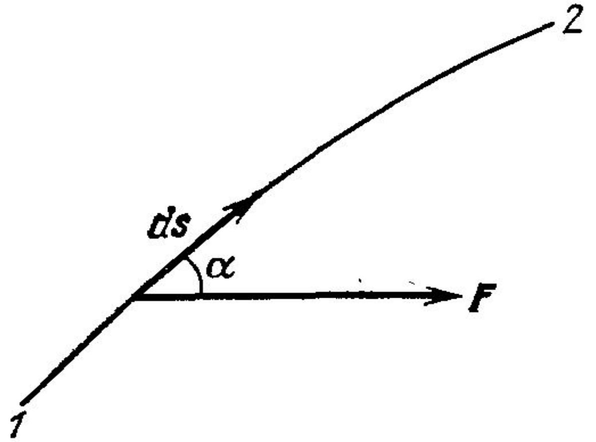
Лекция 4

Работа и энергия

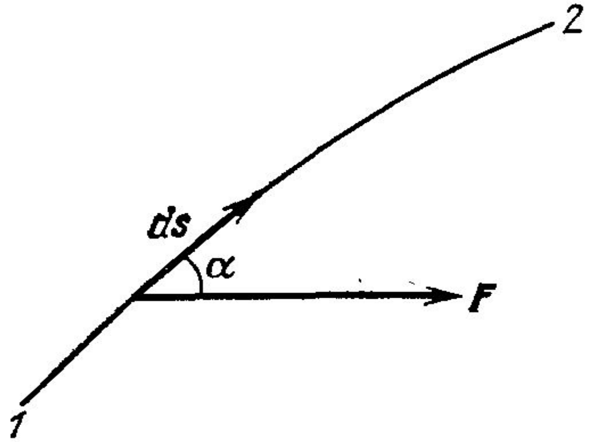
Работа и кинетическая энергия

- Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении материальной точки $d\vec{s}$ называется проекция F_s этой силы на направление перемещения, умноженная на величину перемещения:
-
    - $dA = Fds\cos(\alpha),$
- где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$ Или, если воспользоваться скалярным произведением векторов:
-
    - $dA = (\vec{F}d\vec{s}).$



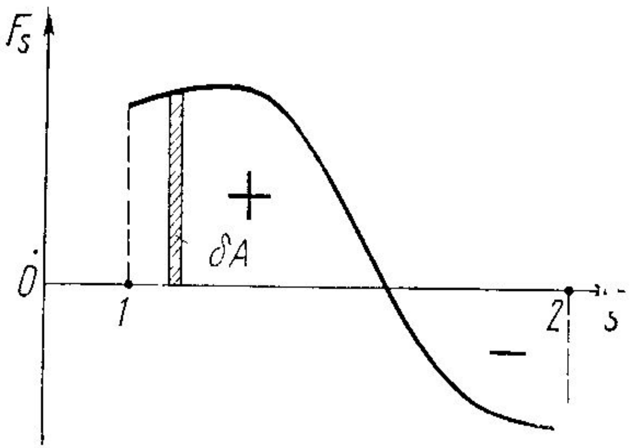
Работа и кинетическая энергия

- Суммируя (интегрируя) выражение по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, найдем работу силы $\vec{F}$ на данном пути:
-
  - $A = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{s} = \int_1^2 F_s\, ds.$



Работа и кинетическая энергия

- Рисунок поясняет выражение
- Из рисунка видно, что элементарная работа *δA* равна площади заштрихованной полоски, а работа *A* по перемещению из точки 1 в точку 2 – площади, ограниченной кривой, ординатами 1 и 2 и осью абсцисс.
- При этом площадь фигуры над осью *s* берется со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью абсцисс – со знаком минус



Работа и кинетическая энергия

- Единицей работы в системе Си является джоуль (Дж).
- Джоуль есть работа силы в один ньютон на перемещении в один метр при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения.

Работа и кинетическая энергия

- Работа, отнесенная к единице времени т.е. величина
-

$$P = \frac{dA}{dt},$$

- называется мощностью. Ее единицей является джоуль в секунду или ватт (Вт)

Работа и кинетическая энергия

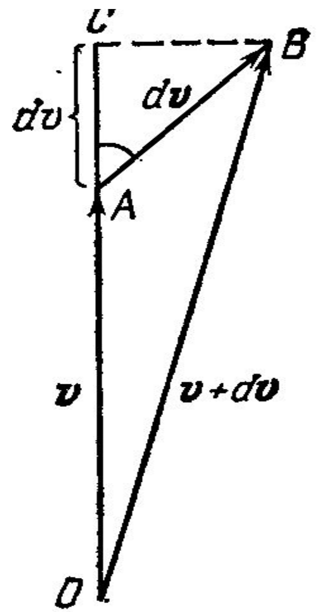
- Подставив в $A = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{s} = \int_1^2 F_s\, ds$
- Выражения
  - $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$,
  - $d\vec{s} = \vec{v} dt,$
- придадим этой формуле вид:
-

$$A = \int (\vec{v}\, d\overrightarrow{p)} = m \int \vec{v}\, d\vec{v}$$

Работа и кинетическая энергия

- Приращение вектора скорости $d\vec{v}$ может не совпадать по направлению с вектором скорости $\vec{v}$.
- Однако, как видно из рисунка,
  - $d\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $dv = AC$,
- где dv-приращение длины вектора $\vec{v}$. По определению скалярного произведения
-

$$\vec{v}d\vec{v} = v \cdot AB \cdot cos\alpha = v \cdot AC = vdv$$



Работа и кинетическая энергия

- Используя это соотношение в нашей задаче, получим для интеграла выражение
-
- $$A_{12} = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$
-
- где v_1 – начальная, а v_2 – конечная скорости точки

Работа и кинетическая энергия

- Величина

  - $K = \frac{mv^2}{2}$

- называется кинетической энергией материальной точки. С помощью этого понятия полученный результат запишется в виде
-
  - $A = K_2 - K_1.$
- Таким образом, работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки.

Работа и кинетическая энергия

- Полученный результат обобщается на случай произвольной системы материальных точек.
- Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит.
- Тогда под A_{12} следует понимать работу всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на материальные точки системы.
- Таким образом, работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы

Работа и кинетическая энергия

- Имеется существенное отличие между воздействием сил на импульс и энергию системы.
- Внутренние силы не меняют импульса системы. Не так обстоит дело в случае кинетической энергии.
- Представим себе, например, замкнутую систему из двух материальных точек, взаимодействующих между собой силами притяжения $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$

Работа и кинетическая энергия

- Если точки придут в движение, то каждая из сил совершит положительную работу.
- Будет положительной и работа обеих сил. Она пойдет на приращение кинетической энергии системы.
- Следовательно, приращение кинетической энергии определяется работой не только внешних, но и внутренних сил.

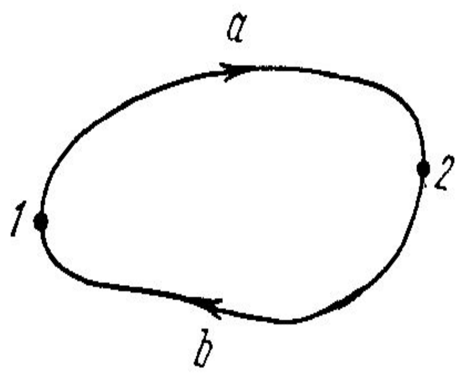
Консервативные силы. Потенциальная энергия

- Если в каждой точке пространства на помещенную туда частицу действует сила, то говорят, что частица находится в поле сил.

- Так, например, частица может находиться в поле
- сил тяжести,
- в поле упругих сил,
- в поле сил сопротивления и т.д.

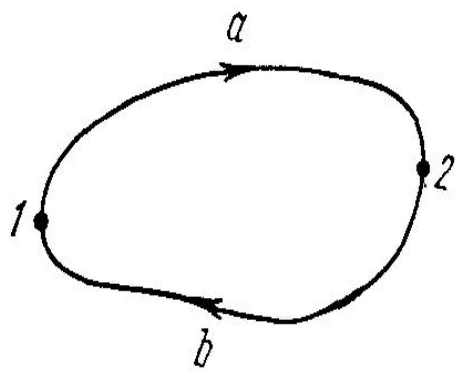
Консервативные силы. Потенциальная энергия

- Существуют поля, в которых работа, совершаемая над частицей силами поля, не зависит от пути, между точками 1 и 2.
- Работа по замкнутому пути, естественно, в таких полях равна нулю.
- Силы, обладающие такими свойствами, называются консервативными.



Консервативные силы. Потенциальная энергия

- Все силы, не являющиеся консервативными, называют неконсервативными.
- К их числу относятся, например, силы трения и сопротивления среды.
- Работа этих сил зависти от пути между начальным и конечным положением частицы и не равна нулю на любом замкнутом пути.

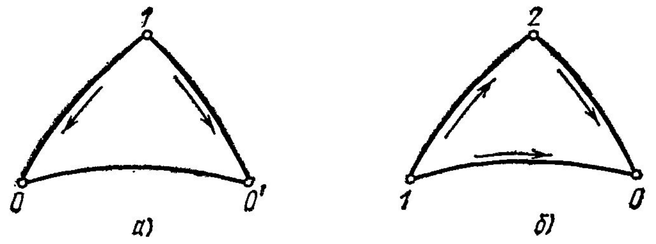


Консервативные силы. Потенциальная энергия

- Если на систему частиц действуют только консервативные силы, то можно для нее ввести понятие потенциальной энергии. Какое-либо произвольное положение системы условно примем за нулевое.
- *Работа, совершаемая консервативными силами из рассматриваемого положение в нулевое, называется потенциальной энергией системы*
- Работа консервативных сил не зависит от пути, поэтому потенциальная энергия системы U зависит только от ее координат.

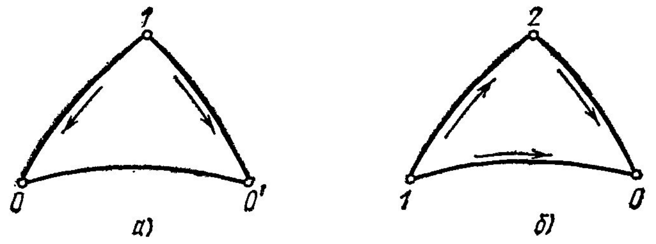
Консервативные силы. Потенциальная энергия

- Значение потенциальной энергии зависит от того, какое положение системы условно принять за нулевое.
- Если за нулевое принять положение O (рис. а), то в положении 1 система будет обладать потенциальной энергией $U = A_{1O}$, равной работе при переходе системы из положения 1 в положение O.



Консервативные силы. Потенциальная энергия

- Если же за нулевое принять положение $0^{'}$, то потенциальная энергия будет равна $U^{'} = A_{10'}$.
- Вследствие консервативности сил, действующих в системе, забота вдоль пути $10^{'}$ будет равна работе вдоль пути $100^{'}$:
- $A_{10'} = A_{10} + A_{00'}$, или $U^{'} = U + A_{00'}$.



Консервативные силы. Потенциальная энергия

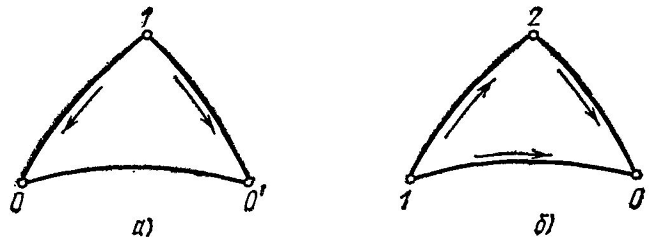
- Работа $A_{OO'}$ постоянна, т.е. не зависит от координат системы в рассматриваемом состоянии *1*. Она полностью определяется выбором нулевых положений O и O'.
- Мы видим, что при замене одного нулевого положения другим потенциальная энергия системы меняется на постоянную величину.
- Таким образом, потенциальная энергия определена не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной.

Консервативные силы. Потенциальная энергия

- Этот произвол не может отразиться на физических выводах, так как ход физических явлений зависит не от абсолютных значений самой потенциальной энергии, а лишь от ее разности в различных состояниях.

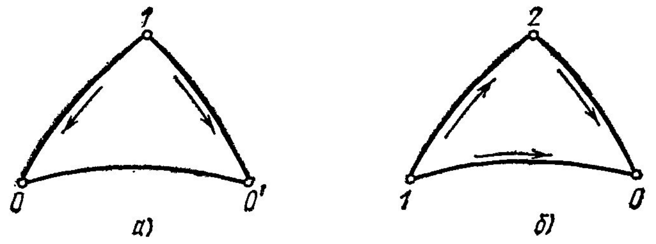
Консервативные силы. Потенциальная энергия

- Пусть система перешла из положения *1* в положение *2* по какому-нибудь пути *12* (рис. б).
- Работу A_{12}, совершенную консервативными силами при таком переходе, можно выразить через потенциальные энергии U_1 и U_2 в состояниях *1* и *2*.



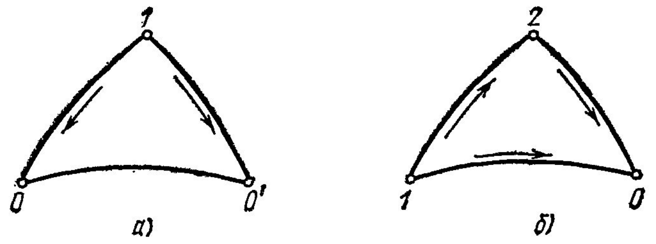
Консервативные силы. Потенциальная энергия

- С этой целью вообразим, что переход осуществлен через нулевое положение *O*, т.е. по пути *1O2*.
- Так как силы консервативны, то $A_{12} = A_{1O2} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O}$. По определению
- Потенциальной энергии $U_1 = A_{1O} + C$, $U_2 = A_{2O} + C$, где *C* – одна и та же постоянная



Консервативные силы. Потенциальная энергия

- Таким образом,
-
- $A_{12} = U_1 - U_2$,
- т.е. работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы



Закон сохранения энергии

- Та же работа A_{12}, как было показано, может быть выражена через приращение кинетической энергии. Приравнивая выражения
  - $A = K_2 - K_1$ и $A_{12} = U_1 - U_2$
- получим
  - $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$,
- Откуда
  - $K_2 + U_2 = K_1 + U_1$

Закон сохранения энергии

- Сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется ее *полной энергией E*. Таким образом $E_1 = E_2$, или
-
- $E = K + U = const$.
-
- В системе с одними только консервативными силами полная энергия остается постоянной.

Закон сохранения энергии

- Могут происходить только превращения из кинетической энергии в потенциальную и обратно, но полный запас энергии системы измениться не может.
- Это положение называется *законом сохранения энергии* в механике.

Потенциальная энергия и сила

- Вычислим потенциальную энергию в некоторых простейших случаях.
- а). *Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести.*
- Если материальная точка, находящаяся на высоте h, упадет на нулевой уровень, то сила тяжести совершит работу $A = mgh$.
- Поэтому на высоте h материальная точка обладает потенциальной энергией $U = mgh + C$.

Потенциальная энергия и сила

- За нулевой можно принять произвольный уровень, например, уровень пола, уровень моря и т.д.
- Постоянная C равна потенциальной энергии на нулевом уровне. Полагая ее равной нулю, получим
-
  - $U = mgh$

Потенциальная энергия и сила

- б) Потенциальная энергия растянутой пружины.
- Упругие силы, возникающие при растяжении или сжатии пружины, консервативны.
- Поэтому имеет смысл говорить о потенциальной энергии деформированной пружины.
- Ее называют упругой энергией. Обозначим через x растяжение пружины, т.е. разность $x = l - l_0$ длин пружин в деформированном и недеформированном состояниях.

Потенциальная энергия и сила

- Упругая сила *F* зависит только от растяжения. Согласно закону Гука, *F* = –*kx*. При возвращении пружины из деформированного в недеформированное состояние сила *F* совершает работу
-
- $$A = \int_x^0 F dx = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}.$$
- Если упругую энергию пружины в недеформированном состоянии считать равной нулю, то
-

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

Потенциальная энергия и сила

- в). *Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек.* По закону всемирного тяготения гравитационная сила притяжения двух тел равна:
-
- $$F = -G\frac{Mm}{r^2},$$
-
- где G – гравитационная постоянная.

Потенциальная энергия и сила

- Силы гравитационного притяжения консервативны. Будем считать одну из масс, например *M*, неподвижной. При перемещении массы *m* из бесконечности гравитационные силы совершают работу
-
- $$A = GmM\int_r^\infty \frac{1}{r^2}dr = G\frac{mM}{r}.$$
-
- Здесь *r* –расстояние между телами в конечном состоянии.

Потенциальная энергия и сила

- Эта работа равна убыли потенциальной энергии.
- $$A = U_\infty - U(r).$$

- Обычно потенциальную энергию на бесконечности принимают равной нулю. В этом случае:

- $$U(r) = -G\frac{mM}{r}.$$

Потенциальная энергия и сила

- Как показывают приведенные примеры, зная зависимость сил от координат можно путем интегрирования найти потенциальную энергию частицы.
- Можно поставить и обратную задачу: вычислить действующие силы по заданной потенциальной энергии.
- Эта задача решается с помощью дифференцирования

Потенциальная энергия и сила

- Как было показано выше

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = -dU$$

- По правилам скалярного произведения это выражение запишется так:

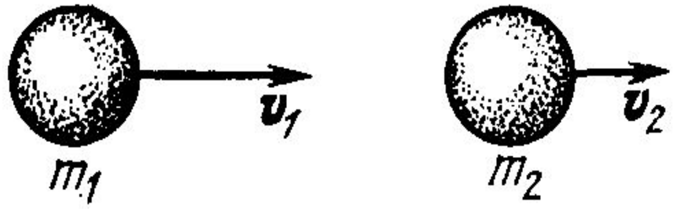
$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU$$

- Таким образом, получаем

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, F_y = -\frac{dU}{dy}, F_z = -\frac{dU}{dz}.$$

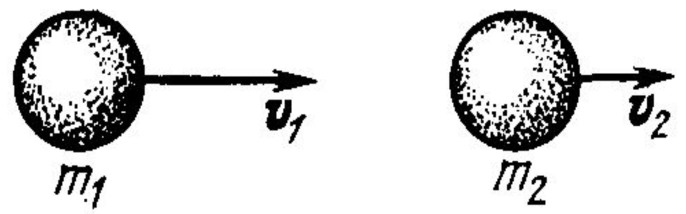
Абсолютно неупругий удар

- Интересным примером, где имеет место потеря механической энергии под действием диссипативных сил, является абсолютно неупругий удар.
- Так называется столкновение двух тел, в результате которого они соединяются вместе и движутся дальше как одно целое



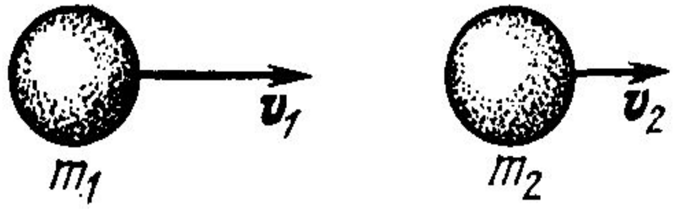
Абсолютно неупругий удар

- Скорость образовавшегося в результате столкновения тела можно найти, используя закон сохранения импульса.
- Пусть шары движутся вдоль прямой, соединяющей их центры, со скоростями v_1 и v_2 .
- В этом случае говорят, что удар является центральным. Обозначим через v скорость образовавшегося тела



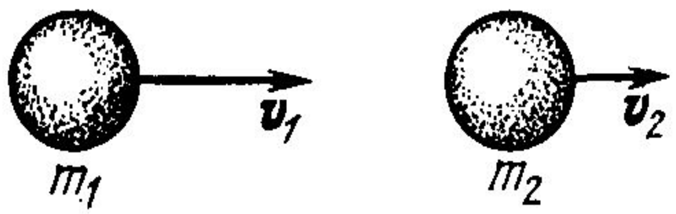
Абсолютно неупругий удар

- Закон сохранения импульса дает
- $$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v,$$
-
- Откуда
-
  - $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$



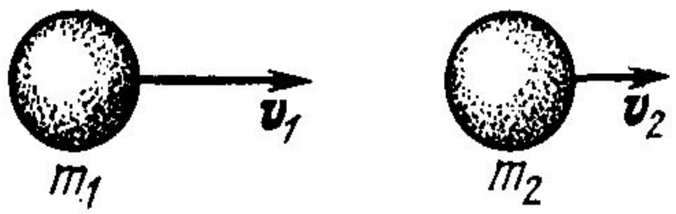
Абсолютно неупругий удар

- Кинетические энергии до удара и после удара равны соответственно
-
- $K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, K_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2.$
-
- Пользуясь этими уравнениями, нетрудно получить
  - $K_1 - K_2 = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2,$
- где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса шаров



Абсолютно неупругий удар

- Таким образом, при столкновении двух абсолютно неупругих шаров происходит потеря кинетической энергии макроскопического движения, равная половине произведения приведенной массы на квадрат относительной скорости.



Абсолютно неупругий удар

- Когда сталкиваются два тела, то разрушительное действие при столкновении зависит только от их относительной скорости $v_1 - v_2$.
- Кинетическая энергия, от которой зависит разрушительный эффект, равна ${}^1\!/_2\,\mu(v_1 - v_2)^2$.
- Остальная часть кинетической энергии связана с движением центра масс системы.
- Эта энергия при столкновении не изменяется, а потому она не оказывает никакого влияния на разрушение.

Абсолютно неупругий удар

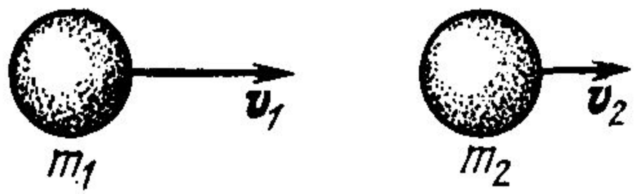
- Например, если сталкиваются два одинаковых автомобиля, движущиеся навстречу друг другу с одной и той же скоростью v, то энергия, от которой зависит разрушение, равна
-
- $\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{mm}{m+m}(2v)^2 = mv^2,$
-
- т. е. вся кинетическая энергия тратится на разрушение.
- Это ясно без вычислений, так как после столкновения оба автомобиля, независимо от того, в какой мере они пострадали при аварии, должны остановиться.

Абсолютно неупругий удар

- Разрушительные эффекты при авариях, конечно, являются бедствием.
- Но в некоторых случаях, например при изучении превращений, претерпеваемых атомными ядрами и элементарными частицами во время столкновения, они являются целью исследования.
- В таких случаях стремятся к тому, чтобы разрушительные эффекты усилить.

Абсолютно упругий удар

- Рассмотрим центральные удары абсолютно упругих шаров.
- Скорости шаров после столкновения v_1' и v_2' находим из законов сохранения импульса и энергии:

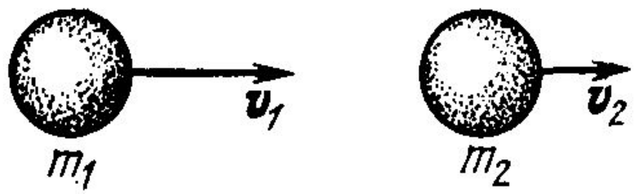


-
- $m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2,$
- $\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

Абсолютно упругий удар

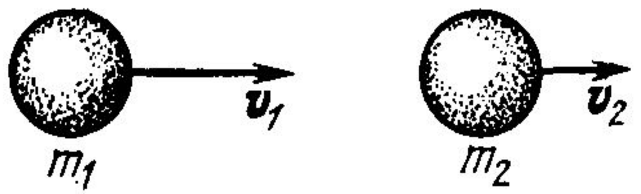
- Перепишем в виде:
-
- $m_1(v_1^{'} - v_1) = m_2(v_2^{'} - v_2)$,
- $m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_1(v_2'^2 - v_2^2)$.
-
- Поделим уравнения почленно. Это дает
-

$$v_1 + v_1^{'} = v_2 + v_2^{'}.$$



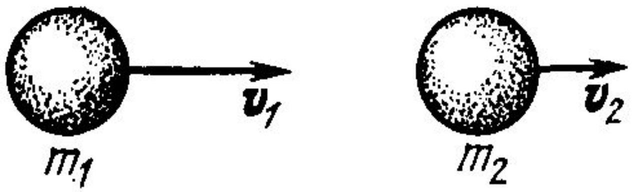
Абсолютно упругий удар

- В результате задача свелась к решению системы двух линейных уравнений. Решая их, найдем
- $$v_1' = -v_1 + 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$
  - $v_2' = -v_2 + 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$



Абсолютно упругий удар

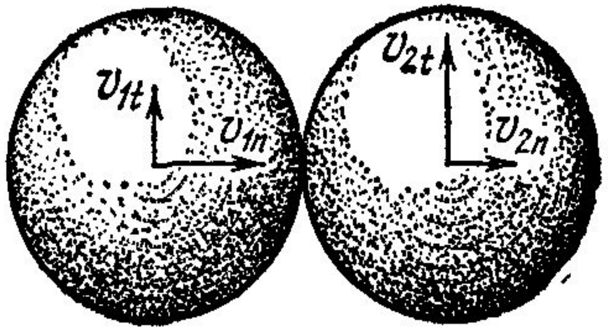
- Если шар *2* не двигается ($v_2 = 0$), то уравнения приводятся к виду.
-
- $v_1^{'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \;\; v_1^{'} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$



- Если $m_2 > m_1$, «налетающий» шар после столкновения будет двигаться назад.
- При $m_2 = m_1$ он остановится, а второй шар будет двигаться со скоростью v_1.

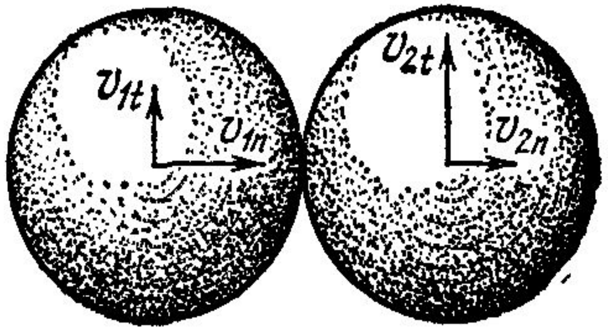
Абсолютно упругий удар

- Рассмотрим теперь нецентральный удар твердых упругих шаров. Так называется столкновение, когда в момент удара начальные скорости шаров не совпадают по направлению с линией центров.
- Разложим в момент столкновения начальную скорость каждого шара на нормальную v_n и тангенциальную v_tсоставляющие, т. е. составляющие вдоль линии центров и перпендикулярно к ней.
- Так же поступим с конечными скоростями шаров в момент начала их разлета.



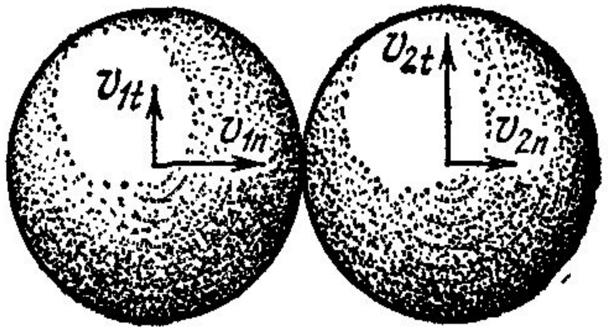
Абсолютно упругий удар

- Тогда законы сохранения импульса и энергии запишутся в виде
-
- $m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n},$
  $m_1 v'_{1t} + m_2 v'_{2t} = m_1 v_{1t} + m_2 v_{2t},$
-
- $\frac{1}{2} m_1 \left(v'^2_{1n} + v'^2_{1t}\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v'^2_{2n} + v'^2_{2t}\right) =$
  $\frac{1}{2} m_1 (v^2_{1n} + v^2_{1t}) + \frac{1}{2} m_2 (v^2_{2n} + v^2_{2t}).$



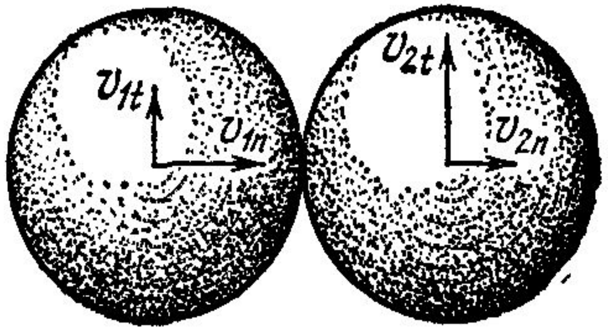
Абсолютно упругий удар

- Получилось всего три уравнения для определения четырех неизвестных (скорости, помеченные штрихами).
- Чтобы написать недостающее уравнение, введем предположение, что при столкновении шаров не возникают тангенциальные силы.
- Ввести такое предположение вынуждает нас закон сохранения энергии, уже использованный при написании наших уравнений.



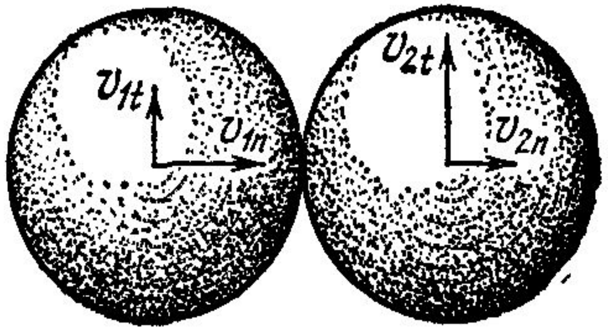
Абсолютно упругий удар

- Если бы при столкновении развивались тангенциальные силы трения скольжения, механическая энергия не могла бы сохраняться. Поэтому, предполагая удар идеально упругим, мы должны считать сами шары идеально гладкими.
- При их столкновении тангенциальные силы не возникают.



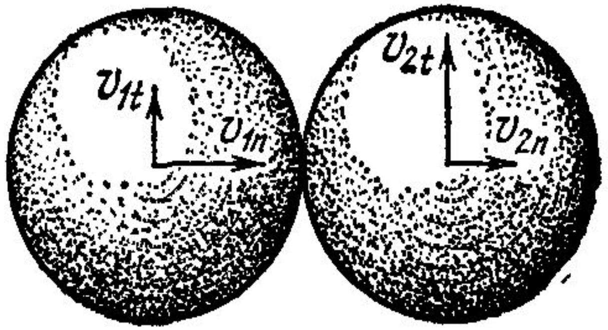
Абсолютно упругий удар

- Если это так, то не происходит также изменения тангенциальных скоростей и к уравнениям следует присоединить уравнения $v'_{1t} = v_{1t}$ и $v'_{2t} = v_{2t}$.
- Тогда останутся только уравнения для нормальных скоростей, отличающиеся от уравнений центрального удара лишь обозначениями.
- В результате мы приходим к следующему заключению.



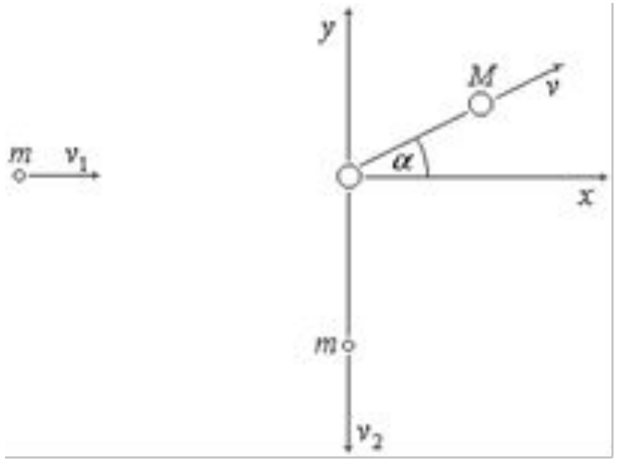
Абсолютно упругий удар

- При столкновении гладких идеально упругих шаров их тангенциальные скорости не изменяются.
- Нормальные же скорости изменяются так же, как и скорости при центральном ударе.
- В частности, при столкновениях не изменяются состояния вращения шаров.
- Если шары одинаковы, то при столкновении они обмениваются нормальными скоростями, тангенциальные скорости их остаются неизменными.



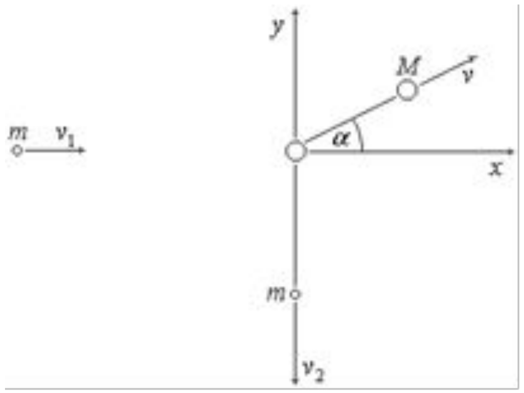
Задача

- Частица массой m налетает на покоящуюся частицу со скоростью v_1 и после абсолютно упругого удара отлетает со скоростью v_2 перпендикулярно к направлению своего первоначального движения. Найти массу частицы M.



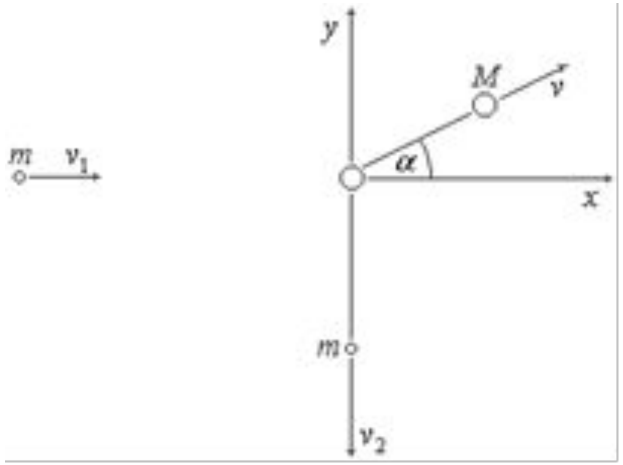
Задача

- Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси *x* и *y*:
-
  - $mv_1 = Mv cos\alpha,$
  - $-mv_2 + Mv sin\alpha = 0.$



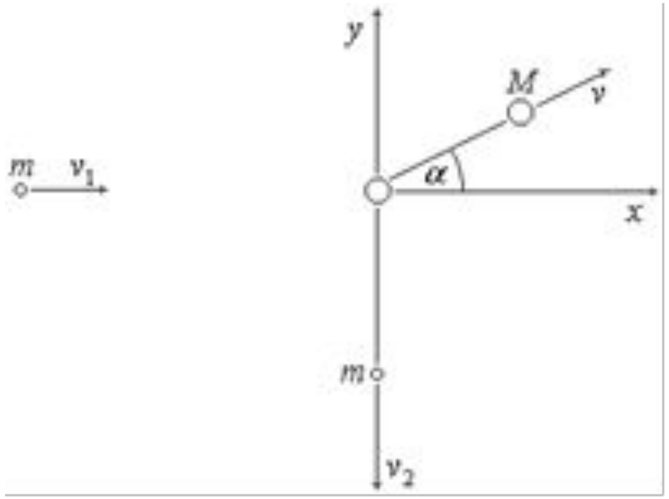
Задача

- . В этом случае закон сохранения энергии имеет вид
-
- $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}Mv^2.$



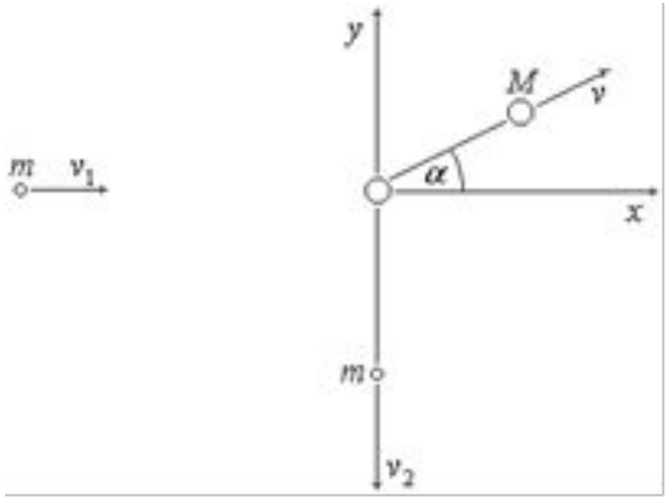
Задача

- Исключим из уравнений приведенной выше системы угол α, получим квадрат скорости частицы массой M:
-
- $v^2 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \left(v_1^2 + v_2^2\right).$



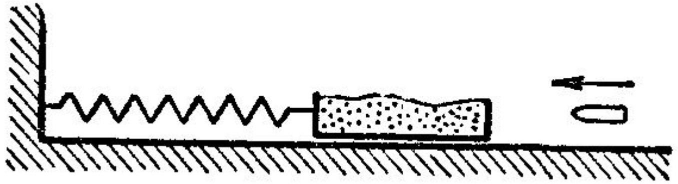
Задача

- Подставляя полученное выражение для v^2 в уравнение энергии, найдем искомую массу M:
-
  - $M = m\frac{v_1^2+v_2^2}{v_1^2-v_2^2}.$



Задача 2

146. Пуля попадает в ящик с песком и застревает в нем (рис. 58). На сколько сожмется пружина жесткостью c, удерживающая ящик, если пуля имеет массу m и движется со скоростью v, а масса ящика с песком равна M?



Задача 2

146. Скорость ящика с застрявшей пулей $u = \frac{mv}{M+m}$, а его кинетическая энергия

$$T = \frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2(M+m)}.$$

Поскольку потенциальная энергия сжатой пружины будет иметь такую же величину, то

$$\frac{cs^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2(M+m)},$$

откуда

$$s = \frac{mv}{\sqrt{(M+m)c}}.$$

Задача 3

148. Тележка массой M стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 60). На тележке укреплен математический маятник, имеющий массу m и длину l. В начальный момент тележка и маятник имели скорость, равную нулю, и нить маятника образовывала угол α с вертикалью. Найти скорость тележки в момент, когда маятник будет проходить через вертикальное положение. (Колеса тележки считать не имеющими массы.)

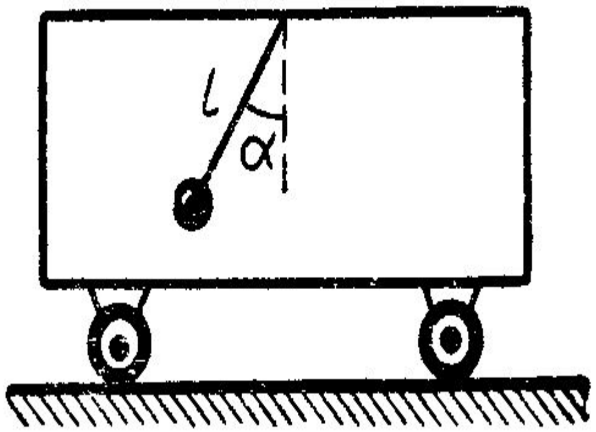


Рис. 60

Задача 3

148. Так как все внешние силы вертикальны, то

$$mu - Mv = 0, \quad u = \frac{Mv}{m},$$

где u и v — скорости маятника и тележки в момент, когда маятник проходит через вертикальное положение. (Здесь учтено, что тележка будет в этот момент двигаться влево.) Согласно закону сохранения энергии

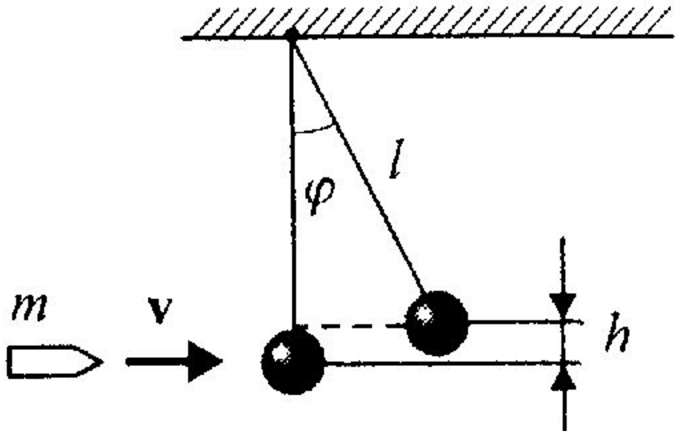
$$\frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = mgl\,(1 - \cos\alpha).$$

Подставив сюда $u = \frac{Mv}{m}$ и решив полученное уравнение, найдем:

$$v = \frac{2m\sqrt{gl}}{\sqrt{M\,(M+m)}} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Задача 4

1.115 Пуля массой $m = 15$ г, летящая горизонтально со скорос
$\upsilon = 200$ м/с, попадает в баллистический маятник длиной $l = 1$
массой $M = 1{,}5$ кг и застревает в нем. Определите угол отклонения φ маятн

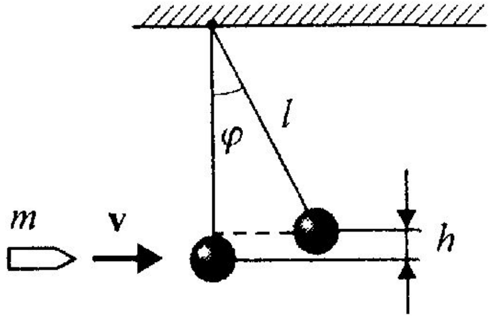


Задача 4

Дано	Решение
$m = 15$ г $= 15 \cdot 10^{-3}$ кг $\upsilon = 200$ м/с $l = 1$ м $M = 1{,}5$ кг φ — ?	$m\upsilon = (m + M)u$, $u = \dfrac{m\upsilon}{m + M}$, $\dfrac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)gh$,

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(m\upsilon)^2}{2g(m + M)^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{l - h}{l} = 1 - \frac{h}{l},$$



$$\cos\varphi = 1 - \frac{(m\upsilon)^2}{2gl(m + M)^2}, \qquad \varphi = \arccos\left[1 - \frac{(m\upsilon)^2}{2gl(m + M)^2}\right]$$

До следующей лекции