

Алгебраические методы решения прикладных задач на экстремум

***Материал к внеклассным занятиям по
математике в 10-12 классах***

***Учитель ГБОУ Центра образования № 55
Валентина Васильевна Николаева***

Алгебраические методы решения прикладных задач на экстремум

В технике и естествознании, как, впрочем, и в обыденной жизни, встречается особый вид задач – задач на «максимум и минимум».

Люди издавна желали получить наибольшую выгоду при наименьших затратах.

*Огромное число таких задач возникает в экономике и технике. Бурное развитие экономики и техники привело к новой теории – **теории оптимального управления**.*

В математике эти задачи называют задачами на экстремум. Исследование задач на экстремум началось 25 веков назад.

С возникновением математического анализа были созданы общие методы их решения.

Метод, основанный на теореме о произведении двух сомножителей, сумма которых постоянна

Теорема

Произведение двух множителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве множителей:

$$a + b = \text{const} \Rightarrow a \cdot b$$

max при

$$a = b$$

Пример 1 решения задач на экстремум

Из квадратного листа картона с заданной стороной нужно изготовить квадратную коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая образовавшиеся края.

Какой величины должна быть сторона каждого вырезанного квадрата, чтобы объем сделанной коробки был наибольшим?

Пример 1 решения задач на экстремум

Решение

Пусть x – сторона вырезаемого квадрата. a

Тогда объем коробки: $V = x(a - 2x)(a - 2x)$

Вырезается 4 угла. Но величина $4V$ достигает максимума при тех же значениях x , что и V .

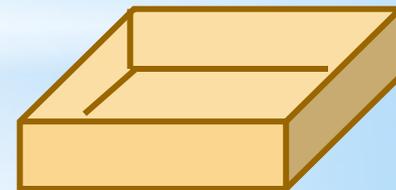
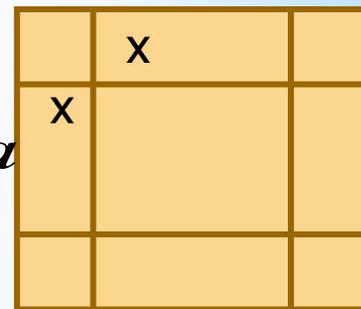
Поэтому $4V = 4x(a - 2x)(a - 2x)$

По **теореме** произведение множителей, сумма которых

$$4x + a - 2x + a - 2x = 2a = const$$

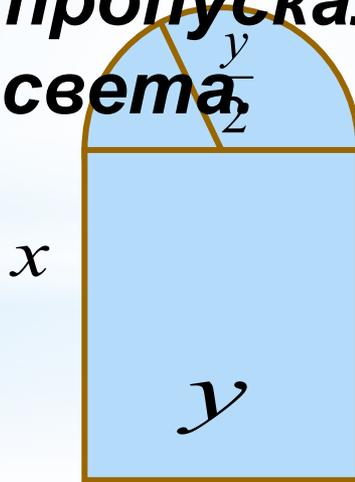
достигает максимума при $4x = a - 2x = a - 2x$

откуда $x = \frac{a}{6}$



Пример 2 решения задач на экстремум

Окно имеет форму прямоугольника, завершеного полукругом. При заданном периметре найти размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света.



Пример 2 решения задач на экстремум

Решение

Пусть x – высота окна до полукруга, y – ширина, тогда $R = y/2$. $P = \text{const}$,

$$P = 2x + y + \frac{\pi y}{2} \quad \text{Откуда: } x = \frac{2P - 2y - \pi y}{4}, \quad S = xy + \frac{\pi(\frac{y}{2})^2}{2} = y(4P - y(4 + \pi))$$

Функция $S(x)$ имеет экстремум в тех же точках что и $(4 + \pi) S(x)$.

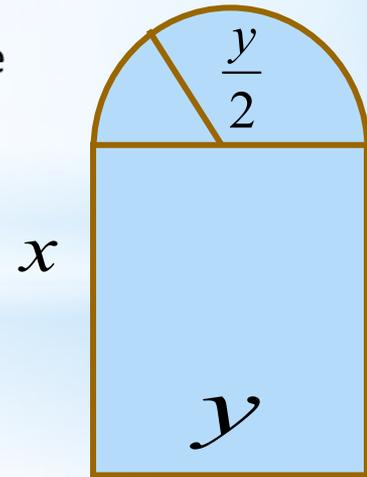
По **теореме**, если $4P = \text{const}$, то произведение $(4 + \pi) \cdot y(4\pi - y(4 + \pi))$ имеет наибольшее значение при $(4 + \pi) \cdot y = (4\pi - y(4 + \pi))$

Поэтому:

$$y = \frac{2P}{4 + \pi} \text{ (ширина),}$$

$$R = \frac{P}{4 + \pi} \text{ (радиус),}$$

$$x = \frac{P}{4 + \pi} \text{ (длина)}$$



Метод, основанный на теореме о сумме

2-х положительных слагаемых,
произведение которых постоянно

Теорема

Сумма двух положительных
слагаемых, произведение которых
постоянно, имеет наименьшее значение
при равных слагаемых

$$a \cdot b = \text{const} \Rightarrow a + b - \min$$

$$a = b$$

при

Пример 3 решения задач на экстремум

Из всех равнобедренных треугольников данной площади, найти тот, у которого сумма основания и медианы была бы наименьшей.

Решение:

Пусть основание искомого треугольника $2x$, а медиана y .

Тогда $S = \frac{2xy}{2} = xy$. Сумма $(2x+y)$ достигает наименьшего

значения при $2x=y$, т.к. $2xy=2S = \text{const}$.

Поэтому

$$S = 2x^2$$
$$2x = 2\sqrt{\frac{S}{2}} \quad y = \sqrt{2S}, b = \sqrt{\frac{5S}{2}}$$

