Теоретическая механика

Задачи

Сложение ускорений

4.2. Система S' вращается относительно системы S. Пусть $O = O'$ и $Oz = O'z'$, причем Oz – ось вращения системы S'. Тогда векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ компланарны, и положение системы S' определяется направленным углом $\varphi = \angle(\vec{i}, \vec{i}')_{напр} = \angle(\vec{j}, \vec{j}')_{напр}$.

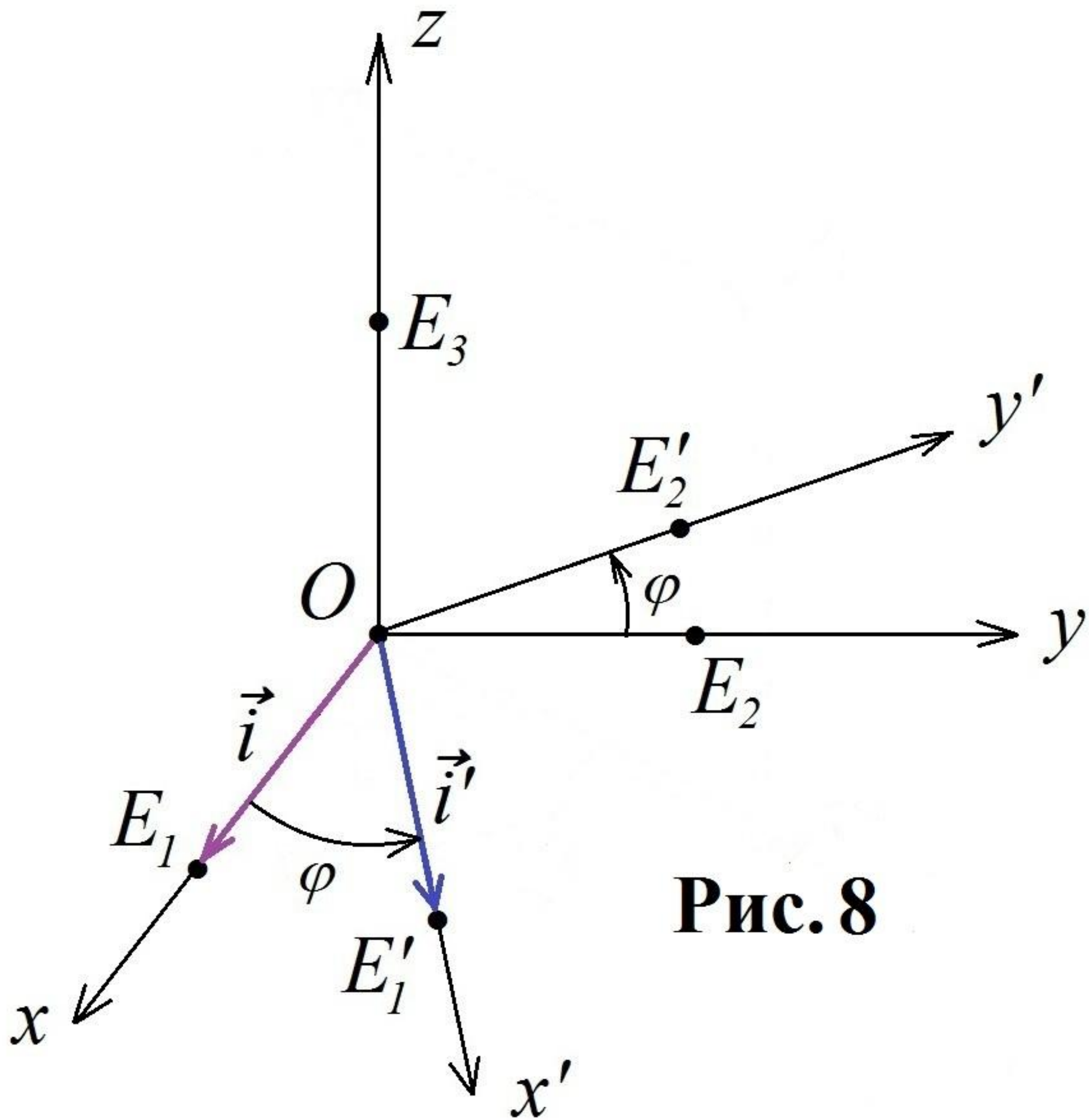


Рис. 8

Векторы $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ в системе S имеют следующие координатные представления :

$$i'_S = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = e_\rho, \qquad j'_S = \begin{pmatrix} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = e_\varphi,$$

$$k'_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_z .$$

Следовательно, матрица перехода от S к S' имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть M – отмеченная точка,

$r_{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – координатный вектор точки M в S,

$r'_{OM} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ – координатный вектор точки M в S'.

Тогда

$$r_{OM} = Dr'_{OM} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= x' \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x' e_\rho + y' e_\varphi + z' e_z,$$

$$v_{отн} = D\dot{r}'_{OM} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix} =$$

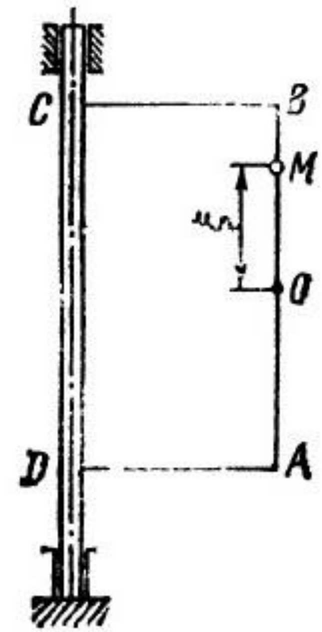
$$= \dot{x}' \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{y}' \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{z}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dot{x}' e_\rho + \dot{y}' e_\varphi + \dot{z}' e_z ,$$

$$v_{пер} = \dot{D} r'_{OM} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\,(x' e_\varphi - y' e_\rho)$$

($\varphi = \varphi(t)$ – функция от времени t).

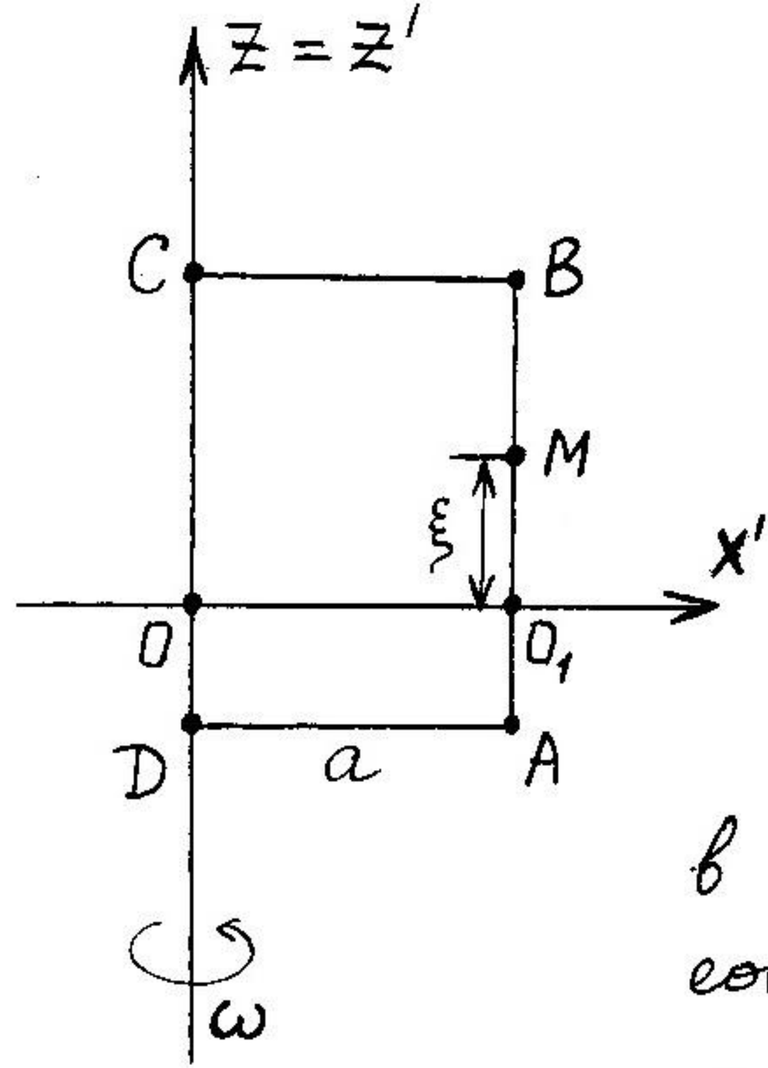
23.28(23.28). Прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг стороны CD с угловой скоростью $\omega = \pi/2$ рад/с $=$ const. Вдоль стороны AB движется точка M по закону $\xi = a \sin \frac{\pi}{2} t$ м. Даны размеры: $DA = CB = a$ м. Определить величину абсолютного ускорения точки в момент времени $t = 1$ с.

Ответ: $w_a = \frac{a\pi^2}{4}\sqrt{2}$ м/с^2.



К задаче 23.28

№23.28.



$\omega = \frac{\pi}{2}$ рад/с

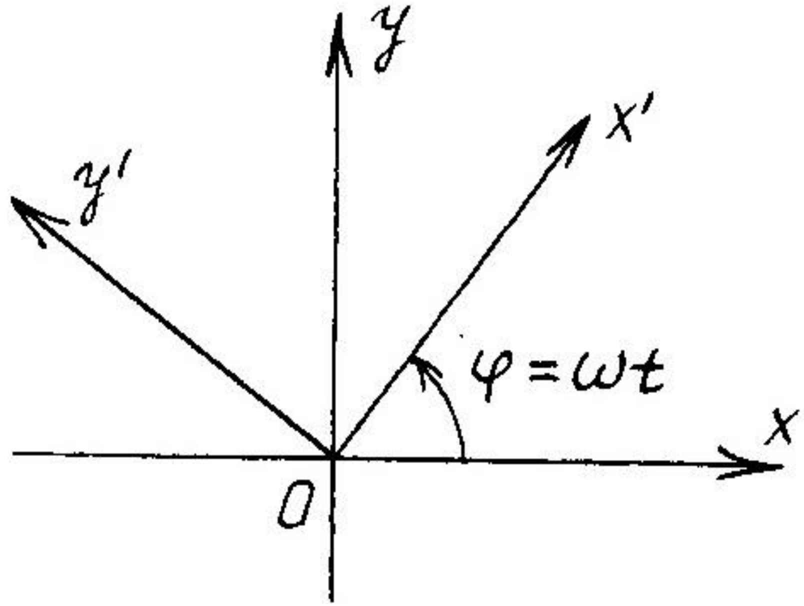
$\xi(t) = a \sin \frac{\pi}{2} t$ (м)

Найти: $w_{абс_M}(1)$

$Oxyz$ – неподвиж. система;

$Ox'y'z'$ – подвижная;

в нач. момент системы совпадают; $Oz = Oz'$ – ось вращения.



1) $\underline{r'_{OM} - ?}$

$$r'_{OM}(t) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \xi(t) \end{pmatrix}$$

2) $\underline{r_{OM}(t) - ?}$

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_{OM} = D\, r'_{OM} = \begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ a\sin\omega t \\ \xi(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2}t \\ \sin\frac{\pi}{2}t \\ \sin\frac{\pi}{2}t \end{pmatrix}$$

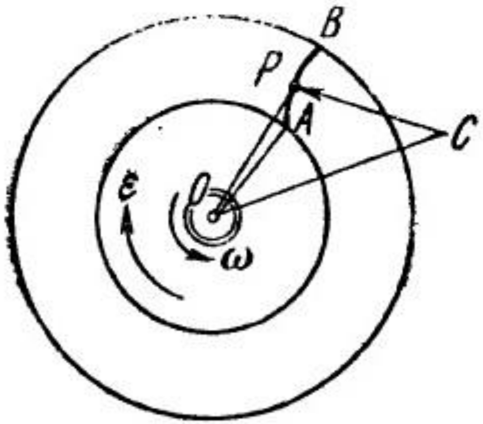
3) $$w_{абс_M} = \ddot{r}_{OM} = -a \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2}t \\ \sin\frac{\pi}{2}t \\ \sin\frac{\pi}{2}t \end{pmatrix}$$

$$w_{абс_M}(1) = -\frac{\pi^2 a}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

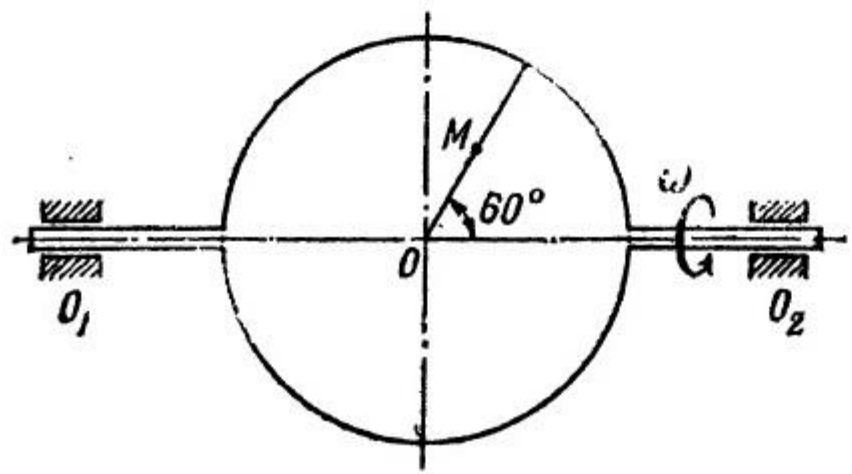
$$|w_{абс_M}(1)| = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2 a \ (м/с^2)$$

23.27(23.27). По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t$ рад/с в направлении от центра диска к его ободу движется точка M по закону $OM = 4t^2$ см. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60°. Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент $t = 1$ с.

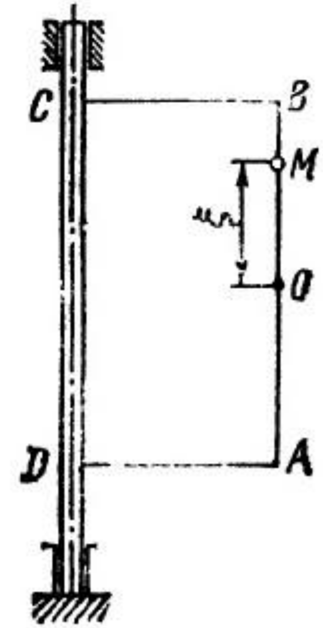
Ответ: $w_M = 35{,}56$ см/с^2.



К задаче 23.26

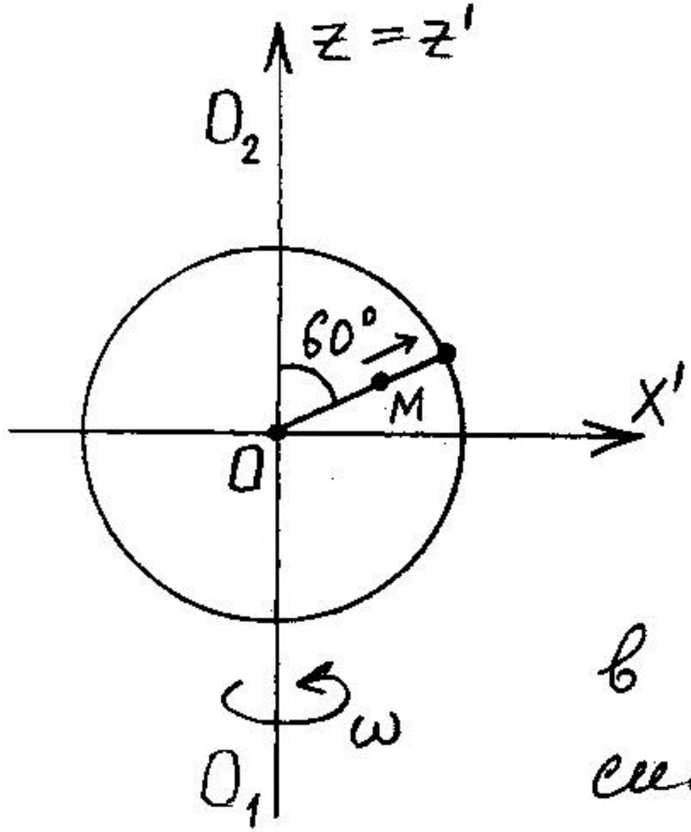


К задаче 23.27



К задаче 23.28

N 23.27.



$|OM| = 4t^2$ (см);

$t_1 = 1$ с; $\omega = 2t$ рад/с

$w_{абс_M}(1) = ?$

Oxyz — неподвиж. сист.;

Ox'y'z' — подвижная;

в нач. момент $t=0$

системы совпадают;

$Oz = Oz'$ — ось вращения;

$Oy' \perp$ плоскости рис. и направлена "от зрителя".

1)

<u>В $Ox'y'z'$</u> : $r'(t) = \begin{pmatrix} 4t^2 \cdot \cos 30^\circ \\ 0 \\ 4t^2 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} = 2t^2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \dot\varphi(t) = \omega(t) = 2t \Rightarrow$$

м-ца перехода

угл. скор.

$\Rightarrow \underline{\varphi(t) = t^2}$ ($C = 0$, т.к. в нач. момент системы совп.)

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos t^2 & -\sin t^2 & 0 \\ \sin t^2 & \cos t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В $Oxyz$: $r(t) = B(t)\, r'(t) =$

$$= 2t^2 \left(\underbrace{\sqrt{3} \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\parallel\, e_\rho} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\parallel\, e_z} \right)$$

– закон движ-я т. M в $Oxyz$.

2) $w_{абс}(t) = \ddot{r}(t)$.

$$\dot{r}(t) = 4t \left(\sqrt{3} \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + 2t^2 \left(\sqrt{3} \cdot 2t \begin{pmatrix} -\sin t^2 \\ \cos t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

2) $\underline{w_{абс}(t) = \ddot{r}(t)}.$

$$\dot{r}(t) = 4t\left(\sqrt{3}\begin{pmatrix}\cos t^2\\ \sin t^2\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) + 2t^2\left(\sqrt{3}\cdot 2t\begin{pmatrix}-\sin t^2\\ \cos t^2\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

$$\underline{w_{абс}(t)} = \ddot{r}(t) = 4\left(\sqrt{3}\overbrace{\begin{pmatrix}\cos t^2\\ \sin t^2\\ 0\end{pmatrix}}^{=e_\rho} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{=e_z}\right) + 4t\cdot\sqrt{3}\cdot 2t\underbrace{\begin{pmatrix}-\sin t^2\\ \cos t^2\\ 0\end{pmatrix}}_{=e_\varphi} +$$

$$+ 12\sqrt{3}t^2\underbrace{\begin{pmatrix}-\sin t^2\\ \cos t^2\\ 0\end{pmatrix}}_{=e_\varphi} + 4\sqrt{3}t^3\cdot 2t\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-\cos t^2\\ -\sin t^2\\ 0\end{pmatrix}}_{=-e_\rho} =$$

$$\underline{= 4\sqrt{3}\left(1 - 2t^4\right)e_\rho + 20\sqrt{3}t^2\cdot e_\varphi + 4\cdot e_z}$$

$$+\ 12\sqrt{3}\,t^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t^2 \\ \cos t^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=e_\varphi} + 4\sqrt{3}\,t^3 \cdot 2t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos t^2 \\ -\sin t^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=-e_\rho} =$$

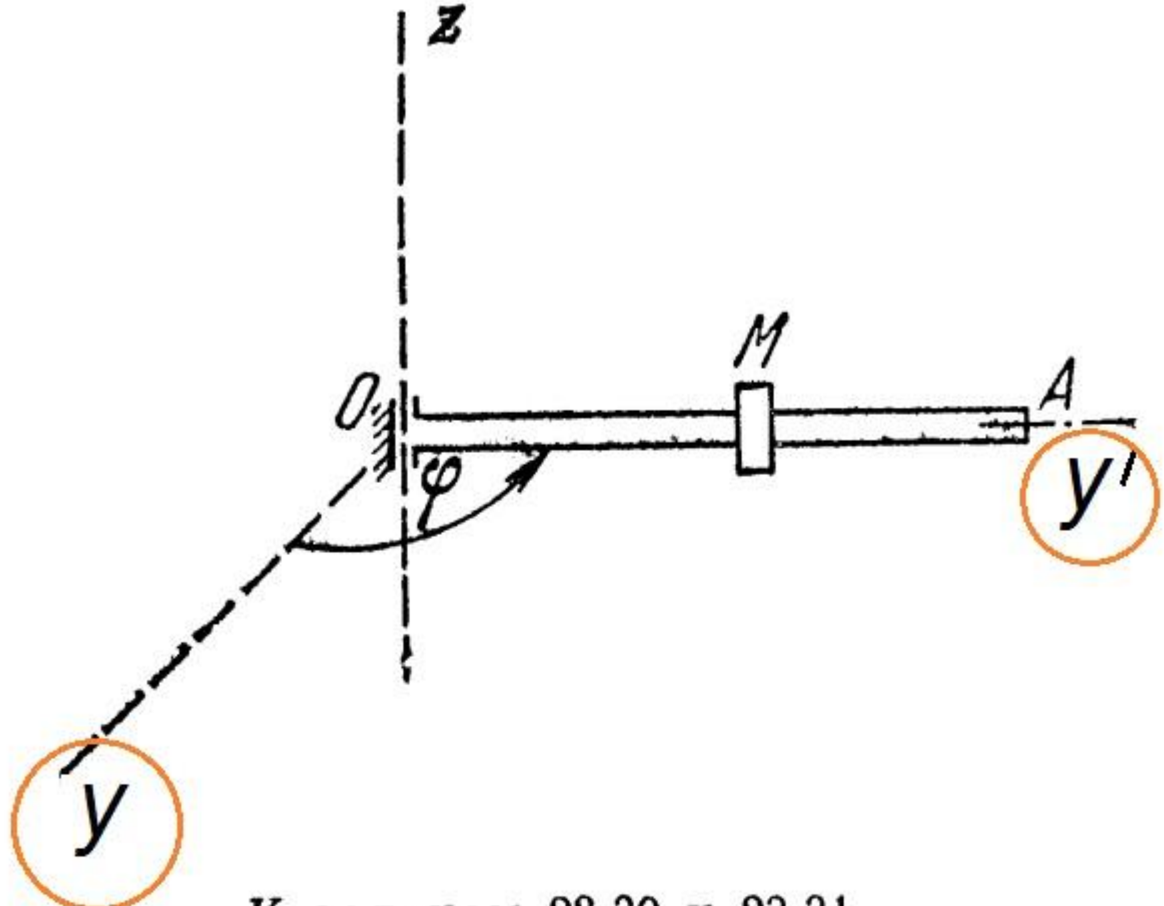
$$= 4\sqrt{3}\left(1 - 2t^4\right) e_\rho + 20\sqrt{3}\,t^2 \cdot e_\varphi + 4 \cdot e_z$$

$$w_{a\delta c}(t_1) = -4\sqrt{3} \cdot e_\rho + 20\sqrt{3} \cdot e_\varphi + 4 \cdot e_z .$$

$$|w_{a\delta c}(t_1)| = 4 \cdot \sqrt{3 + 3 \cdot 5^2 + 1} = 4 \cdot \sqrt{79} \approx$$

$$\approx 35{,}55 \quad (\text{см}/\text{с}^2)$$

Дом. задание :
23.30, 23.31, 23.36



К задачам 23.30 и 23.31