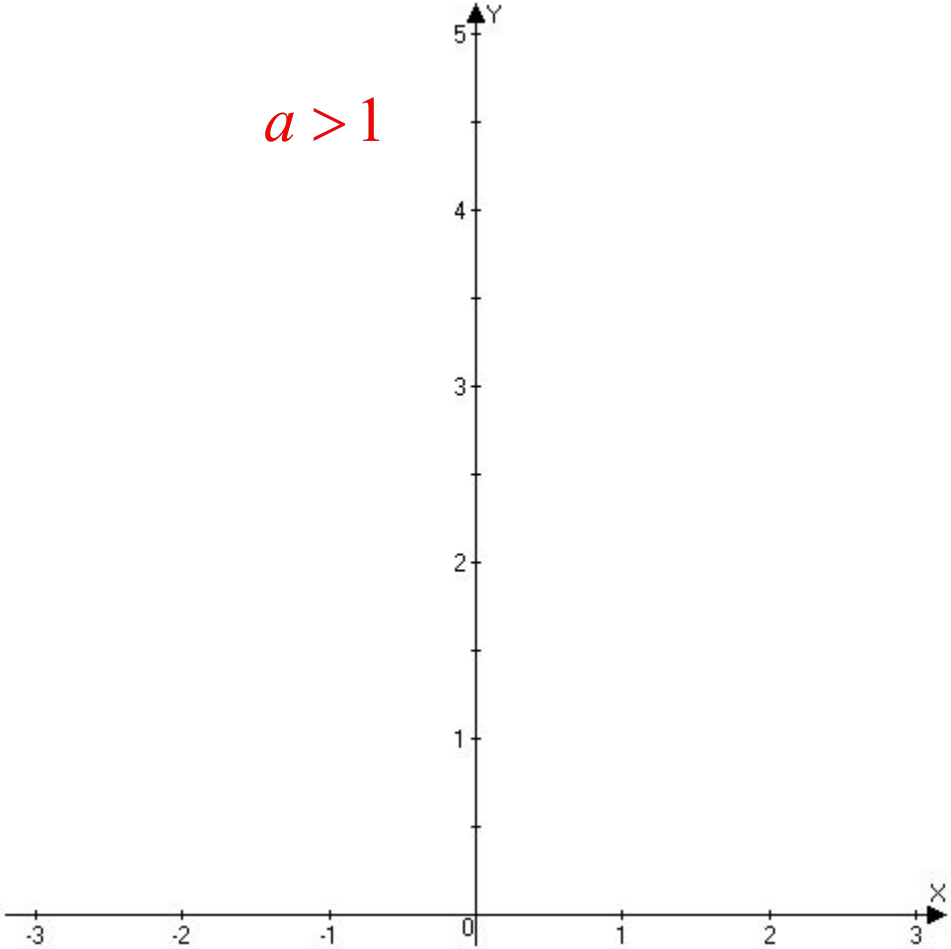
$$y=a^x, a>0, a\neq 1$$

$y=4^x$ $y=3^x$ $y=2^x$

$0<a<1$



$a>1$



Задание А1

Из предложенного списка функций, выбрать ту функцию,

которая является показательной:

1. $y = 2x;$
2. $y = x^2;$
3. $y = 2^x;$
4. $y = \sqrt[7]{x}.$

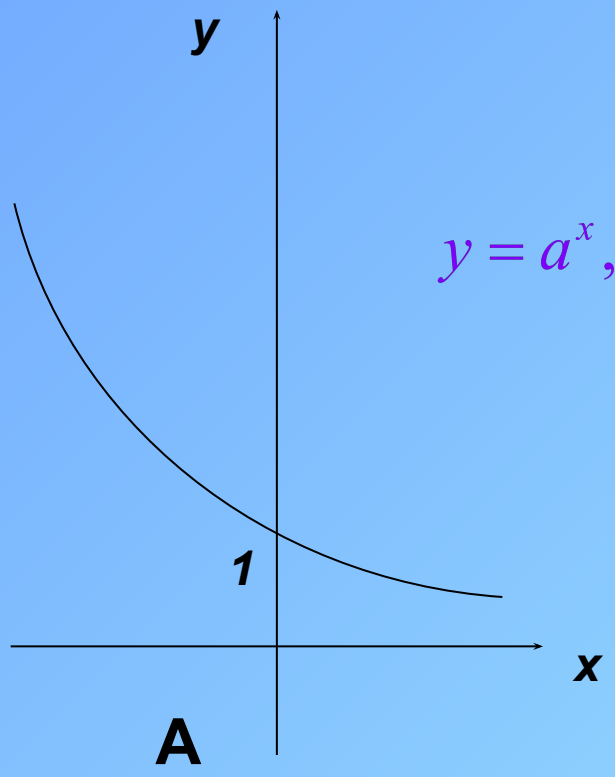
Задание А2

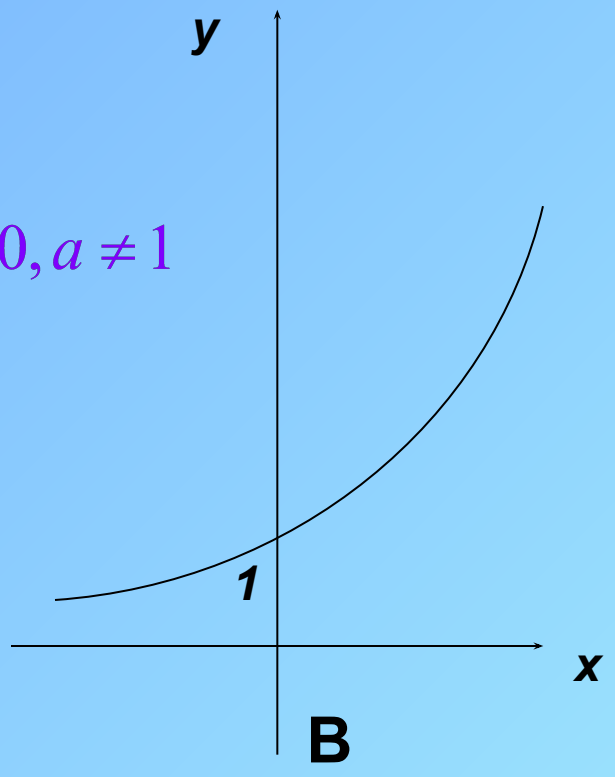
Укажите вид графика для функции

1. $y = \pi^x$

2. $y = 0,48^x$

$y = a^x, a > 0, a \neq 1$





Задание А3

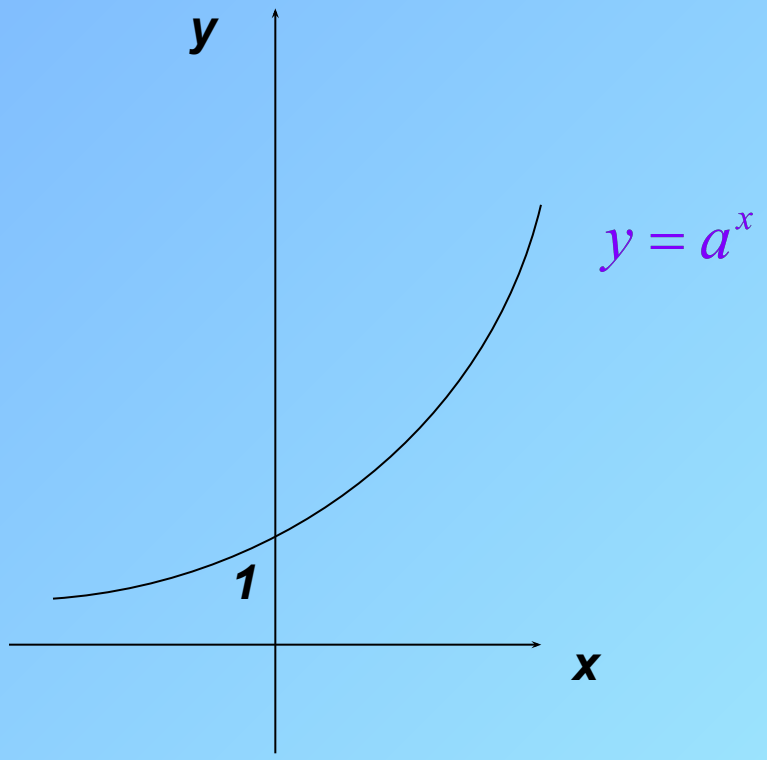
Дан график функции. Укажите эту функцию.

1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

2. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

3. $y = 2^x$;

4. $y = 2^{-x}$.



Задание А4

Выберите функцию возрастающую на $\Re$:

1. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

2. $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$

3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

4. $y = 10^{-x}$

Задание А5

Выберите функцию убывающую на $\Re$:

1. $y = 5^x$;

2. $y = 10^x + 1$;

3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$;

4. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 1$.

Задание А6

Решите уравнения

$$1.\ 3^x = 9,$$

$$2.\ 5^x = 1,$$

$$3.\ \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16,$$

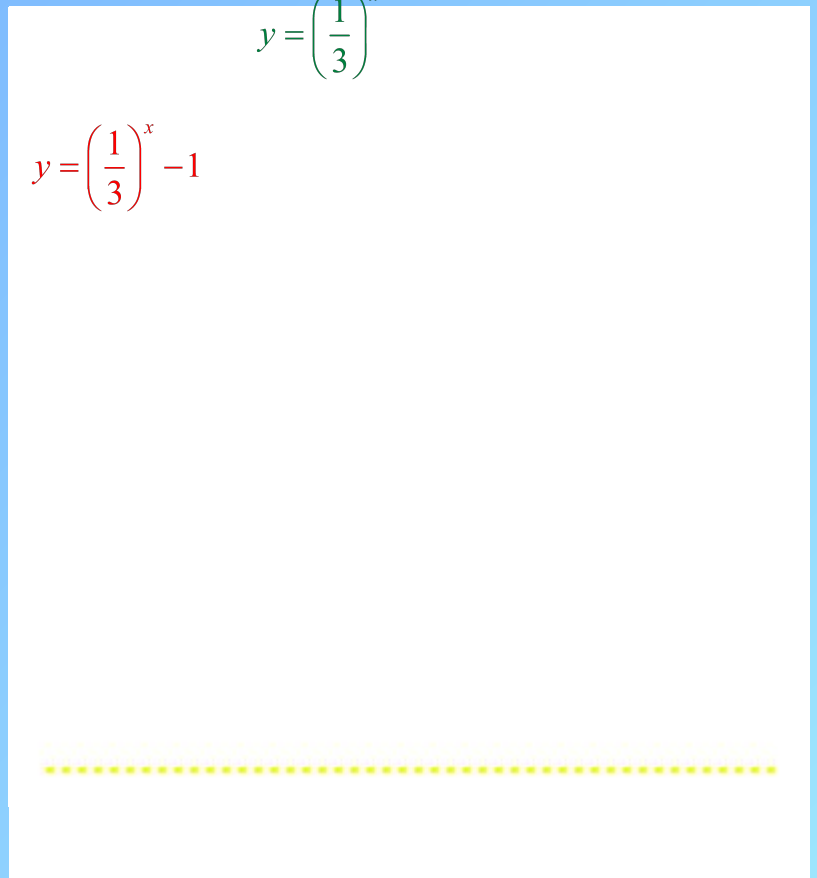
$$4.\ 2^x = 0,$$

$$5.\left(\frac{1}{5}\right)^x = -1.$$

Задание В1

Укажите область значений функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$:

1. $(0;+\infty)$;
2. $(-1;+\infty)$;
3. $[0;+\infty)$;
4. $(-\infty;-1)$.



Задание В2

Какое из указанных чисел входит в область значений функции

$$y = 2^x + 4\,?$$

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 5.

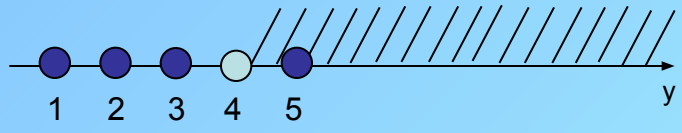
Решение:

Для любого $x \in \Re$: $2^x > 0;$

$$2^x + 4 > 4;$$

$$y > 4.$$

$$E(y) = (4; +\infty)$$



$$5 \in E(y)$$

Ответ: 5.

Свойства степеней:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$$

Показательная функция

* Сравнение чисел с использованием свойств показательной функции
* Сравнение числа с 1

а) аналитический способ;

б) графический способ.

*Задача 1

Сравнить числа $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$

Решение

$\sqrt{2} = 1,41\ldots > 1,4$

$0 < \frac{1}{3} < 1$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$

*Задача 2

Сравнить число 3^{-5} с 1.

Решение

$1 = 3^0$

$-5 < 0$

$3 > 1$

$\Rightarrow 3^{-5} < 3^0 \Rightarrow 3^{-5} < 1$

Ответ: $3^{-5} < 1$

* Используя свойства возрастания и убывания показательной функции сравнить числа:

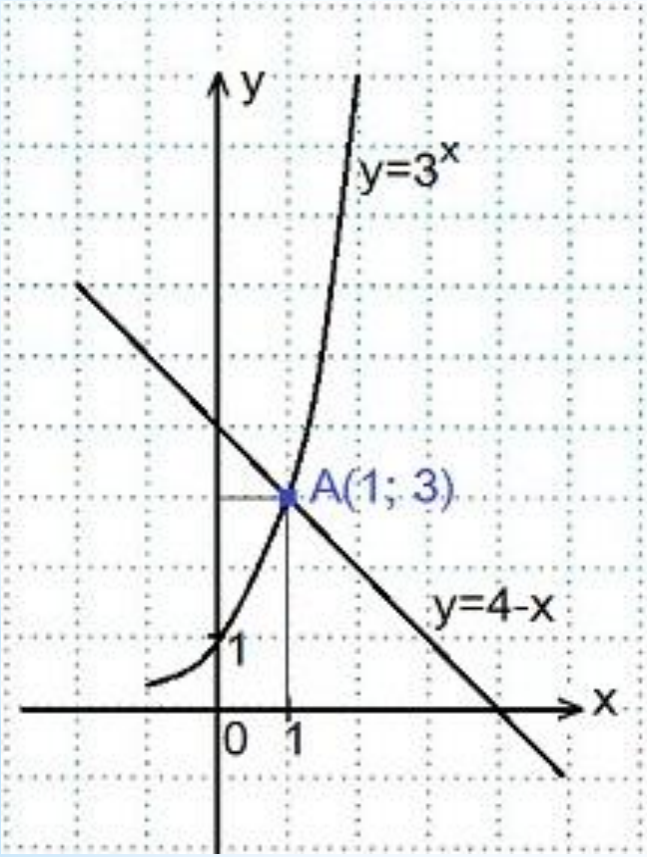
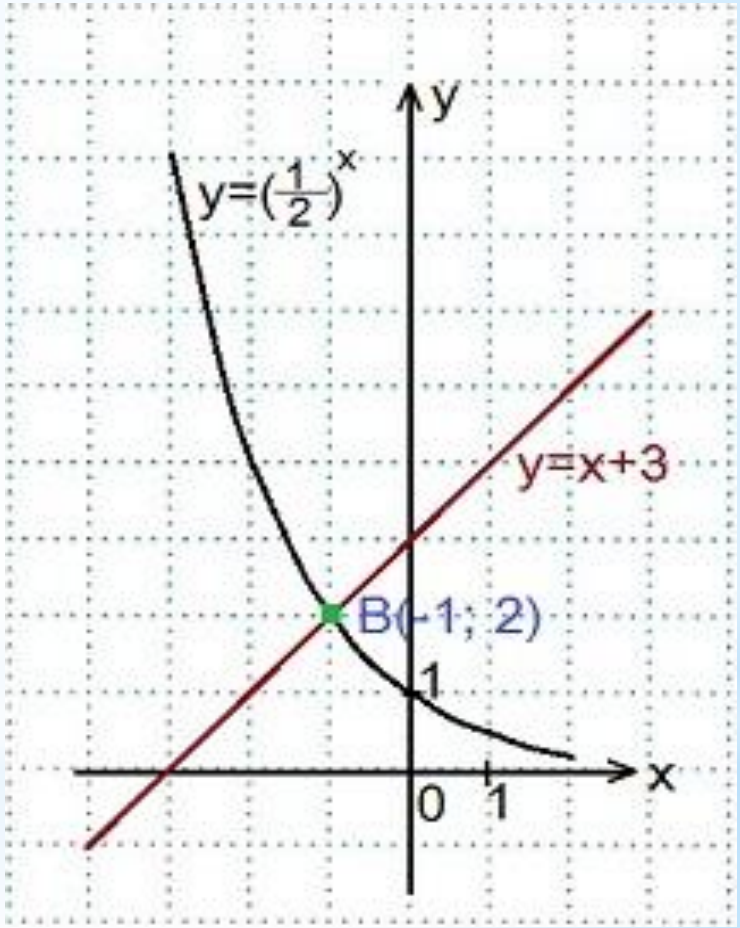
Сравнить:

а) 5^3 и 5^5;

б) 4^7 и 4^3;

в) $0,2^2$ и $0,2^6$;

г) $0,9^2$ и $0,9$.

* **Решить графически уравнения:**

1) $3^x=4-x$, **2) $0,5^x=x+3$.**