Лекция №14

Интегралы, зависящие от параметров

1^0. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Если функция двух переменных $f(x,t)$ непрерывна на прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant t \leqslant d$, то *интеграл* $I(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$, *зависящий от параметра* t, есть непрерывная функция переменной t на отрезке $[c;d]$.

Следовательно,

$$\lim_{t\to t_0} I(t) = \lim_{t\to t_0} \int\limits_a^b f(x,t)dx = \int\limits_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t)dt = \int\limits_a^b f(x,t_0)dx. \qquad (1)$$

При этом если функция $f'_t(x,t)$ также непрерывна в этом прямоугольнике, то функция $I(t)$ дифференцируема и справедлива формула

$$I'(t) = \left(\int\limits_a^b f(x,t)dx\right)'_t = \int\limits_a^b f'_t(x,t)dx, \qquad (2)$$

т.е. производная по параметру от интеграла, зависящего от этого параметра, равна интегралу от производной подынтегральной функции по параметру.

При вычислении производной $f'_t(x,t)$ по параметру t считаем x постоянной.

Если пределы интегрирования также являются дифференцируемыми функциями параметра t, то формула (2) принимает вид

$$I'(t) = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} f'_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t) \qquad (3)$$

Если функция $f(x,t)$ непрерывна в заданном прямоугольнике, то имеет место формула интегрирования

$$\begin{aligned}\int\limits_c^d I(t)dt = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,t)dx\right) dt = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,t)dt\right) dx = \\ = \int\limits_c^d dt \int\limits_a^b f(x,t)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,t)dt.\end{aligned} \tag{4}$$

Пример 1. Вычислить интегралы, зависящие от параметра t:

$$1)\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+t^2}}; \qquad 2)\ \int\limits_0^1 (x^2+tx)dx.$$

Решение. Находим заданные интегралы, считая параметр t произвольной постоянной:

$$1)\ I(t) = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+t^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+t^2}\right|\Big|_0^2 = \ln\left|2+\sqrt{4+t^2}\right| - \ln|t|.$$

$$2)\ I(t) = \int\limits_0^1 (x^2+tx)dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{tx^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{t}{2}. \ \square$$

Вычисление пределов

Пример 2. Найти пределы:

$$1)\ \lim_{t\to 0}\int_0^3 x^2\cos xt\,dx;\quad 2)\ \lim_{t\to 0}\int_{-2}^{2}\sqrt{x^2+t^2}\,dx;\quad 3)\ \lim_{t\to 0}\int_{-(t+1)}^{t+4}\frac{dx}{1+x^2+t^2}.$$

Решение. 1) В силу непрерывности подынтегральной функции, согласно формуле (1), будем иметь:

$$\lim_{t\to 0}\int_0^3 x^2\cos xt\,dx=\int_0^3\lim_{t\to 0}(x^2\cos xt)\,dx=\int_0^3 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=9.$$

2) Так как функция $\sqrt{x^2+t^2}$ непрерывна для любых $x\in\mathbb{R}$ и $t\in\mathbb{R}$, то по формуле (1) получаем

$$\lim_{t\to 0}\int_{-2}^{2}\sqrt{x^2+t^2}\,dx=\int_{-2}^{2}\lim_{t\to 0}\sqrt{x^2+t^2}\,dx=\int_{-2}^{2}|x|\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{2}=4.$$

Вычисление пределов

3) Так как пределы интегрирования, а также подынтегральная функция непрерывны при любых значениях своих аргументов, то, применяя формулу (1), получим

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{-(t+1)}^{t+4}\frac{dx}{1+x^2+t^2}=\int\limits_{-1}^{4}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{4}=\operatorname{arctg}4+\frac{\pi}{4}.\ \square$$

Вычисление производных

Пример 3. Найти производную функции

$$1)\ I(t)=\int_0^1 \operatorname{arcctg}\frac{x}{t}dx,\ t>0; \qquad 2)\ I(t)=\int_{t^2}^{\cos t}\ln(x+t)dx;$$

$$3)\ I(t)=\int_{t^2}^{1+t^2}\frac{\cos tx}{x}dx.$$

Решение. 1) Подынтегральная функция непрерывна для любого $x\in[0;1]$ и $t\in(0;+\infty)$. По формуле (2) будем иметь:

$$I'(t)=-\int_0^1 \frac{1}{\frac{x^2}{t^2}+1}\cdot\left(-\frac{x}{t^2}\right)dx=\int_0^1\frac{xdx}{x^2+t^2}=$$

Вычисление производных

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+t^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln(1+t^2)-\ln t^2) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{t^2}.$$

2) Здесь и пределы интегрирования зависят от параметра t. По формуле (3) получаем

$$I'(t) = \int\limits_{t^2}^{\cos t}\frac{dx}{x+t} + \ln(\cos t + t)(-\sin t) - \ln(t^2+t)\cdot 2t =$$

$$= \ln(x+t)\Big|_{x=t^2}^{x=\cos t} - \sin t\cdot\ln(\cos t+t) - 2t\ln(t^2+t) =$$

$$= \ln(\cos t+t) - \ln(t^2+t) - \sin t\cdot\ln(\cos t+t) - 2t\ln(t^2+t) =$$

$$= (1-\sin t)\ln(\cos t+t) - (1+2t)\ln(t^2+t).$$

Применение дифференцирования по параметру

Пример 4. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интегралы: 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+t^2)^2}$; 2) $I(t) = \int\limits_0^t \frac{\ln(xt+1)}{x^2+1}dx$.

Решение. 1) Функция $f(x,t)$ и ее производная $f'_t(x,t)$ непрерывна на $\mathbb{R}^2$. Имеем $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+t^2} = \frac{1}{t} arctg \frac{1}{t}$. Дифференцируя это равенство по параметру t, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{-2tdx}{(x^2+t^2)^2} = -\frac{1}{t^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{t} - \frac{1}{t(1+t^2)}.$$

Применение дифференцирования по параметру

Отсюда находим $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+t^2)^2} = \frac{1}{2t^3}\operatorname{arctg}\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2(t^2+1)}$.

Заметим, что продолжая дифференцирование по параметру t, можно вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+t^2)^3}$, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+t^2)^4}$ и т.д.

Применение интегрирования по параметру

Пример 5. Проинтегрировать по параметру t заданный интеграл: $I(t)=\int\limits_a^b t^x\,dx, (0<a<b)$ в пределах от 0 до 1.

Решение. Используя формулу (4), получим

$$\int\limits_0^1 I(t)dt=\int\limits_0^1\left(\int\limits_a^b t^x dx\right)dt=\int\limits_0^1\frac{t^b-t^a}{\ln t}dt.$$

Полученный интеграл не вычисляется с помощью первообразной. Воспользуемся другой частью формулы (4):

$$\int\limits_0^1 I(t)dt=\int\limits_a^b\left(\int\limits_0^1 t^x dt\right)dx=\int\limits_a^b \left.\frac{t^{x+1}}{x+1}\right|_0^1 dx=$$

Применение интегрирования по параметру

Пример 6. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить: $I = \int\limits_0^1 \cos(\ln\frac{1}{x})\frac{x}{\ln x}(x-1)dx$.

Решение. Имеем $I = -\int\limits_0^1 \cos\ln x \cdot \frac{x^2-x}{\ln x}dx$.

Заметим, что $\frac{x^2-x}{\ln x} = \int\limits_1^2 x^t dt$ (см. пример 5).

Применение интегрирования по параметру

Тогда в соответствии с формулой (4) искомый интеграл I принимает вид:

$$I = -\int_0^1 \cos\ln x \left(\int_1^2 x^t dt\right) dx = -\int_1^2 dt \int_0^1 x^t \cos\ln x dx. \qquad (5)$$

Вычислим в формуле (5) внутренний несобственный интеграл второго рода, пользуясь формулой интегрирования по частям. Положим, $u = \cos\ln x$, $dv = x^t dx$, тогда

$$du = \frac{-\sin\ln x}{x} dx, \qquad v = \frac{x^{t+1}}{t+1}.$$

Задание: Досчитать интеграл, применяя предложенный метод интегрирования по частям и данные предыдущего примера.

Несобственные интегралы, зависящие от параметров

Несобственный интеграл, зависящий от параметра t, т.е.

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)dx, \qquad (6)$$

где функция $f(x,t)$ непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant t \leqslant d$, называется *равномерно сходящимся на промежутке* $[c;d]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B = B(\varepsilon)$, что при всяком $b \geqslant B(\varepsilon)$ $\left| \int_b^{+\infty} f(x,t)dx \right| < \varepsilon$ при любом $t \in [c;d]$.

Если интеграл (6) сходится равномерно в промежутке $[c;d]$, то он представляет собой непрерывную функцию в этом промежутке.

Аналогично определяется равномерная сходимость несобственного интеграла от неограниченной функции, зависящего от параметра.

На практике удобным для исследования несобственных интегралов на равномерную сходимость является следующее утверждение.

Несобственные интегралы, зависящие от параметров

Признак Вейерштрасса. Для равномерной сходимости интеграла (6) достаточно, чтобы существовала такая функция $F(x)$, не зависящая от параметра t, что:

1) $|f(x,t)| \leqslant F(x)$, если $a \leqslant x < +\infty$,

2) $\int\limits_a^{+\infty} F(x)dx < +\infty$.

Функцию $F(x)$ называют *мажорантной* для $f(x,t)$.

Для дифференцирования по параметру несобственного интеграла (6) при непрерывной $f(x,t)$ вместе с производной $f_t'(x,t)$ необходимо, чтобы интеграл (6) сходился, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f_t'(x,t)dx$ сходился равномерно по t в промежутке $[c;d]$. Тогда справедлива формула (*формула Лейбница*) $I'(t) = \int\limits_a^{+\infty} f_t'(x,t)dx$, аналогичная формуле (2).

При выполнении соответствующих условий формула Лейбница остается верной и для зависящих от параметров несобственных интегралов от неограниченных функций.

Несобственные интегралы, зависящие от параметров

Если в (6) функция $f(x,t)$ непрерывна и интеграл $I(t)$ сходится равномерно по t в промежутке $[c;d]$, то имеет место формула интегрирования

$$\int_c^d I(t)dt = \int_c^d dt \int_a^\infty f(x,t)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,t)dt \tag{7}$$

Пример 7. Исследовать на равномерную сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx,\ 0 < t_0 < +\infty; \qquad 2) \int_1^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2} dx;$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4 + 2x + x^2 + t^2}.$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметров, признак Вейерштрасса

Решение. 1) В качестве мажорантной функции возьмем $F(x) = e^{-xt_0}$. Действительно, если $t > t_0$, то $|e^{-xt} \sin x| \leqslant e^{-xt} \leqslant \leqslant e^{-xt_0}$. К тому же $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt_0} dx = -\frac{1}{t_0} e^{-xt_0} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{t_0}$.

Значит, согласно признаку Вейерштрасса, заданный интеграл равномерно сходится.

2) Этот интеграл равномерно сходится, так как

$$\left| \frac{\cos tx}{x^2} \right| \leqslant \frac{1}{x^2}, \qquad \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 < \infty.$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметров, различные задачи

Пример 8. Вычислить:

1) $I(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+t)^3}, t > 0;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} dx;$

4) $I(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (интеграл Эйлера-Пуссона);

5) $I(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos tx dx$ (интеграл Пуссона);

Несобственные интегралы, зависящие от параметров, различные задачи

Решение. 1) Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{t}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Дифференцируя по параметру t, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+t)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2t^{\frac{3}{2}}}.$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметров, различные задачи

Дифференцируя последнее равенство, будем иметь

$$-2\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+t)^3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi\cdot 3}{2t^{\frac{5}{2}}}.$$

Откуда $I(t)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+t)^3}=\frac{3\pi}{16t^2\sqrt{t}}$.

2) Рассмотрим интеграл, зависящий от параметра

$$I(t)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-tx}dx=\frac{e^{-tx}}{-t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{t}\ (t>0). \qquad (8)$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметров, различные задачи

Этот интеграл равномерно сходится на любом промежутке $c \leqslant t \leqslant d$, где $0 < c < d < \infty$, так как на таком промежутке $e^{-tx} \leqslant e^{-cx}$, а $\int\limits_0^{+\infty} e^{-cx}dx < \infty$. Дифференцируя по параметру t, последовательно получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} (-x)e^{-tx}dx = (-1)t^{-2},$$

$$\int\limits_0^{+\infty} (-x)^2 e^{-tx}dx = (-1)(-2)t^{-3}, \ldots,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} (-x)^n e^{-tx}dx = (-1)(-2)\ldots(-n)t^{-(n+1)}.$$

Сокращая на $(-1)^n$, при $t = 1$ будем иметь $\int\limits^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!$.