Задание 7. Производная

Производная

- **Производная функции это отношение приращения функции к приращению аргумента при бесконечно малом приращение аргумента.**
- **Приращением** в математике называют изменение. То, насколько изменился аргумент (x) при продвижении вдоль оси, называется **приращением аргумента** и обозначается Δx. То, насколько изменилась функция (высота) при продвижении вперед вдоль оси Ox, на расстояние Δx, называетс
обозначает

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \to 0$$

Вычисление производных

- Производная от константы равна 0.

$c' = 0$

- Степенная функция

$(x^{a})' = ax^{a-1}, a \in R$

- Тригонометрические функции

$$(sinx)' = cosx$$
$$(cosx)' = -sinx$$

- Производная экспоненты(основание этой функции константа $\mathrm{e} \approx 2{,}7183\ldots$)

$$(\mathrm{e}^{x})' = e^{x}$$

- Логарифмическая функция

ln – натуральный логарифм ($\log_{e} y$)

$$(lnx)' = \frac{1}{x}$$

Правило дифференцирования (нахождение производной)

1. Константа выносится за знак производной

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

2. Производная суммы равна сумме производных

$$(f + y)' = f' + y'$$

3. Производная произведения

$$(f \cdot y)' = f' \cdot y + f \cdot y'$$

4. Производная частного

$$\left(\frac{f}{y}\right)' = \frac{f'y - fy'}{y^2}$$

5. Производная показательной функции

$$(a^x)' = a^x \cdot lna$$

6. Производная логарифмической функции

$$(log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}$$

Физический смысл производной

- Если точка движется вдоль оси x и ее координаты изменяются по закону x(t), то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = x'(t),$$

а ускорение:

$$a(t) = v'(t) = x''(t)$$

Примеры заданий

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

Решение:

$$v(t) = x'(t) = 12t - 48$$

При t=9

$$v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60$$

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 6$ с.

20

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчет в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 3$ с.

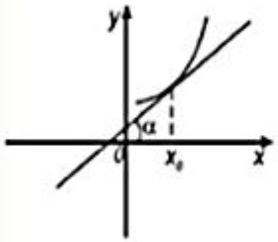
59

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 13t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

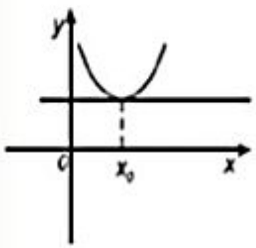
8

Геометрический смысл производной

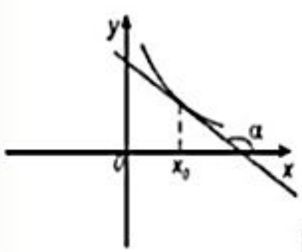
Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в этой точке



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$

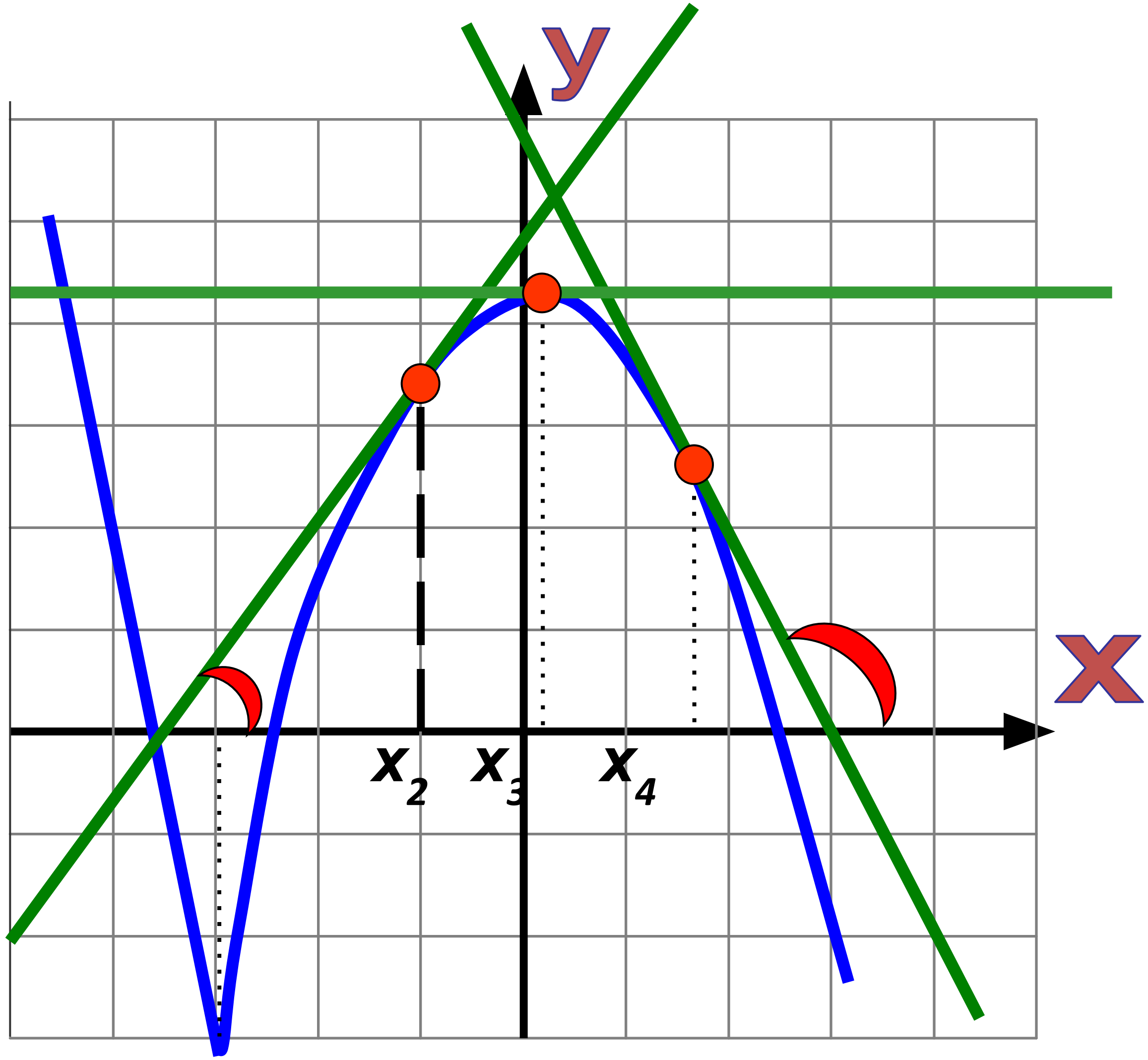


$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$

$\alpha > 90^o \Rightarrow k < 0$

$\alpha < 90^o \Rightarrow k > 0$

$\alpha = 0^o \Rightarrow k = 0$, *касательная параллельна* OX



Уравнение касательной

- Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке x_0 имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

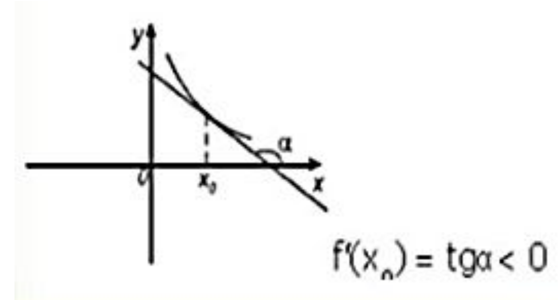
x_0 - абсцисса точки касания

$f(x_0)$ - значение функции в точке касания

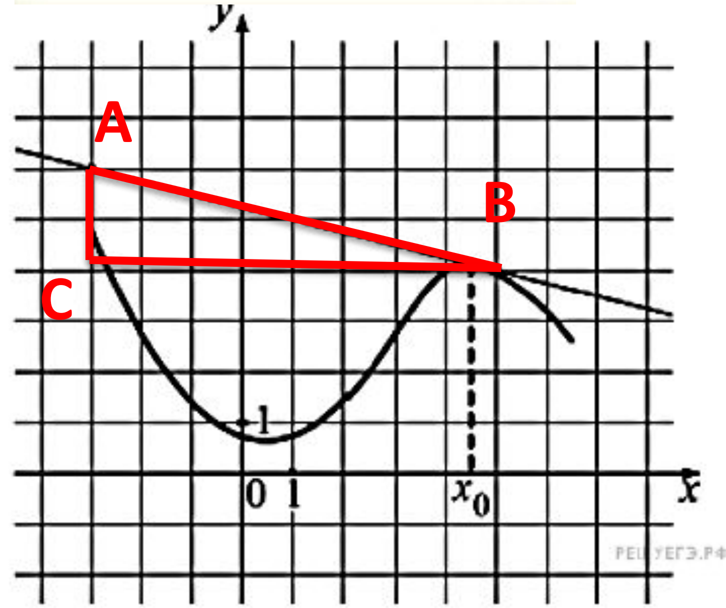
$f'(x_0)$ - значение производной функции в точке касания

Примеры заданий

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

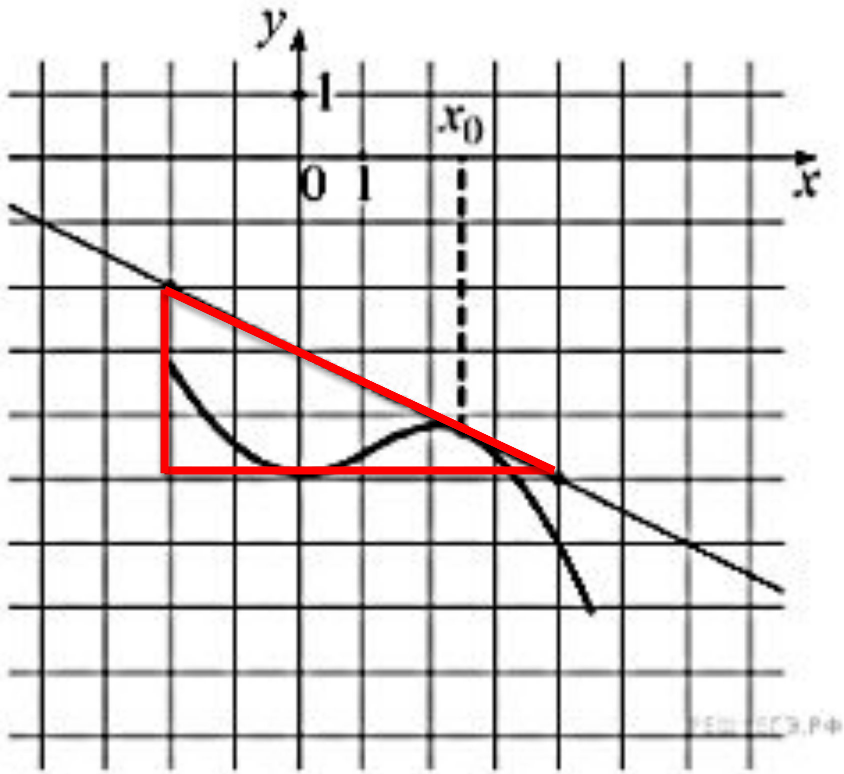


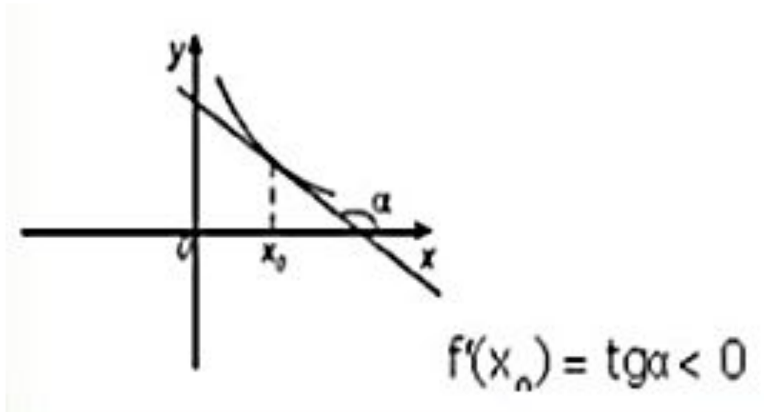
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс.

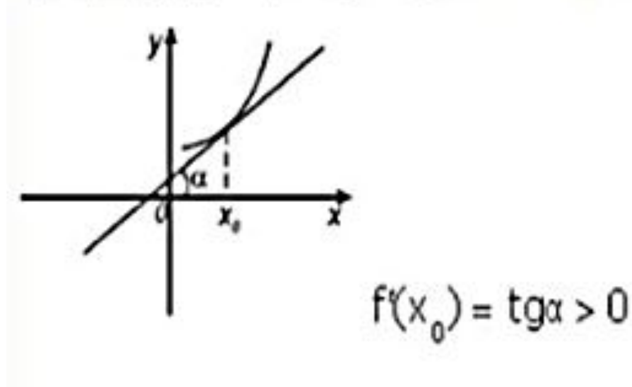


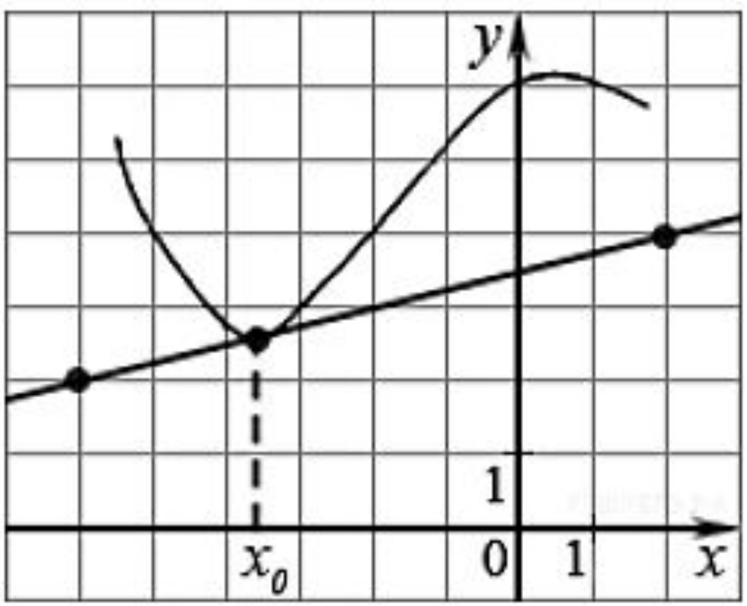
$$y'(x_0) = tg(180° - \angle ABC) = -tg\angle ABC = -\frac{AC}{CB} = -\frac{2}{8} = -0{,}25$$

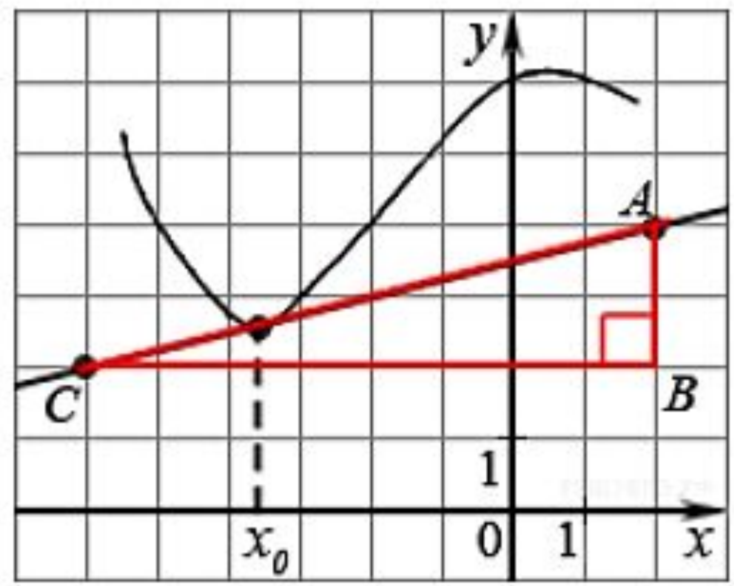
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.





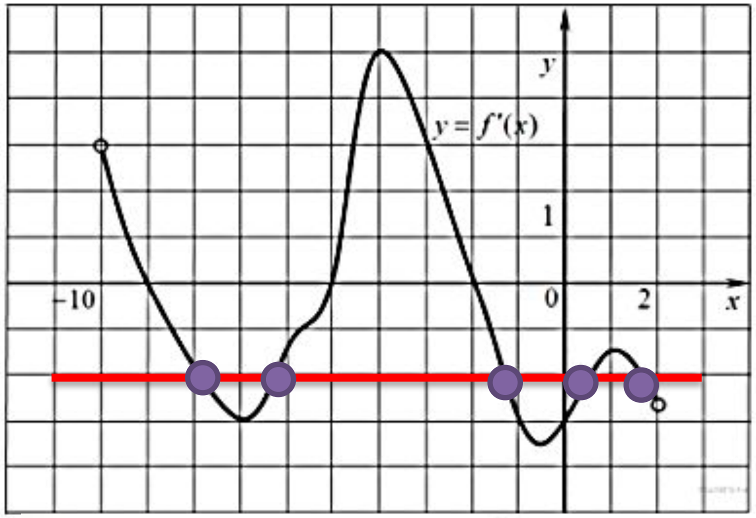


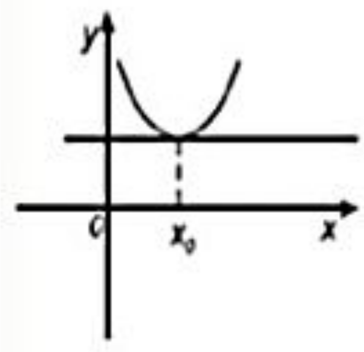




0,25

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.

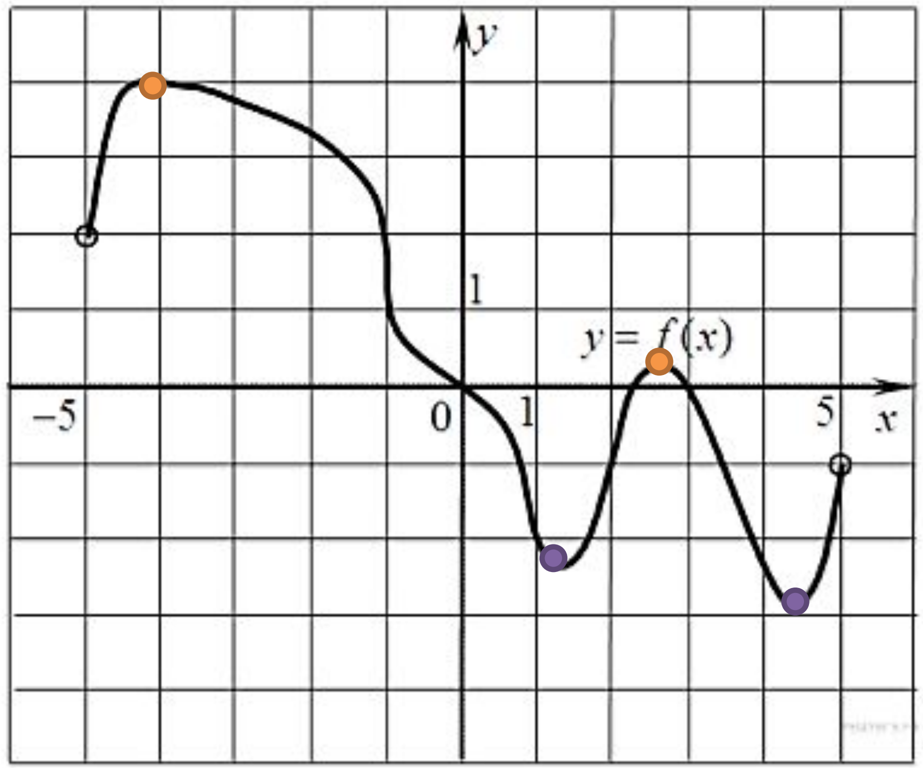




$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$

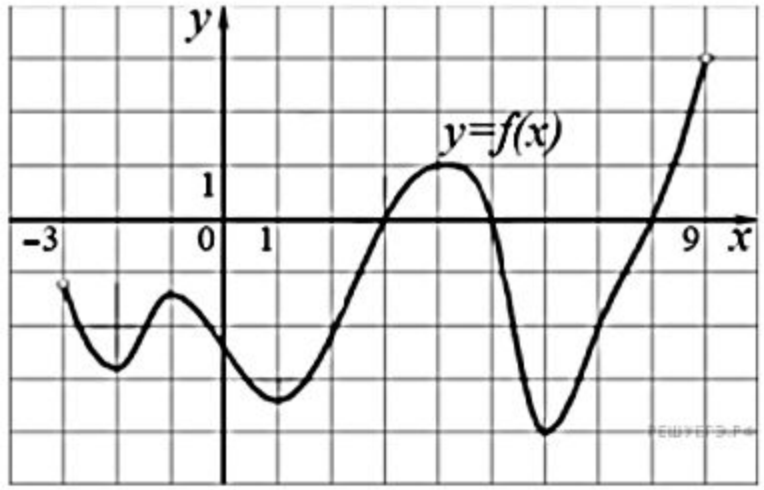
Поскольку касательная параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны –2.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.



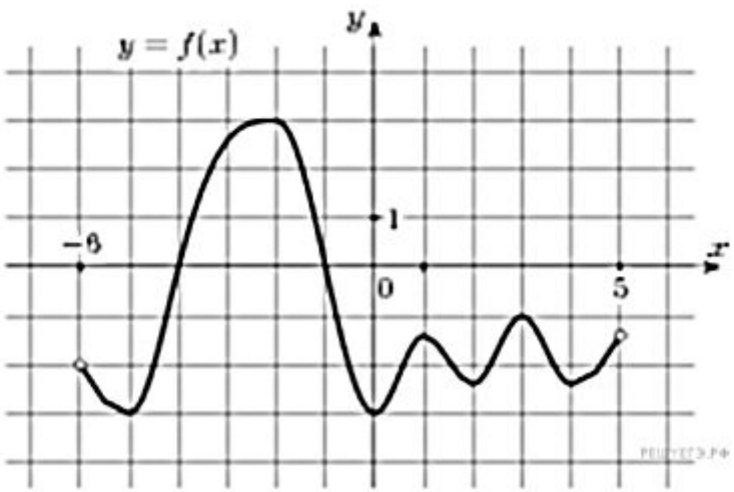
Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. Производная равна нулю в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой y = 6 или совпадает с ней в 4 точках.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$ или совпадает с ней.



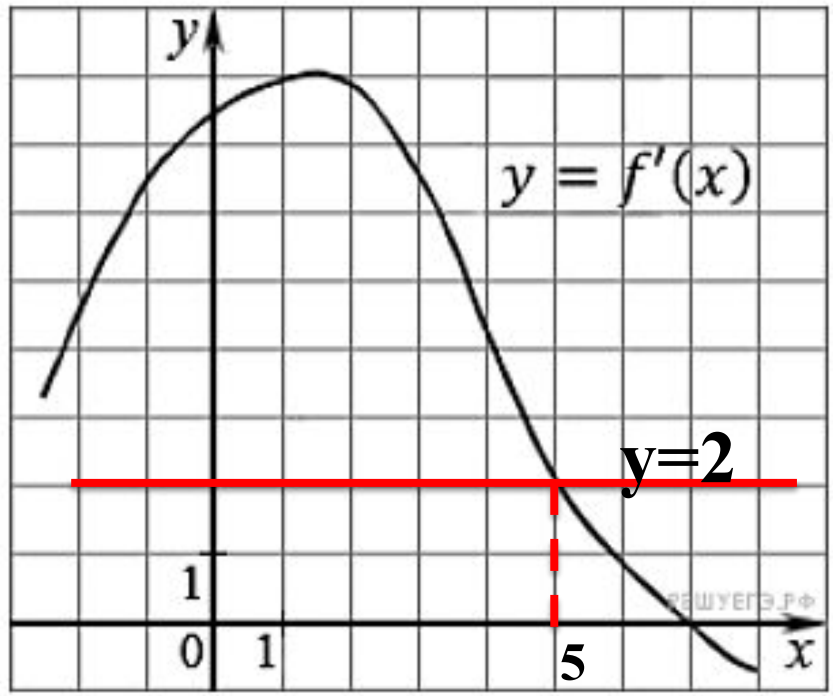
5

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.



7

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.



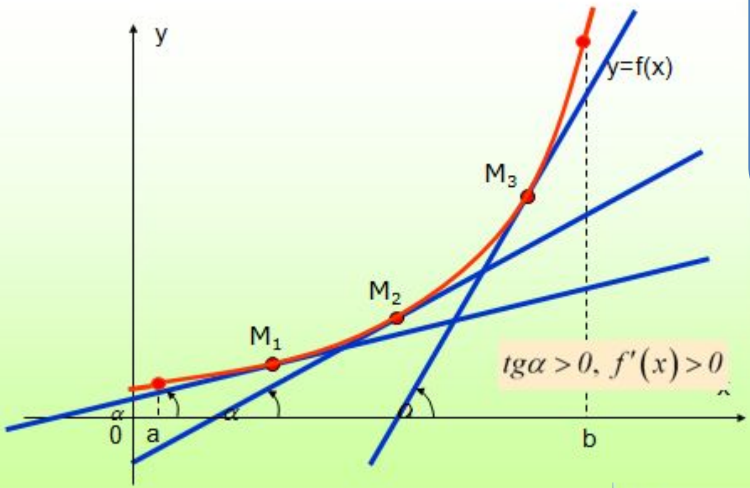
Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

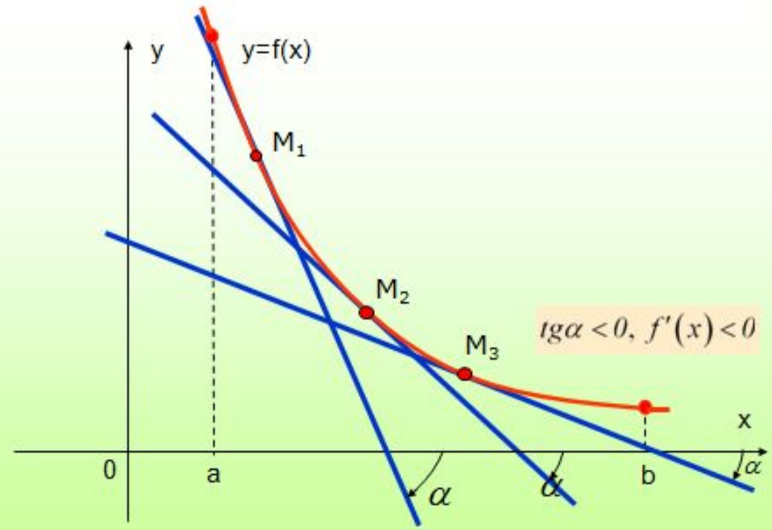
Применение производной к исследованию функции

Признак возрастания функции



Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Признак убывания функции



Если $f'(x) > 0$ на некотором промежутке, то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке.

На рисунке изображен график функции , определенной на интервале . Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Дан график функции

Теория:

F'(X)>0 , Следовательно , функция возрастает

Решение:

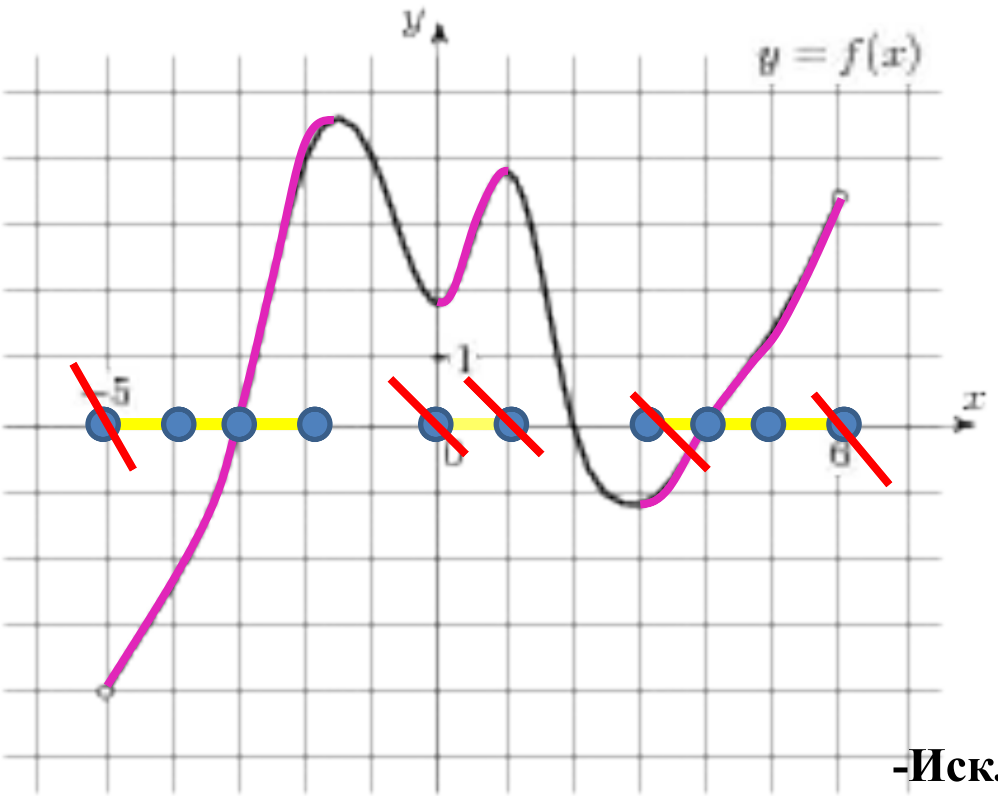
-Найдем участки возрастания функции

-(выделяем их последовательно на графике)

-Выделяем соответствующие им участки оси OX

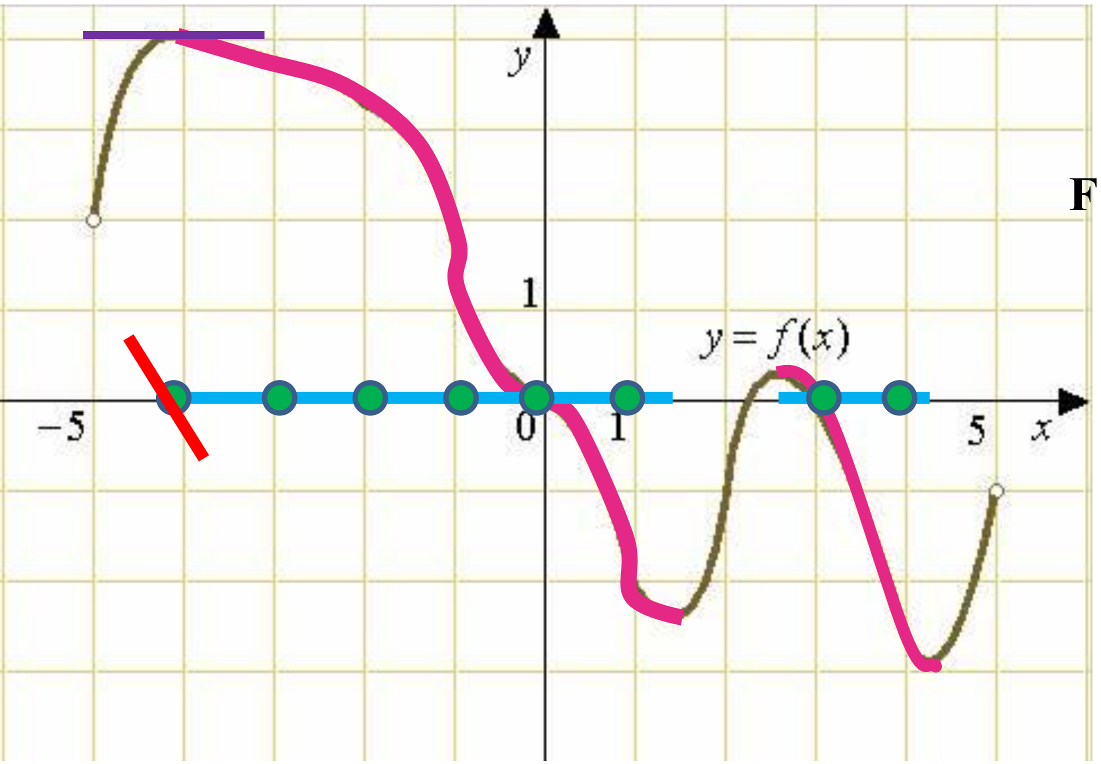
- Найдем целые точки на этих отрезках

-Исключим точки, в которых производная равна нулю(в этих точках касательная параллельна оси OX) и еще исключим точки, являющиеся концами выделенных интервалов



- Считаем оставшиеся точки

На рисунке изображен график функции , определенной на интервале .
Определите количество целых точек, в которых производная функции отри



Дан график функции

Теория:

F'(X)<0 , следовательно, функция убывает

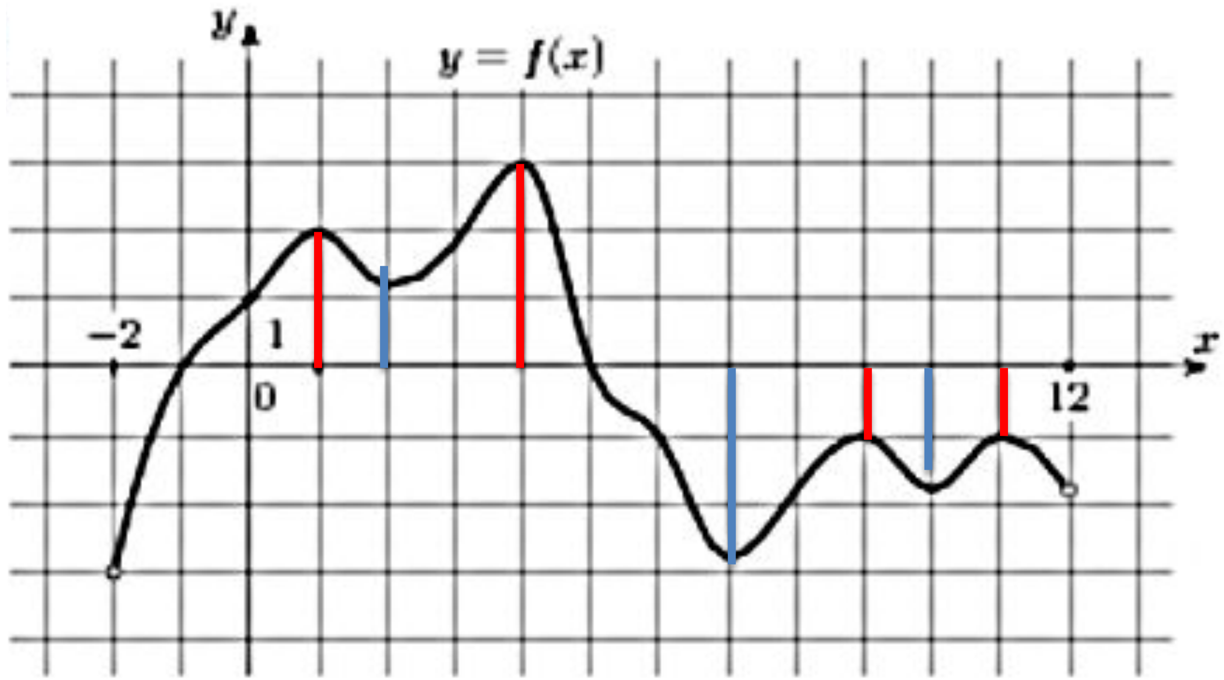
Решение:

-Найдем участки убывания функци
-(выделяем их последовательно на графике)

-Выделяем соответствующие им участки оси OX
- Найдем целые точки на этих отрезках
-Исключим точки, в которых производная равна нулю(в этих точках касательная параллельна оси OX)

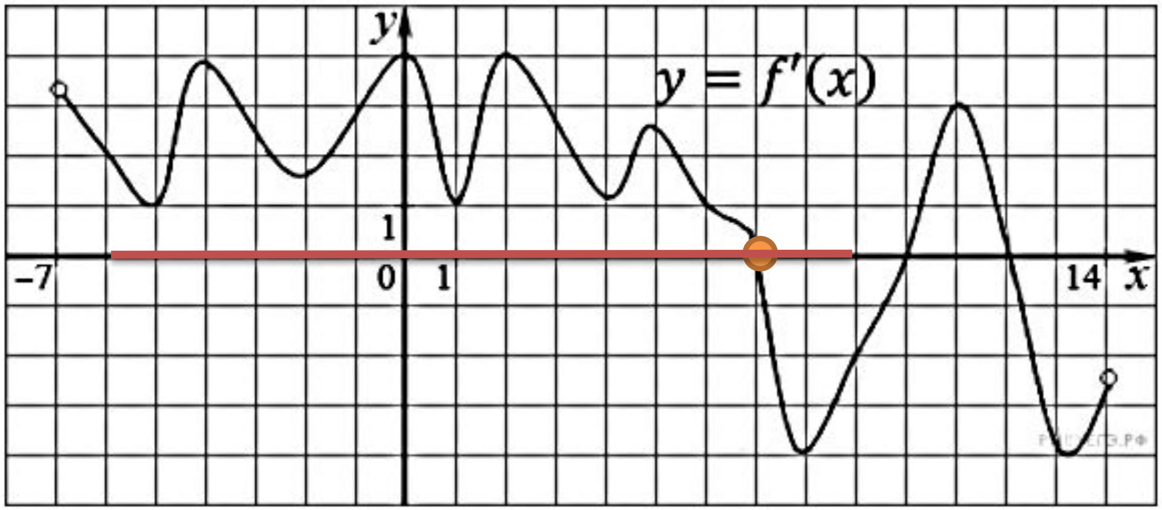
- Считаем оставшиеся точки

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



1+4+9+11+2+7+10=44

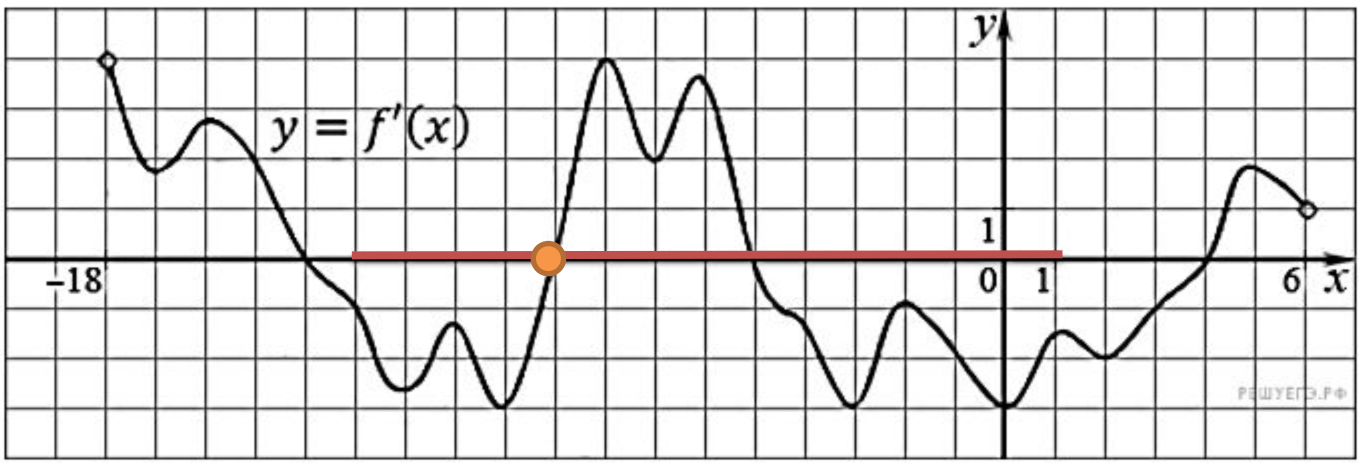
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.



Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный.

Ответ: 1

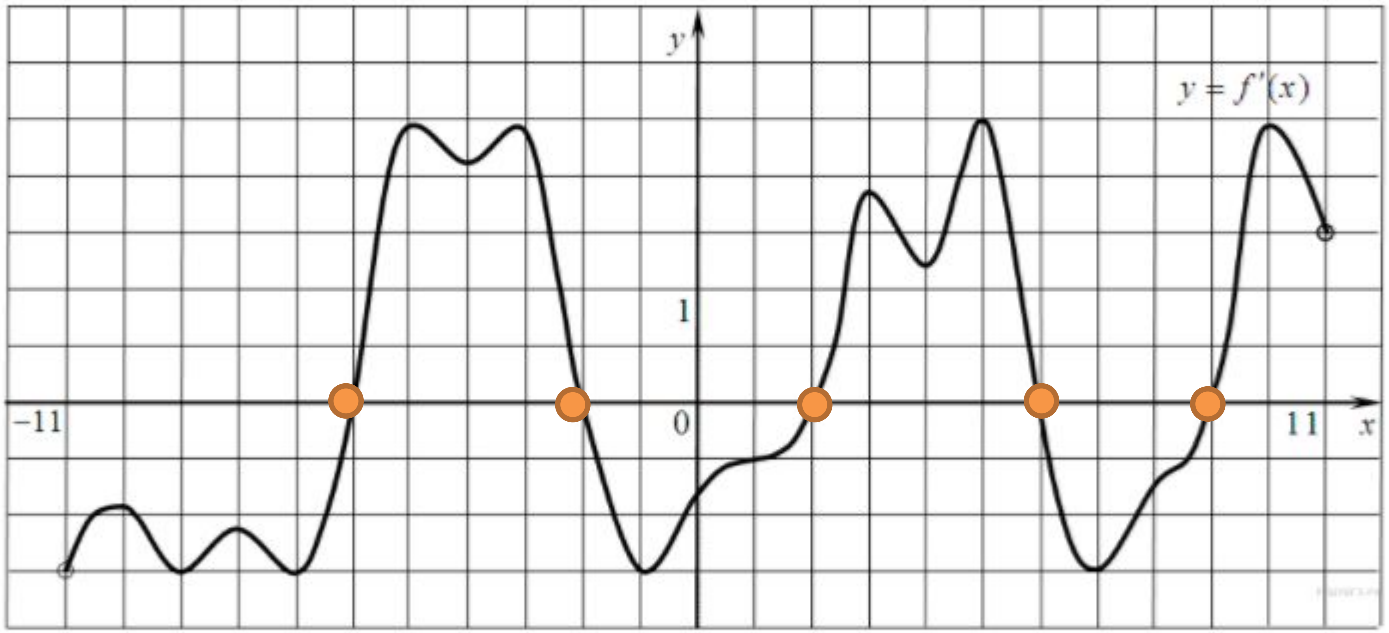
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18;\ 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13;1]$.



Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с отрицательного на положительный.

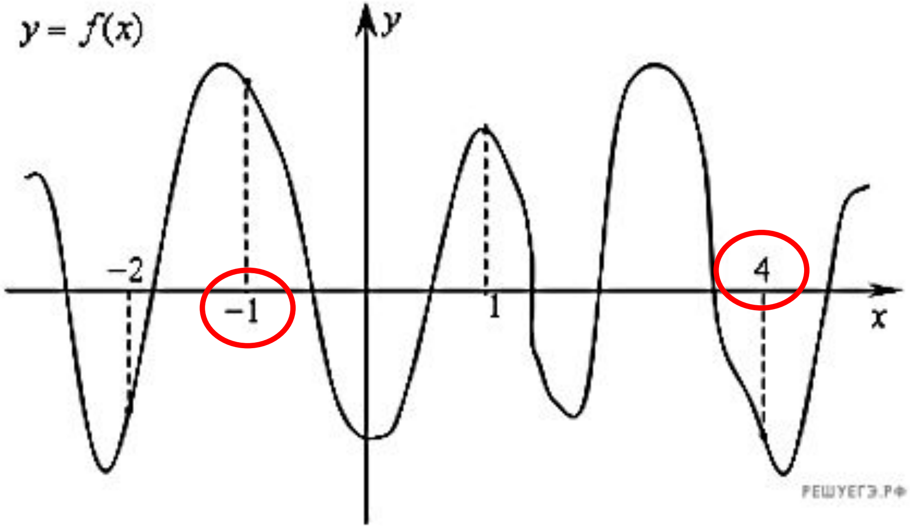
Ответ: 1

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 11)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-10; 10]$.



Ответ: 5

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -2, -1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: 4