

25.12.20.

Тема:

Знаки тригонометрических функций.
Формулы сложения.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:

<https://youtu.be/bK7zcql6SXs>

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Например:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Формулы сложения

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через синусы и косинусы углов α и β .

Теорема. Для любых α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (1)$$

Задача 1 Вычислить $\cos 75^\circ$.

► По формуле (1) находим

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \\ &- \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Заменяя в формуле (1) β на $-\beta$, получим

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos (-\beta) - \sin \alpha \sin (-\beta),$$

откуда

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (2)$$

Задача 2 Вычислить $\cos 15^\circ$.

► По формуле (2) получаем

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \\ &+ \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Задача 3 Доказать формулы

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha, \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha. \quad (3)$$

► При $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ по формуле (2) получаем

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \beta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \beta = \sin \beta, \text{ т. е.}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \sin \beta. \quad (4)$$

Заменяя в этой формуле β на α , получим

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha. \text{ Полагая в формуле (4) } \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$\text{имеем } \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha. \quad \triangleleft$$

Используя формулы (1) — (4), выведем формулы сложения для синуса:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \quad (5)$$

Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$, получаем

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta).$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \quad (6)$$

Задача 4 Вычислить $\sin 210^\circ$.

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \sin 210^\circ &= \sin(180^\circ + 30^\circ) = \sin 180^\circ \cos 30^\circ + \\ &+ \cos 180^\circ \sin 30^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Задача 5 Вычислить $\sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}$.

$$\blacktriangleright \sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \pi = 0.$$

Практическая часть.

Ответить на вопросы

Какие формулы называют формулами сложения? Запишите их.

475 Вычислить:

$$1) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right); \quad 2) \frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1 + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)};$$

$$3) 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$4) \cos(-\pi) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

481 С помощью формул сложения вычислить:

$$1) \cos 135^\circ; \quad 2) \cos 120^\circ; \quad 3) \cos 150^\circ; \quad 4) \cos 240^\circ.$$

485 Найти значение выражения:

$$1) \sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ;$$

$$2) \sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ;$$

$$3) \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12};$$

$$4) \sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}.$$

486 Вычислить:

$$1) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right), \text{ если } \cos \alpha = -\frac{3}{5} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$