Алгебраические методы решения прикладных задач на экстремум

Материал к внеклассным занятиям по математике в 10-12 классах

Учитель ГБОУ Центра образования № 55
Валентина Васильевна Николаева

Алгебраические методы решения прикладных задач на экстремум

В технике и естествознании, как, впрочем, и в обыденной жизни, встречается особый вид задач – задач на «максимум и минимум».

Люди издавна желали получить наибольшую выгоду при наименьших затратах.

Огромное число таких задач возникает в экономике и технике. Бурное развитие экономики и техники привело к новой теории – **теории оптимального управления**.

В математике эти задачи называют задачами на экстремум. Исследование задач на экстремум началось 25 веков назад.

С возникновением математического анализа были созданы общие методы их решения.

Метод, основанный на теореме о произведении двух сомножителей, сумма которых постоянна

Теорема

Произведение двух множителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве множителей:

$$a + b = const \Rightarrow a \cdot b$$

max при

$$a = b$$

Пример 1 решения задач на экстремум

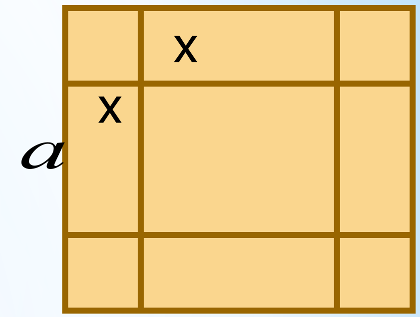
Из квадратного листа картона с заданной стороной нужно изготовить квадратную коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая образовавшиеся края.

Какой величины должна быть сторона каждого вырезанного квадрата, чтобы объем сделанной коробки был наибольшим?

Пример 1 решения задач на экстремум

Решение

Пусть **x** – сторона вырезаемого квадрата.



Тогда объем коробки: $V = x(a-2x)(a-2x)$

Вырезается 4 угла. Но величина **4V** достигает максимума при тех же значениях **x**, что и **V**.

Поэтому $4V = 4x(a-2x)(a-2x)$

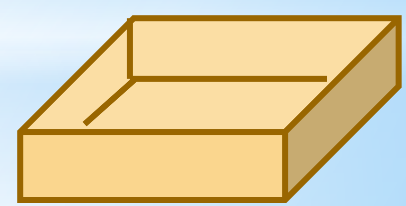
По **теореме** произведение множителей, сумма которых

$$4x + a - 2x + a - 2x = 2a = const$$

$$4x = a - 2x = a - 2x$$

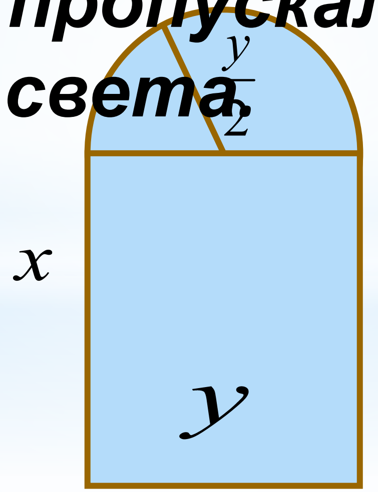
достигает максимума при

откуда $x = \frac{a}{6}$



Пример 2 решения задач на экстремум

Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. При заданном периметре найти размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света.



Пример 2 решения задач на экстремум

Решение

Пусть ***x*** – высота окна до полукруга, ***y*** –ширина, тогда R= ***y*** /2. P - const,

$$P = 2x + y + \frac{\pi y}{2} \quad \text{Откуда:} \quad x = \frac{2P - 2y - \pi y}{4}, \quad S = xy + \frac{\pi(\frac{y}{2})^2}{2} = y(4P - y(4+\pi))$$

Функция S(x) имеет экстремум в тех же точках что и (4 + π) S(x).

По ***теореме***, если 4P- const, то произведение

$(4+\pi)\cdot y(4\pi - y(4+\pi))$ имеет наибольшее значение

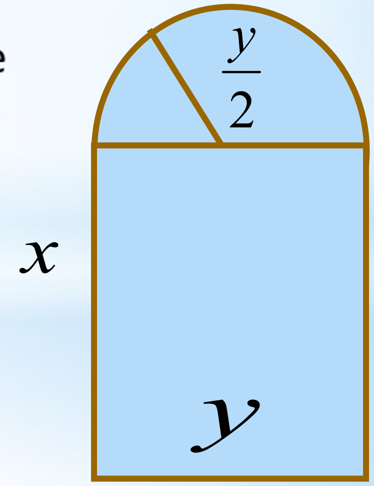
при $(4+\pi)\cdot y = (4\pi - y(4+\pi))$

Поэтому:

$$y = \frac{2P}{4+\pi}(\text{ширина}),$$

$$R = \frac{P}{4+\pi}(\text{радиус}),$$

$$x = \frac{P}{4+\pi}(\text{длина})$$



Метод, основанный на теореме о сумме 2-х положительных слагаемых, произведение которых постоянно

Теорема

Сумма двух положительных слагаемых, произведение которых постоянно, имеет наименьшее значение при равных слагаемых.

$$a \cdot b = const \Rightarrow a + b - \min$$

$$a = b$$

при

Пример 3 решения задач на экстремум

Из всех равнобедренных треугольников данной площади, найти тот, у которого сумма основания и медианы была бы наименьшей.

Решение:

Пусть основание искомого треугольника 2*x*, а медиана *y*.

Тогда $S = \frac{2xy}{2} = xy$. Сумма (2x+y) достигает наименьшего значения при 2x=y, т.к. 2xy=2S= const.

Поэтому $S = 2x^2$

$$2x = 2\sqrt{\frac{S}{2}} \qquad y = \sqrt{2S}, b = \sqrt{\frac{5S}{2}}$$