

# Задание 7. Производная

# Производная

- Производная функции это отношение приращения функции к приращению аргумента при бесконечно малом приращение аргумента.
- Приращением в математике называют изменение. То, насколько изменился аргумент ( $x$ ) при продвижении вдоль оси, называется **приращением аргумента** и обозначается  $\Delta x$ . То, насколько изменилась функция (высота) при продвижении вперед вдоль оси  $Ox$ , на расстояние  $\Delta x$ , называется

обозначает

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

# Вычисление производных

- Производная от константы равна 0.

$$c' = 0$$

- Степенная функция

$$(x^a)' = ax^{a-1}, a \in R$$

- Тригонометрические функции

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

- Производная экспоненты (основание этой функции константа  $e \approx 2,7183 \dots$ )

$$(e^x)' = e^x$$

- Логарифмическая функция

$\ln$  – натуральный логарифм ( $\log_e y$ )

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

# Правило дифференцирования (нахождение производной)

1. Константа выносится за знак производной

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

2. Производная суммы равна сумме производных

$$(f + y)' = f' + y'$$

3. Производная произведения

$$(f \cdot y)' = f' \cdot y + f \cdot y'$$

4. Производная частного

$$\left(\frac{f}{y}\right)' = \frac{f'y - fy'}{y^2}$$

5. Производная показательной функции

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

6. Производная логарифмической функции

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

# Физический смысл производной

- Если точка движется вдоль оси  $x$  и ее координаты изменяются по закону  $x(t)$ , то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = x'(t),$$

а ускорение:

$$a(t) = v'(t) = x''(t)$$

# Примеры заданий

Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$  (где  $x$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени  $t = 9$  с.

Решение:

$$v(t) = x'(t) = 12t - 48$$

При  $t=9$

$$v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60$$

Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$  (где  $x$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени  $t = 6$  с.

20

Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$  (где  $x$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени  $t = 3$  с.

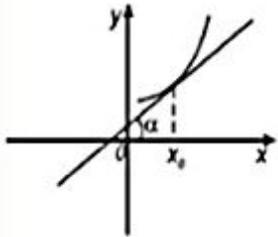
59

Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = t^2 - 13t + 23$  (где  $x$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

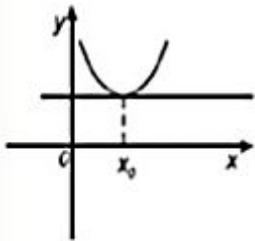
8

# Геометрический смысл ПРОИЗВОДНОЙ

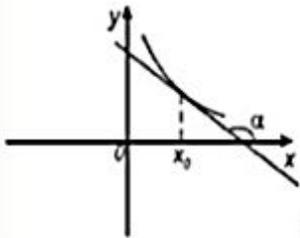
Геометрический смысл производной. Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y=f(x)$  в этой точке



$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$$

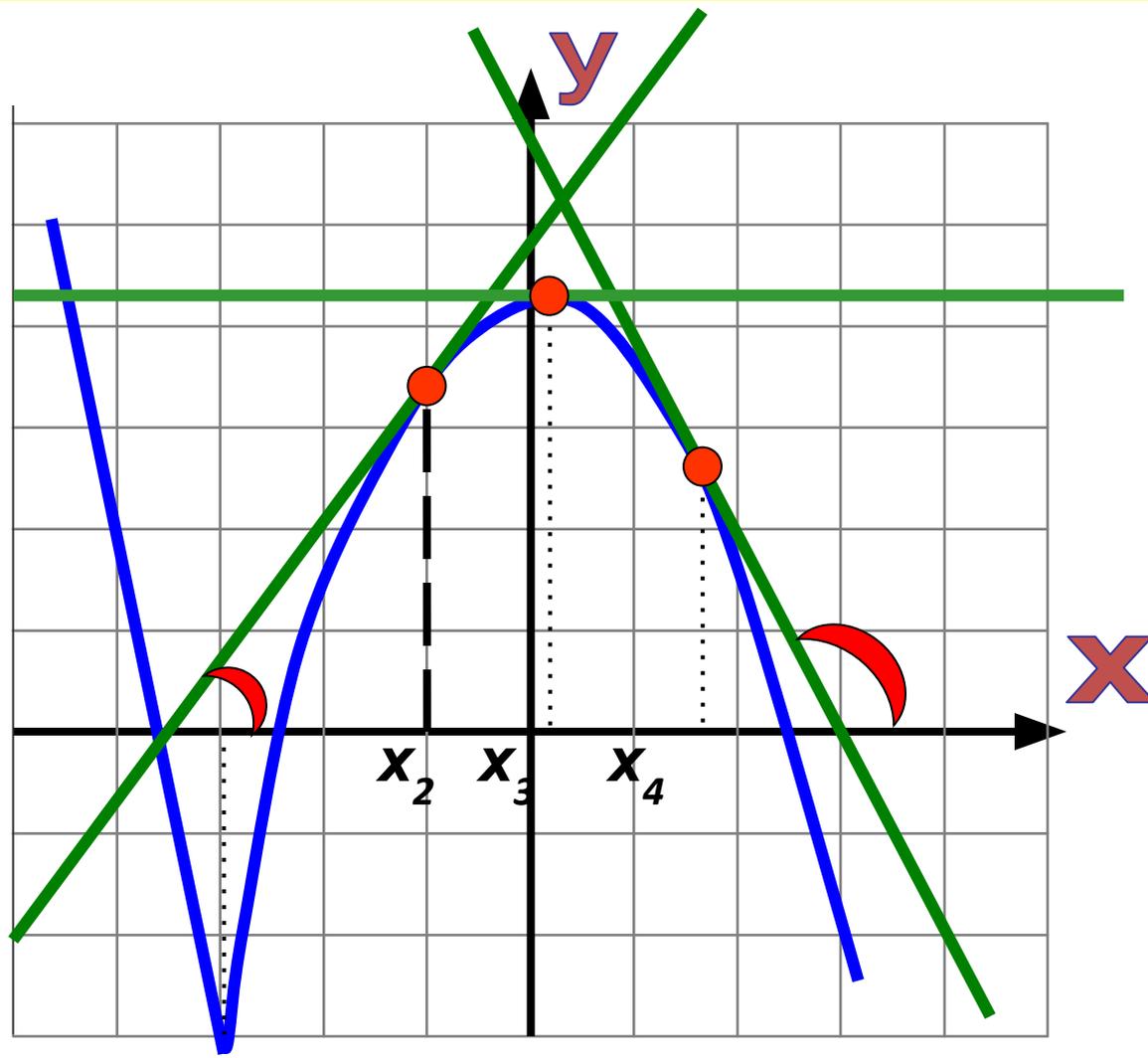


$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$$

$$\alpha > 90^\circ \Rightarrow k < 0$$

$$\alpha < 90^\circ \Rightarrow k > 0$$

$\alpha = 0^\circ \Rightarrow k = 0$ , касательная параллельна  $Ox$



# Уравнение касательной

Уравнение касательной к графику функции  $y=f(x)$  в точке  $x_0$  имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$x_0$  - абсцисса точки касания

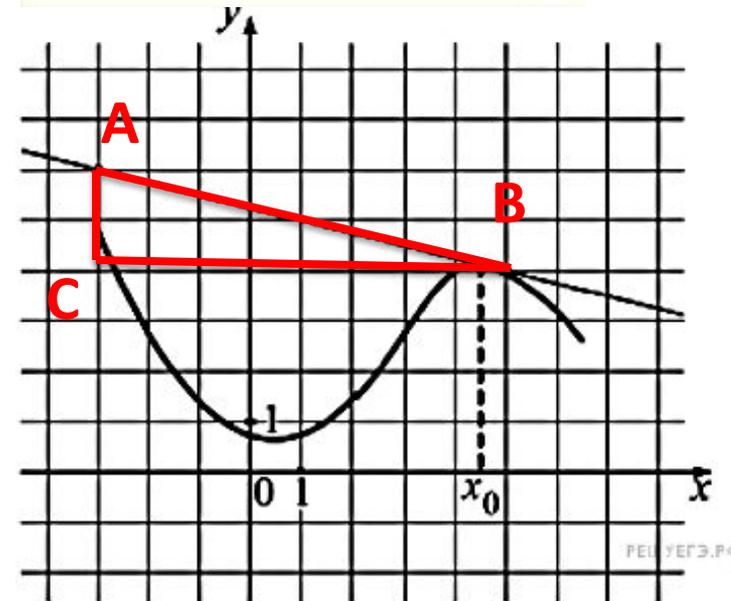
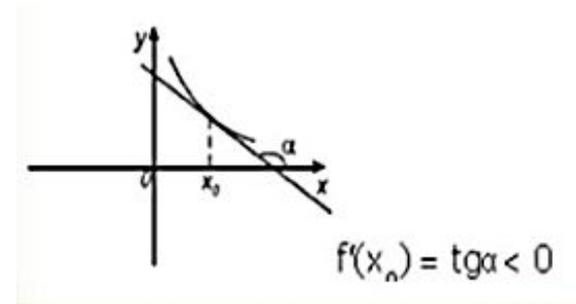
$f(x_0)$  - значение функции в точке касания

$f'(x_0)$  - значение производной функции в точке касания

# Примеры заданий

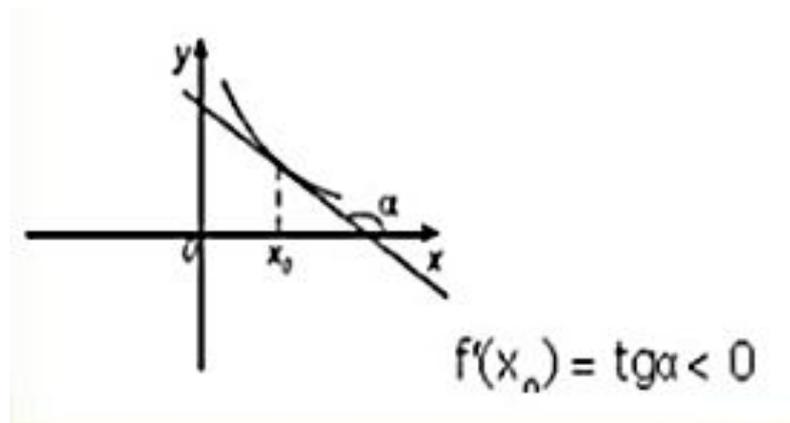
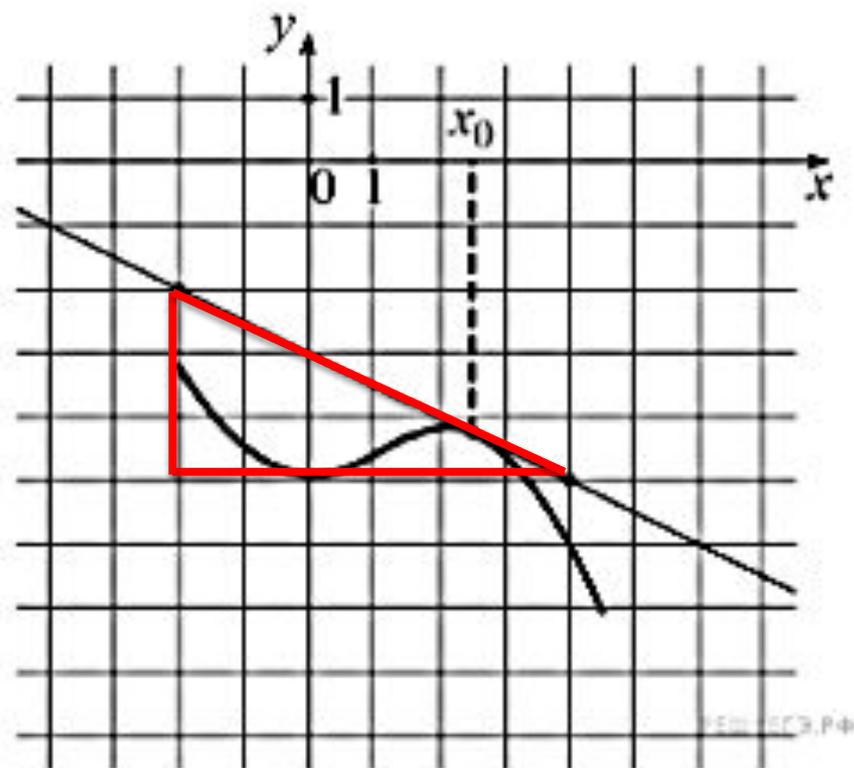
На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

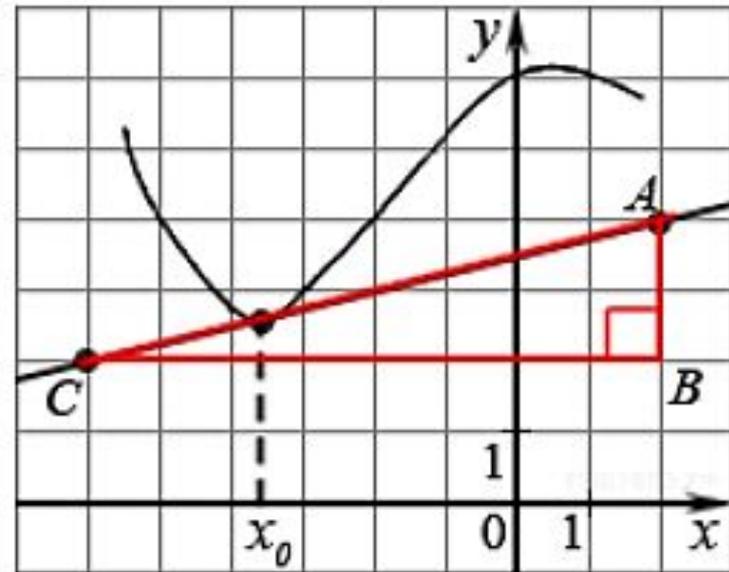
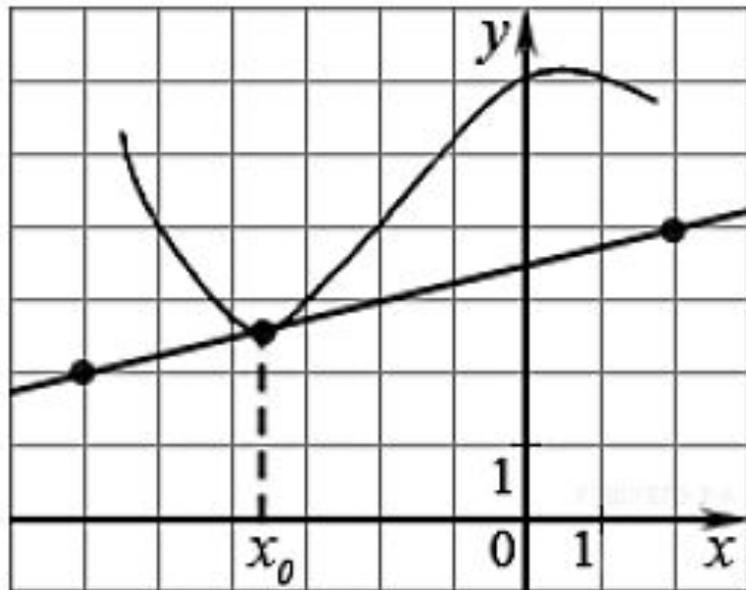
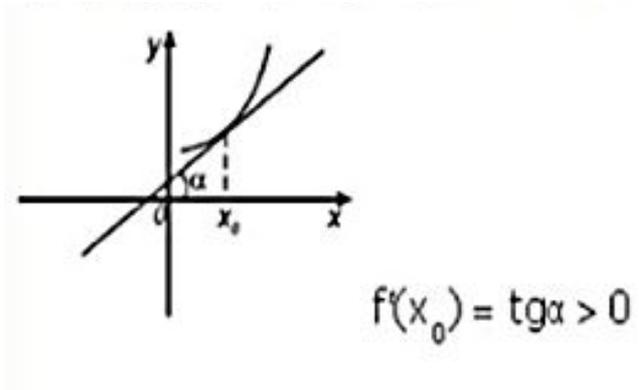
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс.



$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ABC) = -\operatorname{tg} \angle ABC = -\frac{AC}{CB} = -\frac{2}{8} = -0,25$$

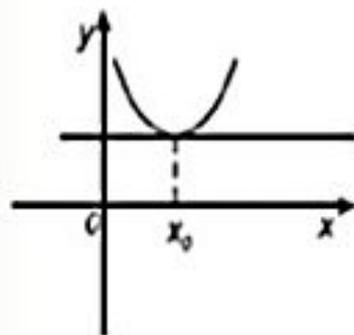
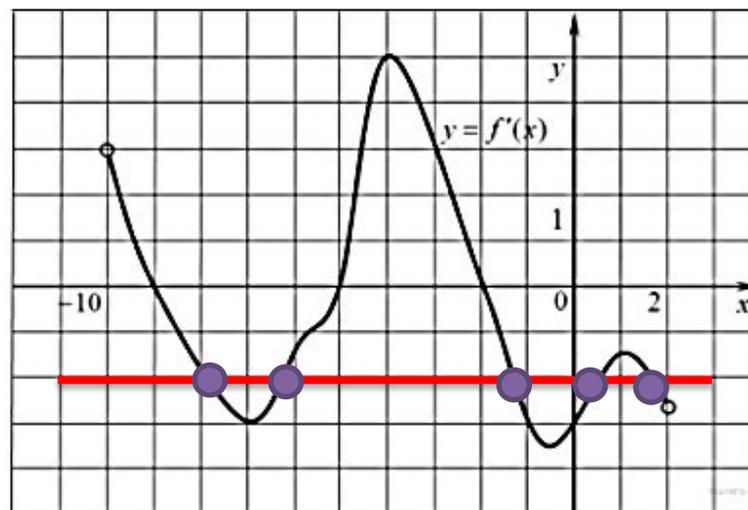
На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .





0,25

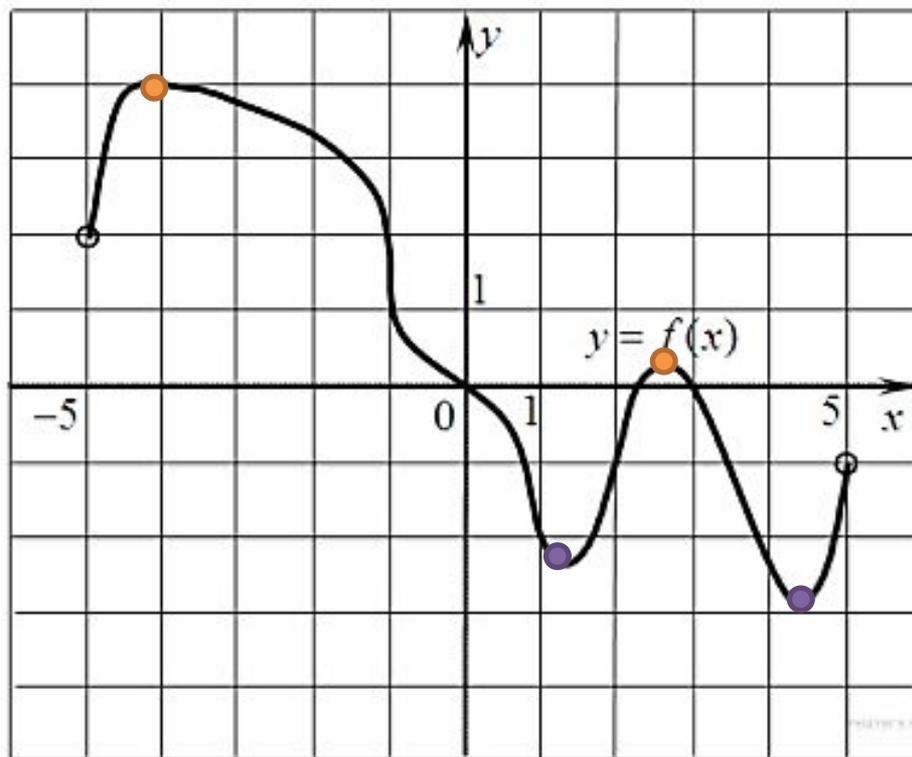
На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-10; 2)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $f(x)$  параллельна прямой  $y = -2x - 11$  или совпадает с ней.



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$$

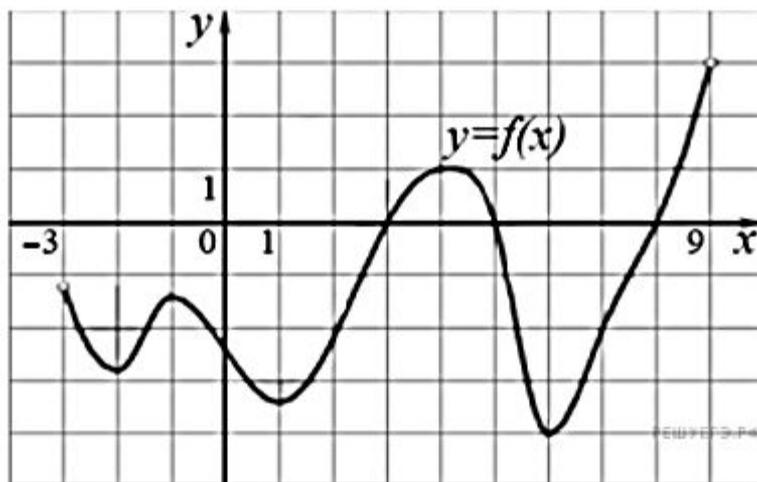
Поскольку касательная параллельна прямой  $y = -2x - 11$  или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны  $-2$ .

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-5; 5)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 6$  или совпадает с ней.



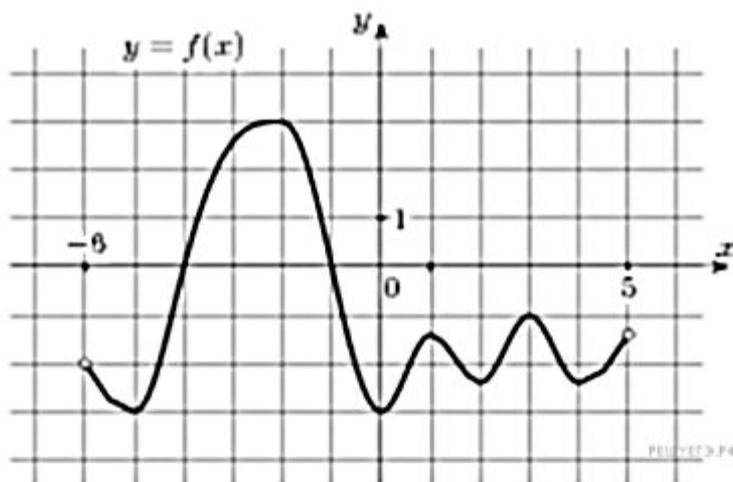
Поскольку касательная параллельна прямой  $y = 6$  или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. Производная равна нулю в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 6$  или совпадает с ней в 4 точках.

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-3; 9)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 12$  или совпадает с ней.



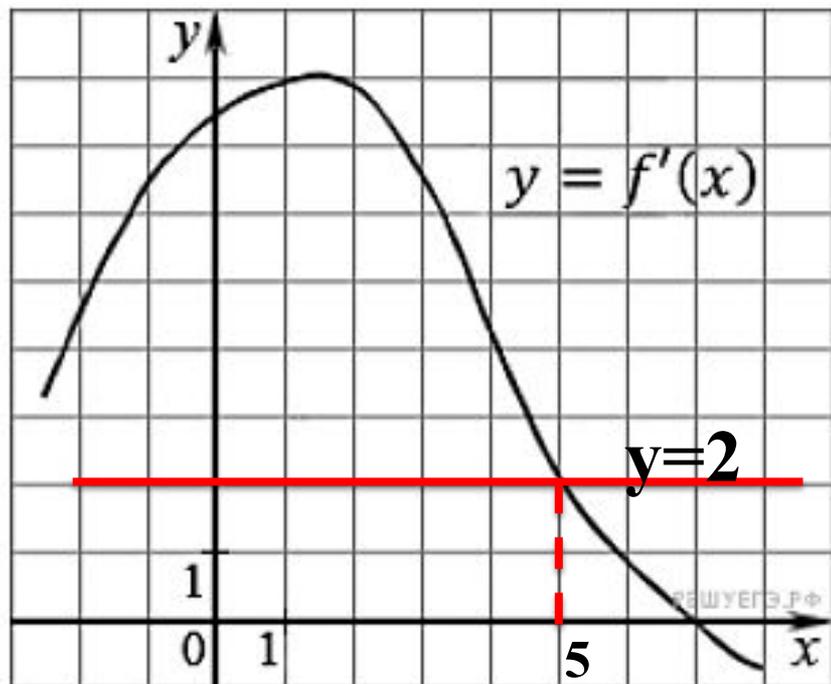
5

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 5)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = -6$ .



7

На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 2x - 2$  или совпадает с ней.



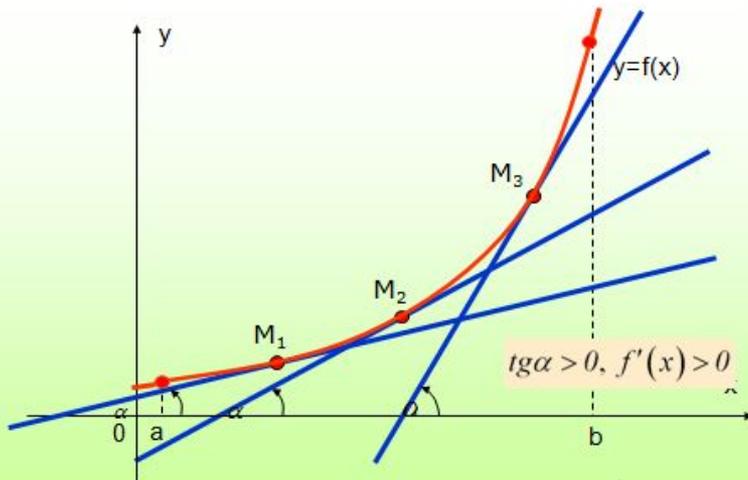
Прямая  $y = -4x - 11$  является касательной к графику функции  $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$ . Найдите абсциссу точки касания.

Условие касания графика функции  $y = f(x)$  и прямой  $y = kx + b$  задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

# Применение производной к исследованию функции

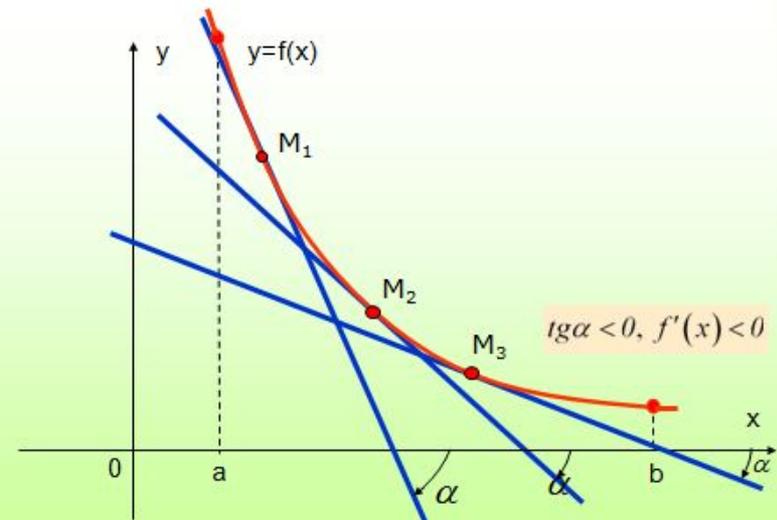
## Признак возрастания функции



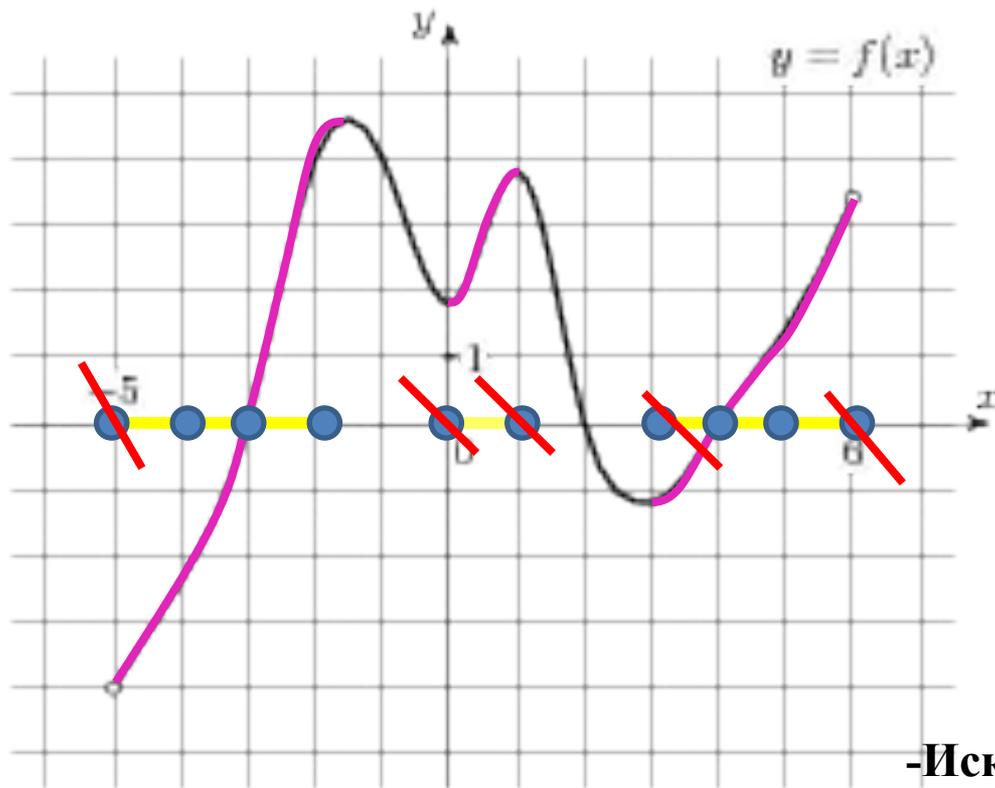
*Если  $f'(x) < 0$  на некотором промежутке, то функция  $f(x)$  убывает на этом промежутке.*

*Если  $f'(x) > 0$  на некотором промежутке, то функция  $f(x)$  возрастает на этом промежутке.*

## Признак убывания функции



На рисунке изображен график функции, определенной на интервале. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



- Считаем оставшиеся точки

Дан график функции

Теория:

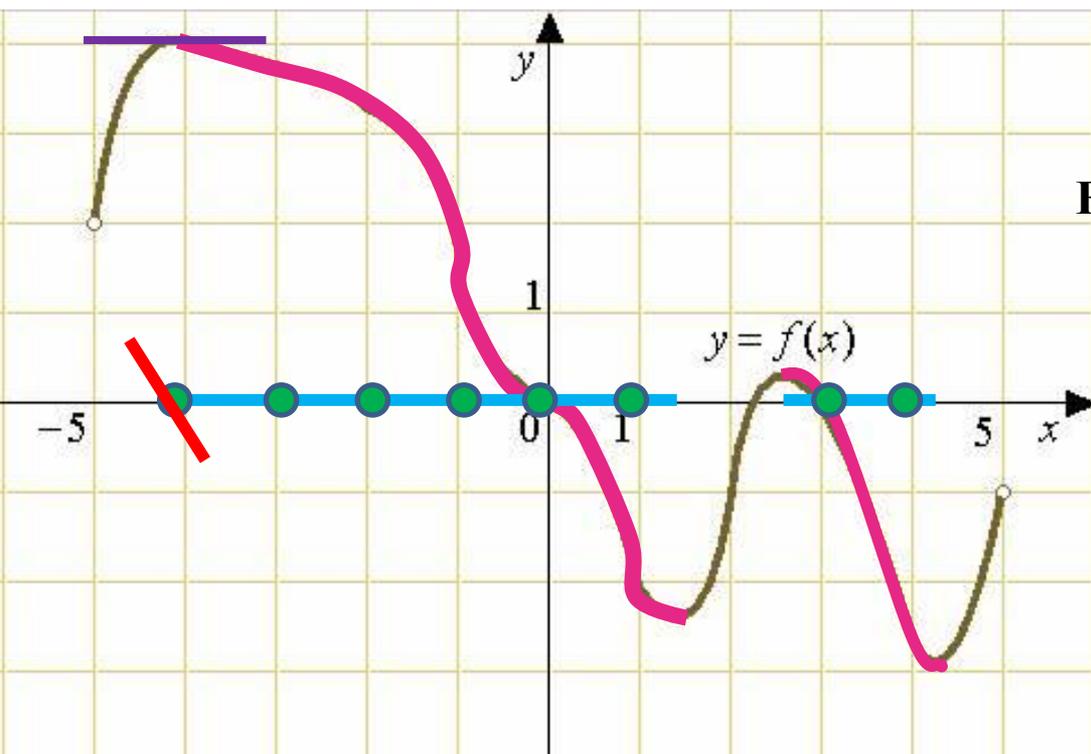
$F'(X) > 0$ , Следовательно, функция возрастает

Решение:

- Найдем участки возрастания функции
- (выделяем их последовательно на графике)
- Выделяем соответствующие им участки оси  $Ox$
- Найдем целые точки на этих отрезках

- Исключим точки, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная параллельна оси  $Ox$ ) и еще исключим точки, являющиеся концами выделенных интервалов

На рисунке изображен график функции, определенной на интервале. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Дан график функции

Теория:

$f'(x) < 0$ , следовательно, функция убывает

Решение:

- Найдем участки убывания функции  
- (выделяем их последовательно на графике)

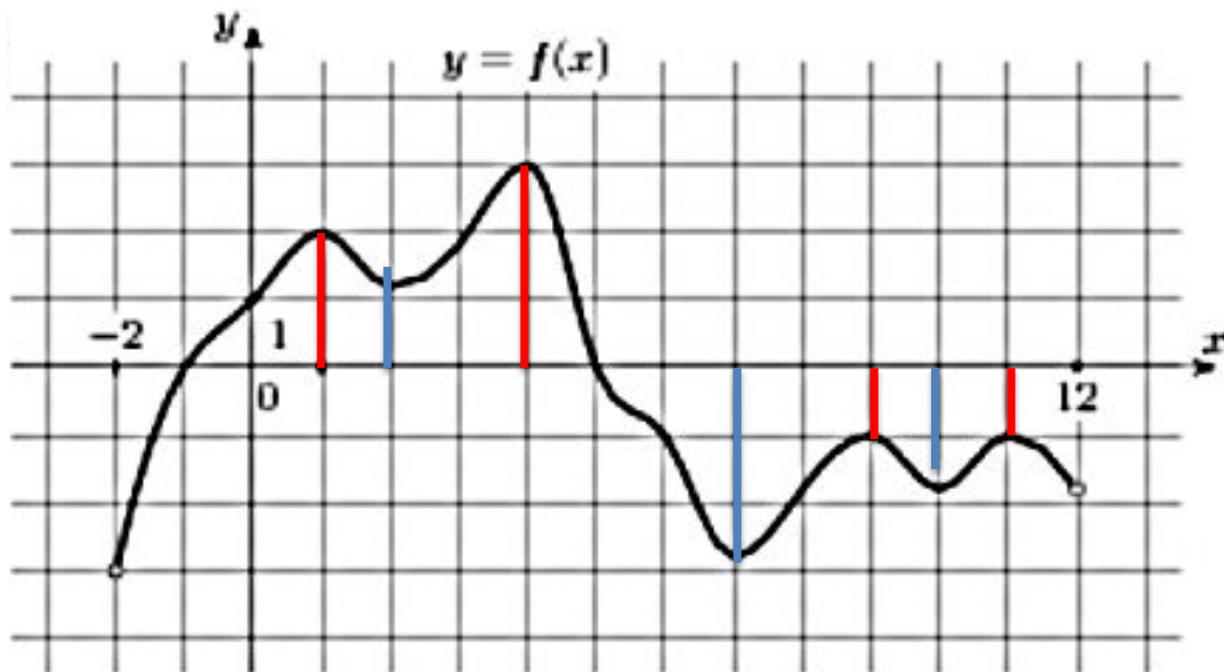
- Выделяем соответствующие им участки оси  $Ox$

- Найдем целые точки на этих отрезках

- Исключим точки, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная параллельна оси  $Ox$ )

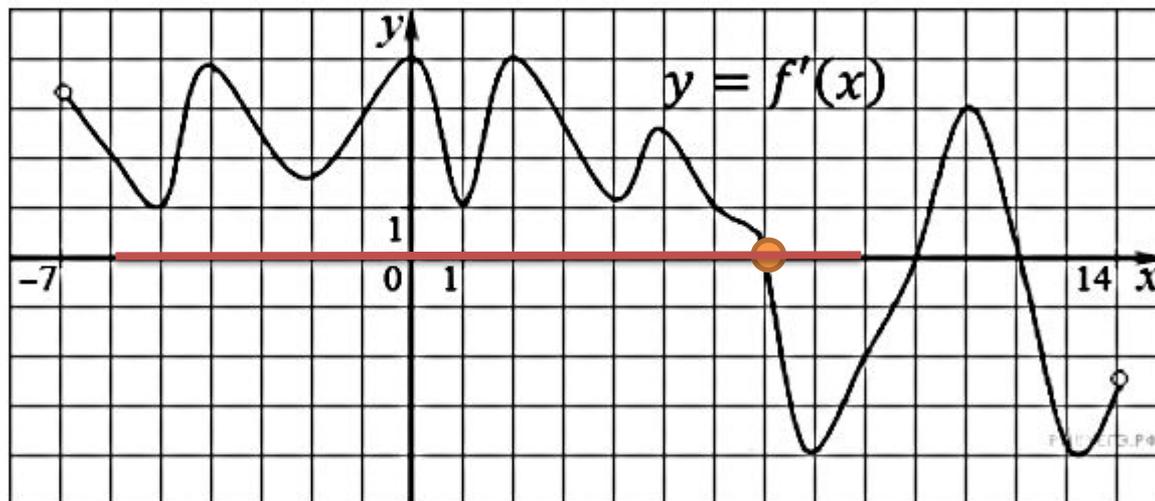
- Считаем оставшиеся точки

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-2; 12)$ . Найдите сумму точек экстремума функции  $f(x)$ .



$$1+4+9+11+2+7+10=44$$

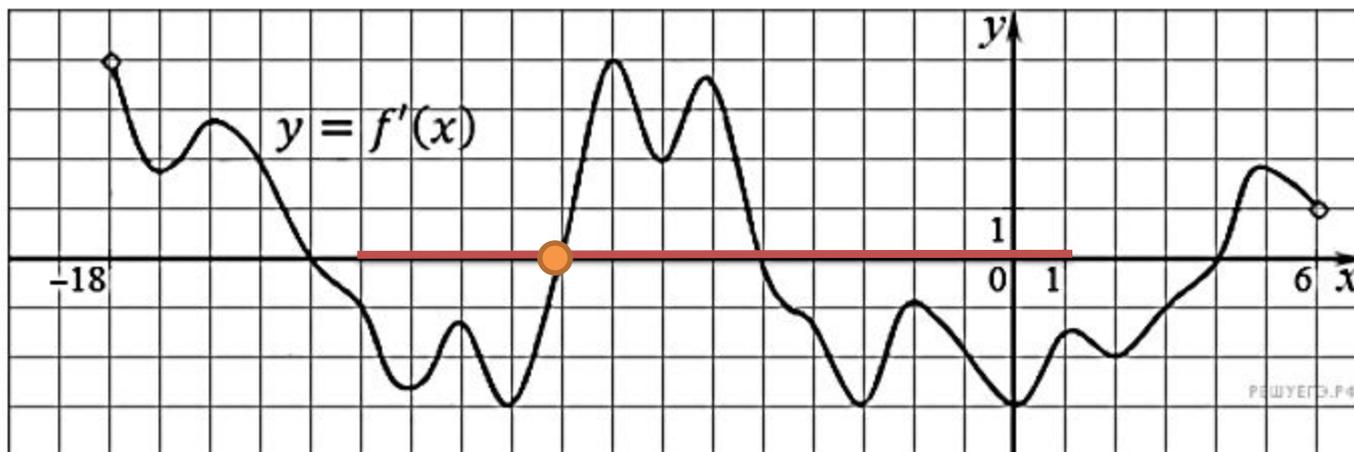
На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-7; 14)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-6; 9]$ .



Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный.

Ответ: 1

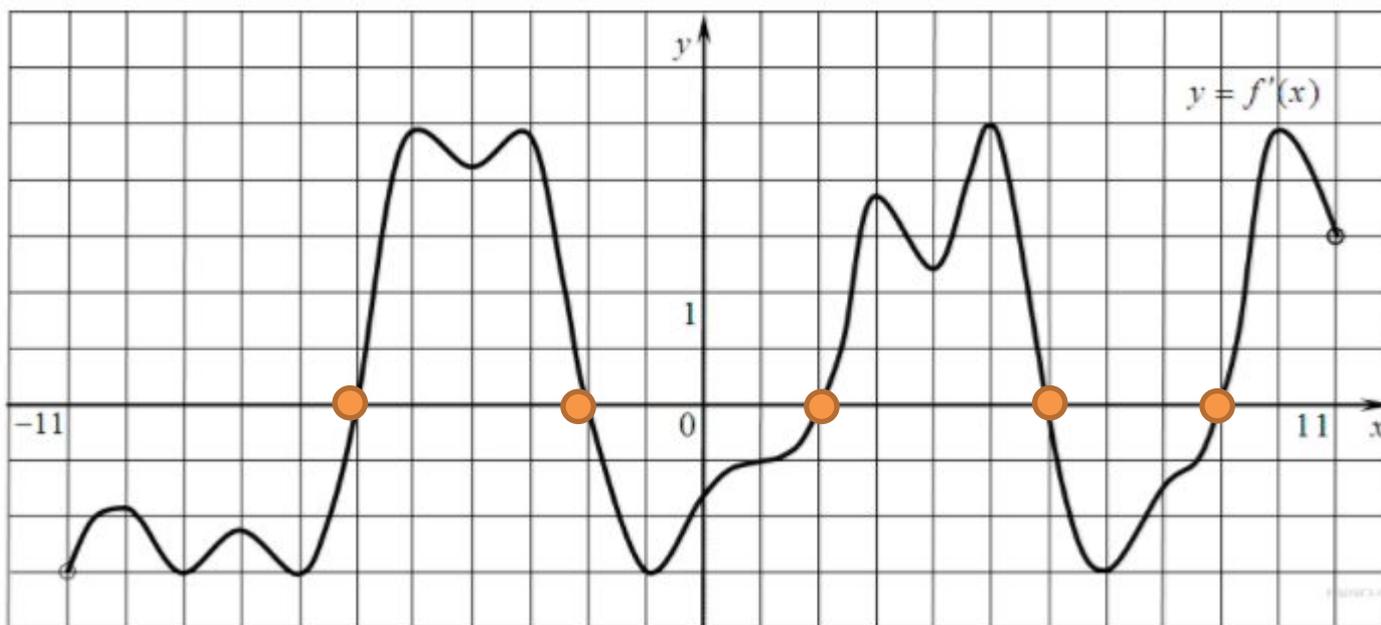
На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-18; 6)$ . Найдите количество точек минимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-13; 1]$ .



Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с отрицательного на положительный.

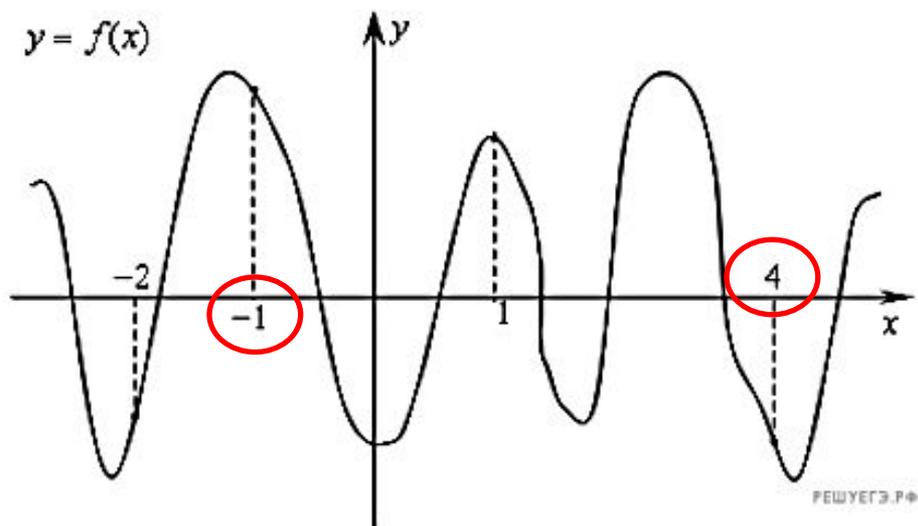
Ответ: 1

На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-11; 11)$ . Найдите количество точек экстремума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-10; 10]$ .



Ответ: 5

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и отмечены точки  $-2, -1, 1, 4$ . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: 4