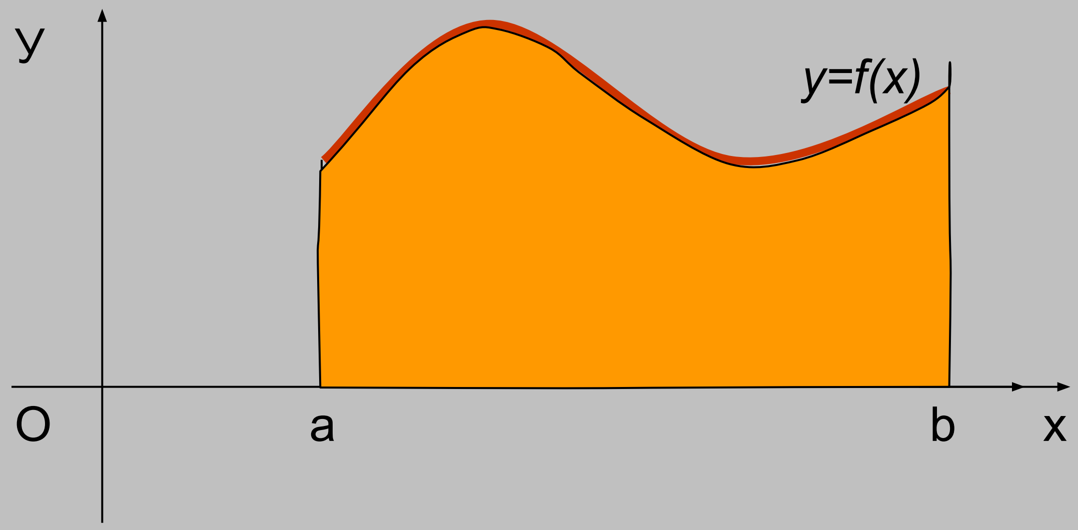
Вычисление объемов тел вращения

Применение интеграла

11 класс

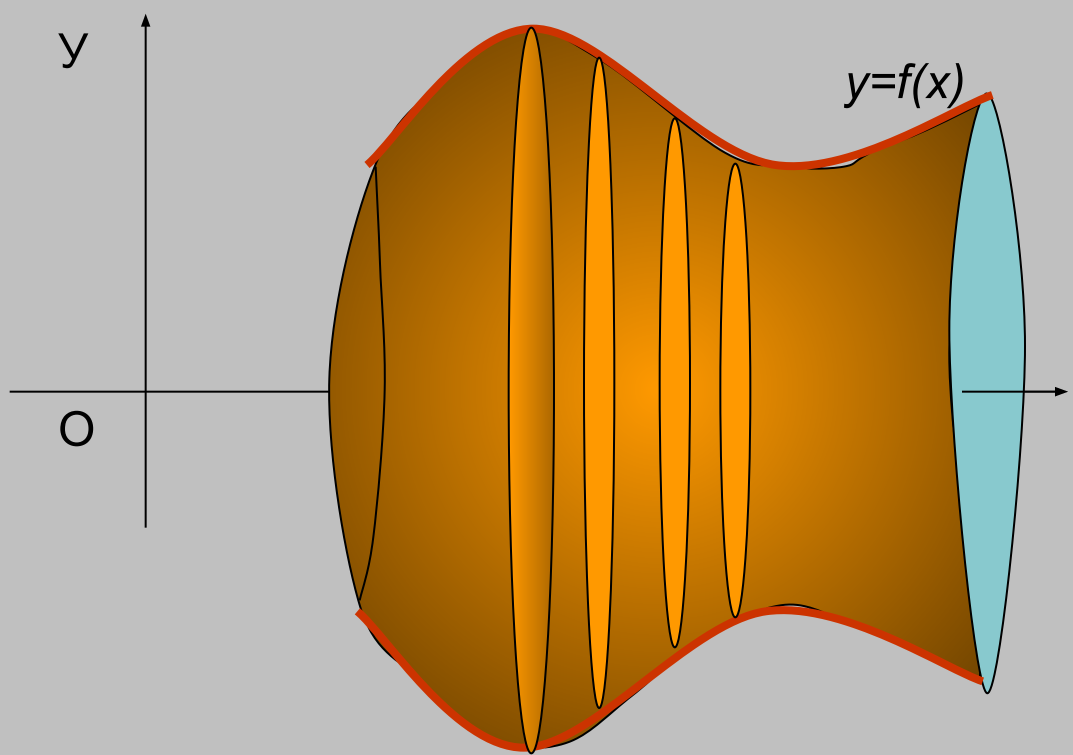
Постановка задачи



Пусть функция y = f(x) определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке [a; b],
тогда график кривой $y=f(x)$ на [a; b], ось ОХ, прямые x = a, x = b образуют криволинейную трапецию.

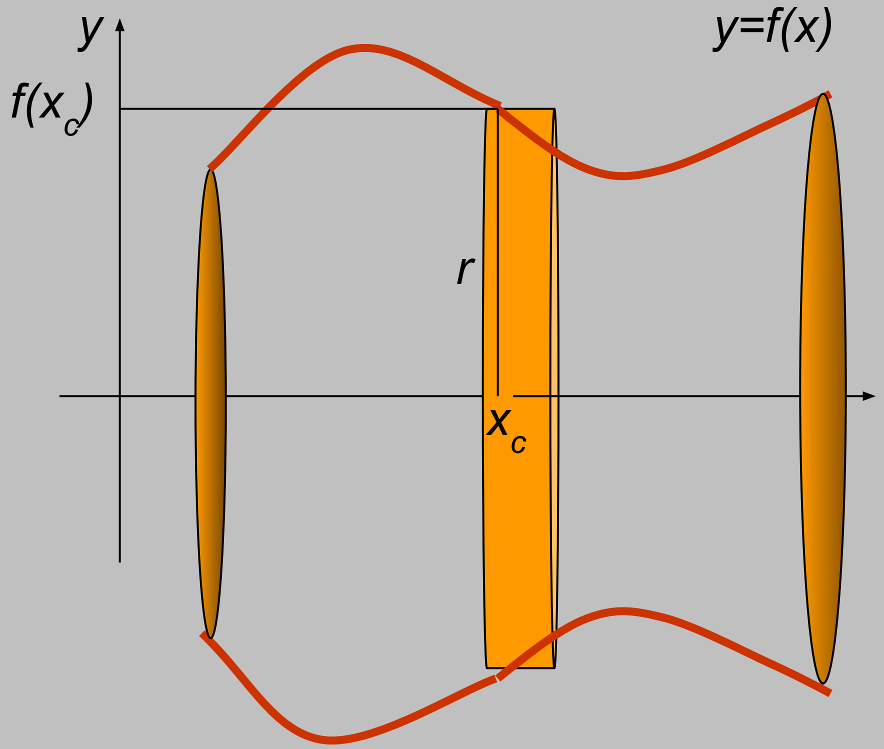
Рассмотрим тело, образованное вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси ОХ и найдем его объем.

Разобьем отрезок [a;b] на n частей произвольным образом, через каждую точку деления проведем плоскость, перпендикулярную к оси OX и найдём площади полученных поперечных сечений.



Очевидно, что любое поперечное сечение тела вращения – круг. Радиус круга равен значению функции в x_c
Площадь этого круга – $S(x) = \pi \cdot f^2(x_c)$

Построим на каждом промежутке цилиндрическое тело, образующая которого параллельна оси OX,
а основанием является сечение - круг.



Радиус круга равен значению функции в x_c
Площадь этого круга –

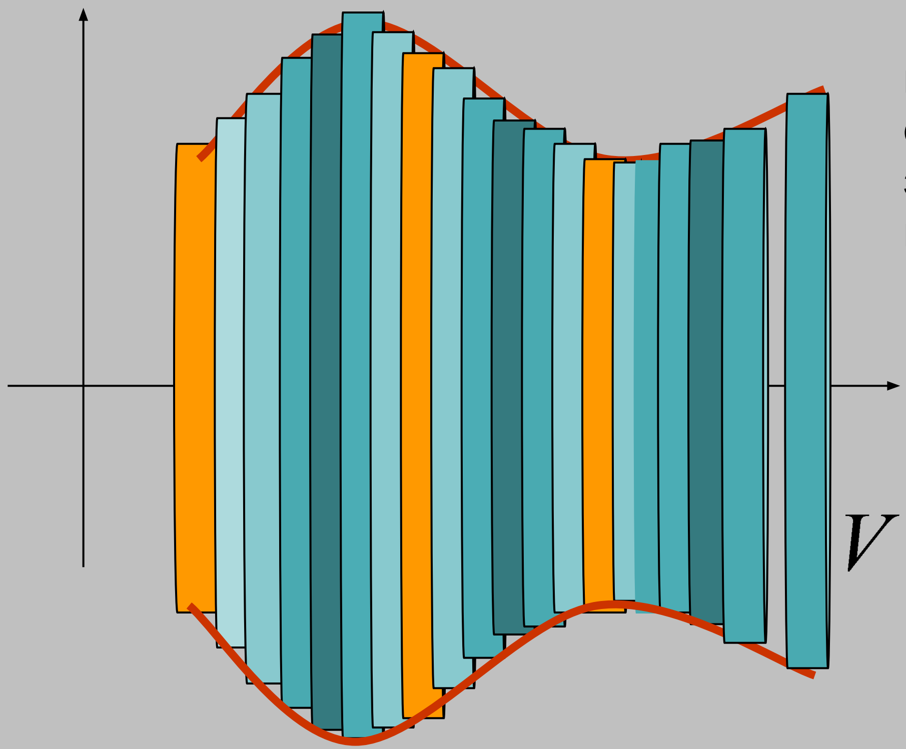
$$S(x) = \pi f^2 (x_c)$$

Объём цилиндра –

$$V=S(x)\cdot \Delta x$$

Объем каждого цилиндра с основанием S(x) и высотой Δx равен S(x)· Δx , а объем всего ступенчатого тела равен сумме объёмов всех цилиндров.

$$V_{CT} = \sum_{k=1}^{n} S(x_k) \cdot \Delta x_k$$



Предел полученной интегральной суммы, который существует в силу непрерывности функции S(x), при $n \to \infty$ называется объемом заданного тела и равен определенному интегралу:

$$V = \lim_{n \to \infty} V_{CT} = \int_a^b S(x) \partial x$$

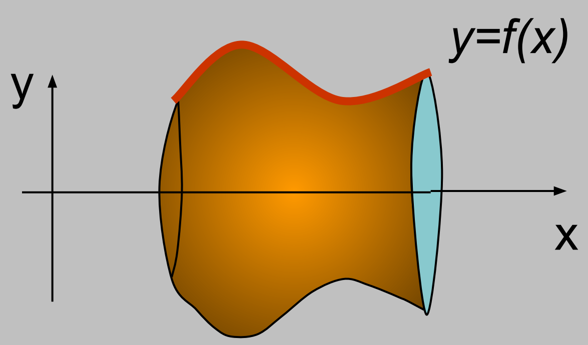
Предел полученной интегральной суммы, при n → ∞ равен определенному интегралу:

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x)\cdot\Delta x=\int_a^b S(x)\partial x$$

- Тогда объем тела вращения вокруг оси OX:

$$V=\int_a^b S(x)\partial x=\int_a^b \pi\cdot f^2(x)\partial x=\pi\int_a^b f^2(x)\partial x$$

- Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, образованной функцией y=*f(x)* на отрезке [a;b], вокруг оси OX, то его объём можно найти по формуле:



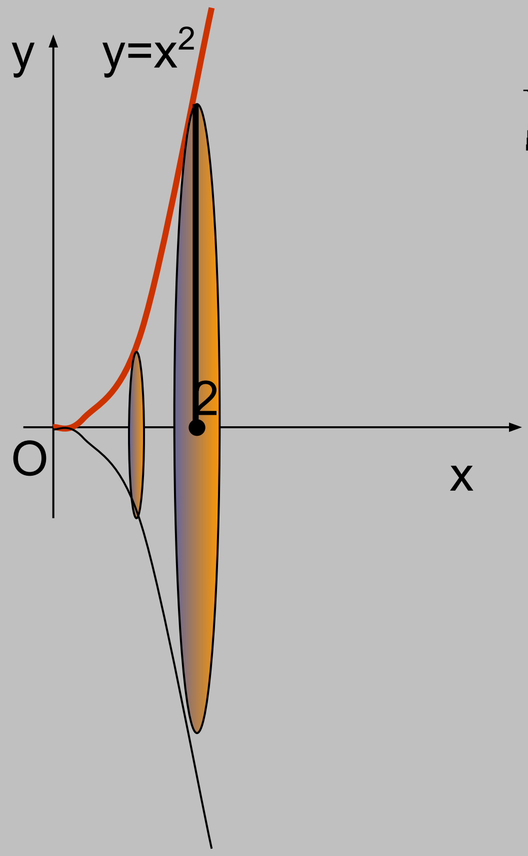
$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\partial x}$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x$$

Задача.

Пусть тело образовано вращением параболы $y=x^2$ на отрезке [0;2] вокруг оси OX.

Найдите объём тела вращения.



$$V = \int_0^2 S(x)\partial x = \int_0^2 \pi \cdot (x^2)^2 \partial x =$$

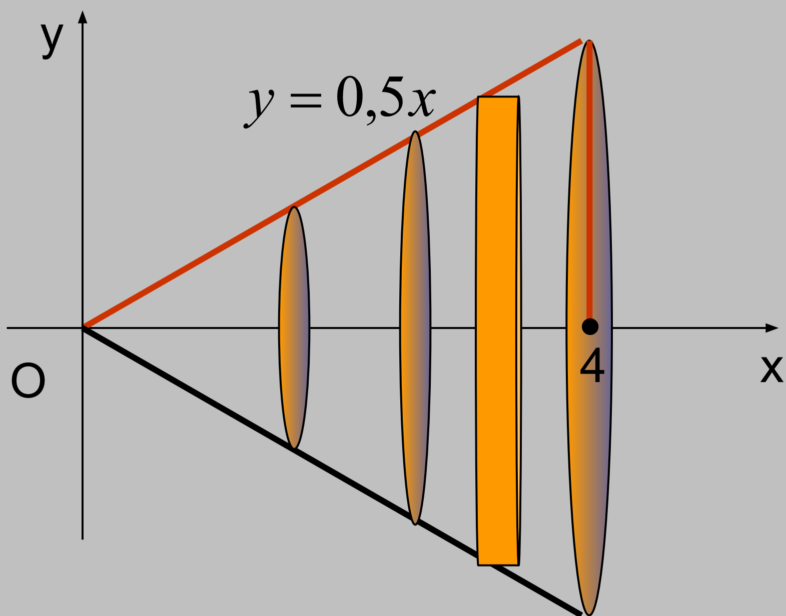
$$= \pi \int_0^2 x^4 \partial x = \pi \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = \frac{32\pi}{5} (куб.ед.)$$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\partial x$$

Задача.

Пусть тело образовано вращением функции y=0,5x на отрезке [0;4] вокруг оси OX.

Найдите объём тела вращения.



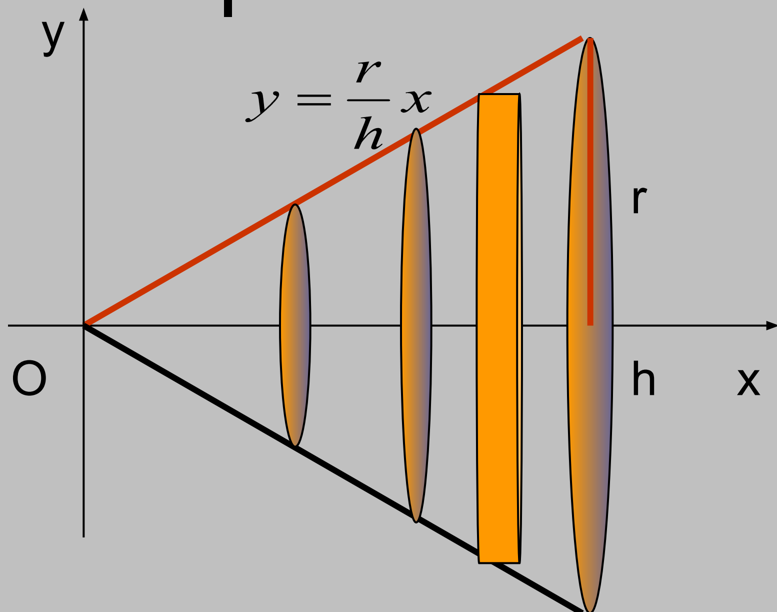
$$V=\pi\int_0^4 (0{,}5x)^2\partial x=$$

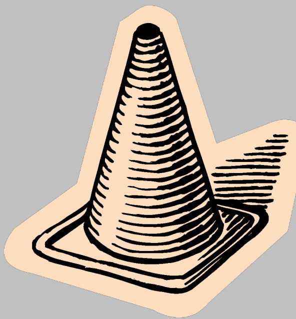
$$=\pi\cdot\frac{0{,}25x^3}{3}\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{16\pi}{3}(кв.ед.)$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x$$

Рассмотрим конус и найдём его объём



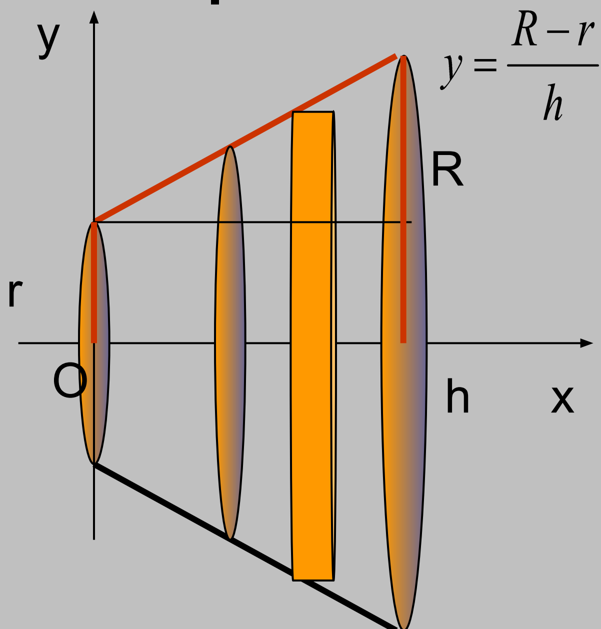


$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

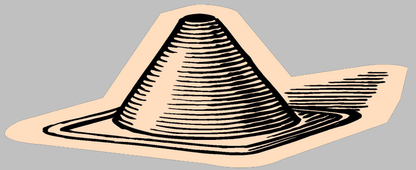
$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \partial x = \pi \cdot \frac{r^2 x^3}{h^2 \cdot 3}\Bigg|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x$$

Рассмотрим усечённый конус и найдём его объём



$$y = \frac{R-r}{h}x + r$$



$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r \right)^2 \partial x =$$

$$= \pi \cdot \frac{h}{R-r} \cdot \frac{\left(\frac{R-r}{h}x + r \right)^3}{\cdot 3} \Bigg|_0^h =$$

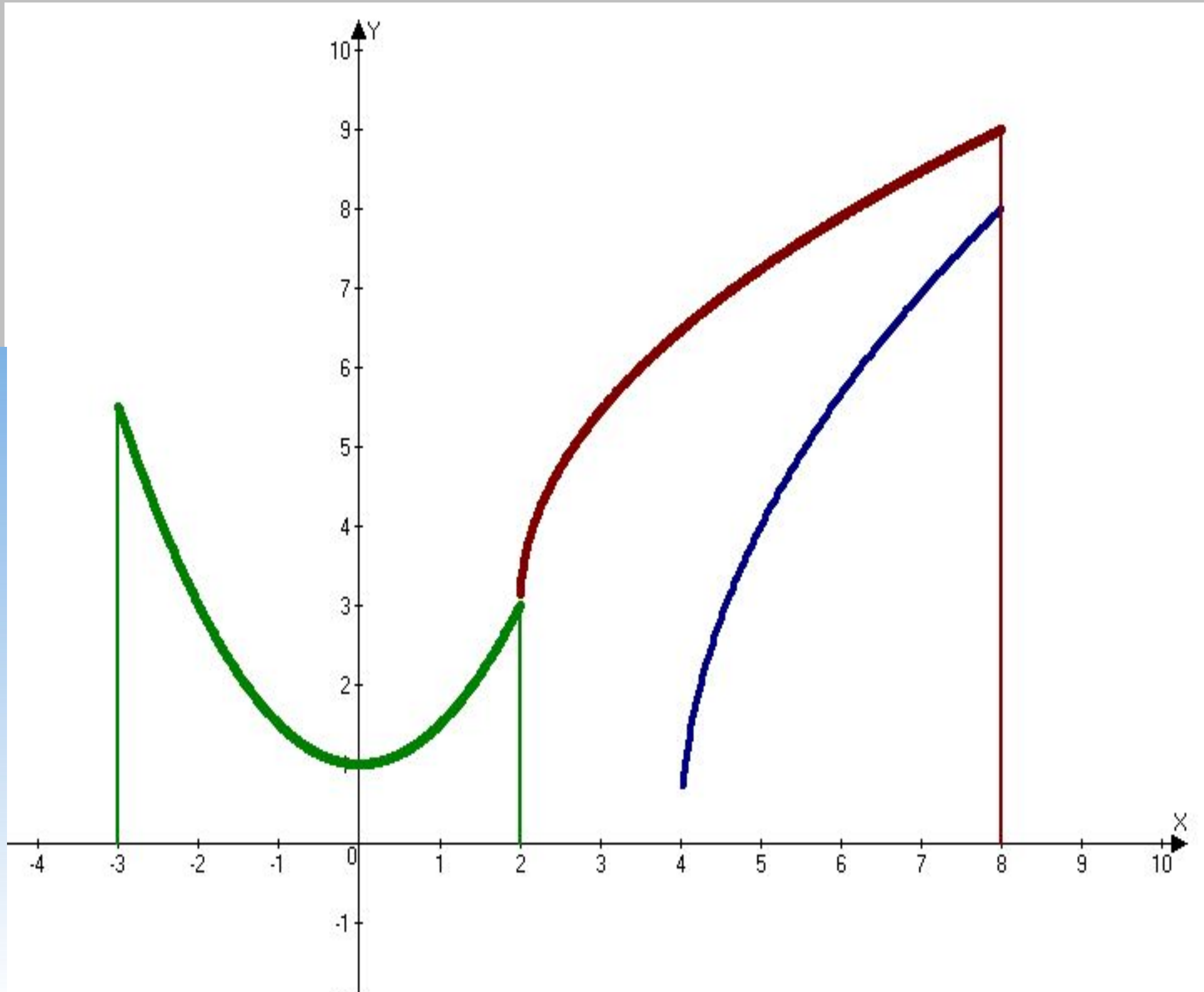
$$= \frac{\pi h}{3(R-r)}\left(R^3 - r^3\right) = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

*** Найдите объём тела, если его поверхность получена вращением фигуры образованной графиками функций:

$$y = 0{,}5x^2 + 1, \text{ на } [-3; 2]$$

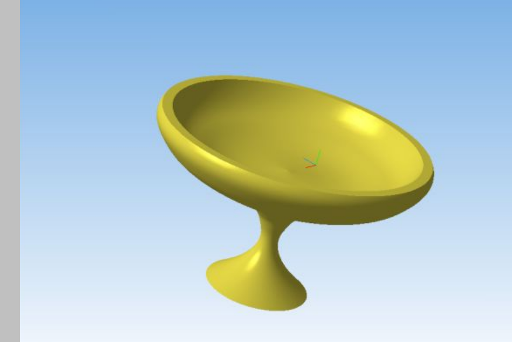
$$y = \sqrt{6x - 12} + 3, \text{ на } [2; 8]$$

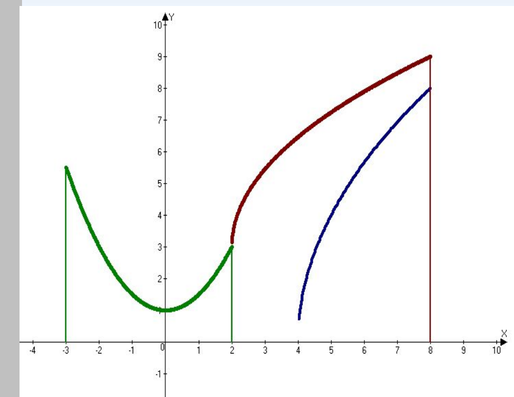
$$y = 4\sqrt{x - 4}, \text{ на } [4; 8]$$



Вычисление определённых интегралов

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x$$





$$V = V_{основания} + V_{чаши} - V_{выемки}$$

$$V_{основания} = \pi \int_{-3}^{2} \left(0{,}5x^2 + 1\right)^2 \partial x = \pi \int_{-3}^{2} (0{,}25x^4 + x^2 + 1)\partial x$$

$$= \pi \cdot 30\tfrac{5}{12}\,куб.ед.$$

$$V_{чаши} = \pi \int_{2}^{8} \left(\sqrt{6x-12} + 3\right)^2 \partial x = \pi \int_{2}^{8} (6x - 12 + 6\sqrt{6x-12} + 9)\partial x$$

$$= \pi \cdot 306\ куб.ед.$$

$$V_{выемки} = \pi \int_{4}^{8} \left(4\sqrt{4x-4}\right)^2 \partial x = \pi \int_{4}^{8} 16(4x-4)\partial x = \pi \cdot 128\,куб.ед.$$

$$V_{кубка} = 208\tfrac{5}{12}\pi \approx 654.4\,куб.ед$$

Объем наклонной призмы

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту

1. Треугольная призма

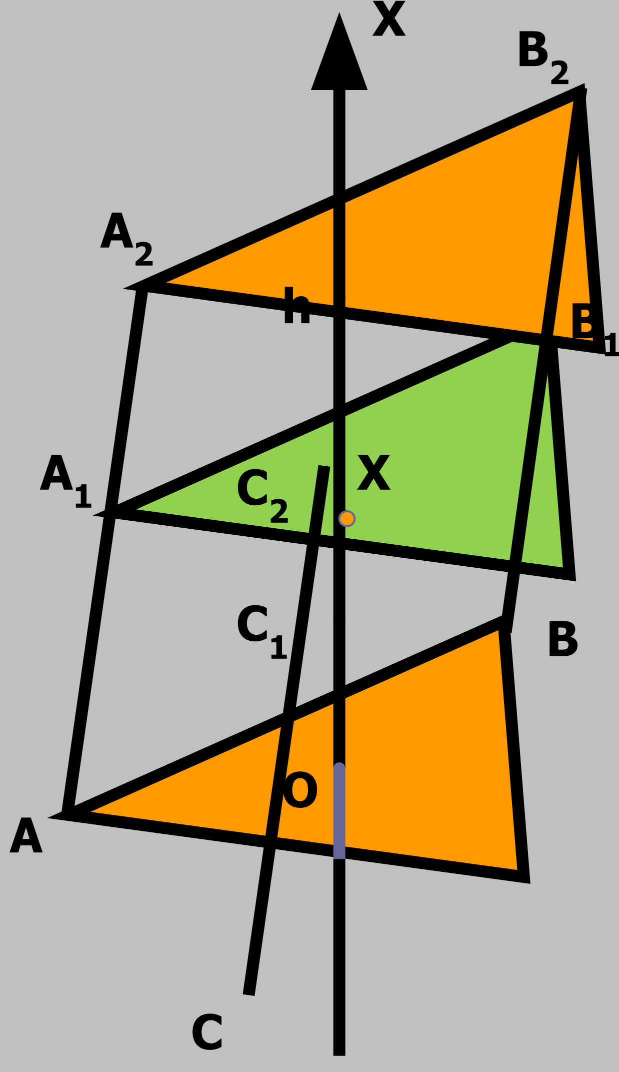
имеет S основания и высоту h.

$O = OX \cap (ABC)$; $OX \perp (ABC)$; $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$;

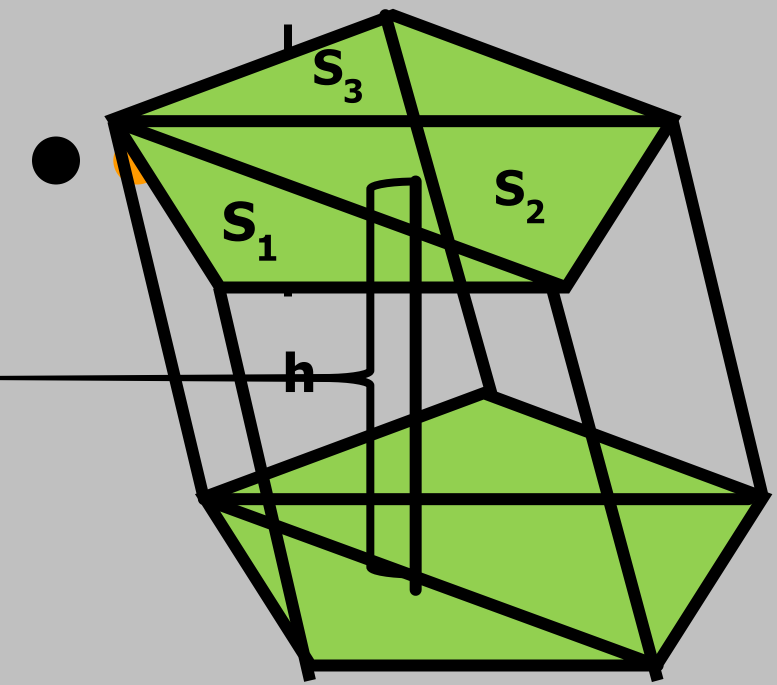
$(A_1B_1C_1)$-плоскость сечения: $(A_1B_1C_1) \perp OX$

S(x)-площадь сечения; S=S(x), т.к.

$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$($AA_1C_1C$-параллелограмм→AC=A1C1,$BC = B_1C_1$, $AB = A_1B_1$)



$$v = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h S dx = S\int_0^h dx = Sx\Big|_0^h = S*h$$



2. Наклонная призма с многоугольником в основании

$V=V_1+V_2+V_3=$

$=S_1*h+S_2*h+S_3*h=$

$=h(S_1+S_2+S_3)=S*h$

Объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ребру сечения

№ 676 Найти объем наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10см,10см,12см, а боковое ребро равное 8см, составляет с плоскостью основания угол 60^0

Дано: $ABCA_1B_1C_1$- наклонная прямая призма. $<B_1BK=60^0$, $BC=10$см, $AB=10$см, $AC=12$см, $BB_1=8$см.

Найти: $V_{призмы}=?$

Решение:

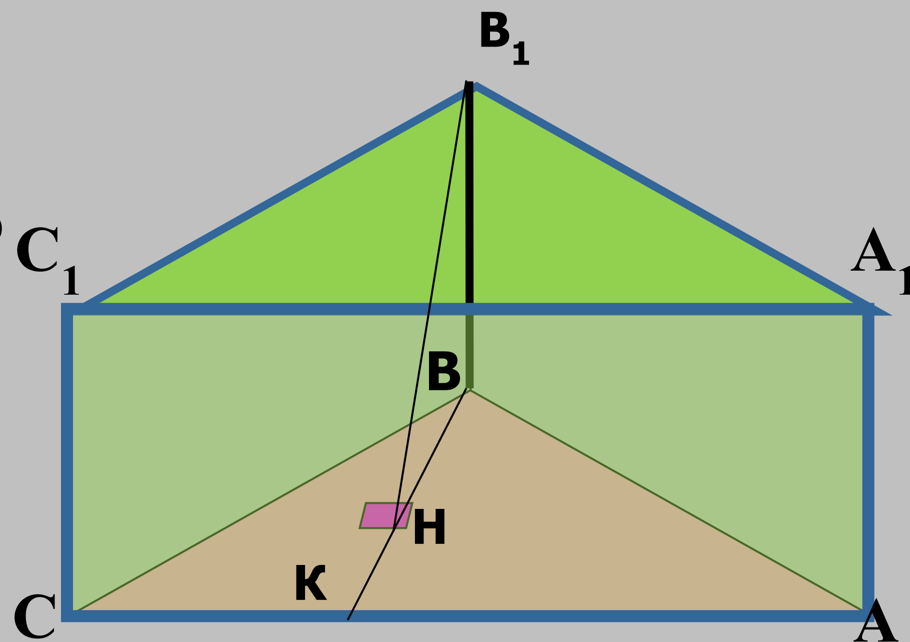
$\mathbf{V= S_{ABC*}\, h}$, $S_{осн.}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - формула Герона

$S_{осн.}=\sqrt{16*6*4*6} = 4*2*6 = 48$ (см^2)

Треугольник BB_1H- прямоугольный,

так как B_1H –высота $B_1H=BB_1*\cos 60^0$

$B_1H=8 * \sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3}$ (см)



$\mathbf{V=4\sqrt{3} *48=192\sqrt{3}}$ **(см^3)**

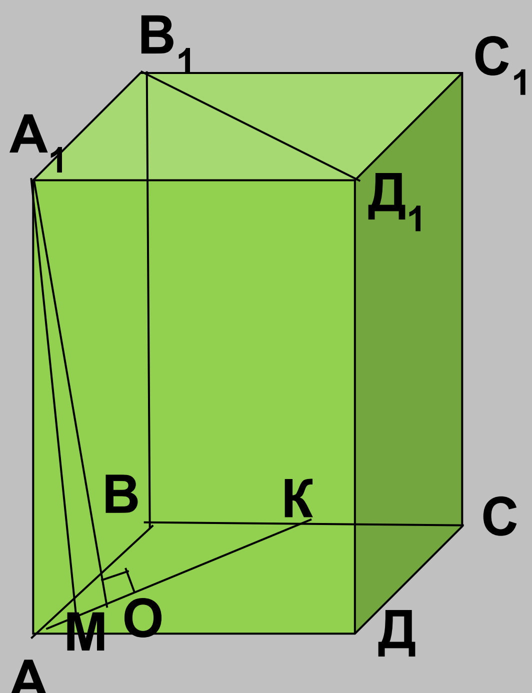
Ответ: $\mathbf{V_{пр.} = 192\sqrt{3}}$ **(см^3)**

№ 680 Основанием наклонной призмы является прямоугольный треугольник со сторонами a и b. Боковые ребра длины c составляет со смежными сторонами основания углы, равные ß . Найти объем призмы?

Дано: АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$-призма, АВСД-прямоугольник, АВ=a, АД=b, АА$_1$=c, <А$_1$АД=<А$_1$АВ=ß

Найти: V$_{призмы}$=?

Решение:



1. <А$_1$АД=<А$_1$АВ значит точка А$_1$ проецируется на биссектрису <А, А$_1$О ⊥ (АВС), АО-биссектриса <А
2. Так как А$_1$О⊥(АВС) , ОМ⊥АД (ОМ-проекция, А$_1$М-наклонная) отсюда следует, А$_1$М⊥АД
3. Треугольник АА$_1$М-прямоугольный, АМ=С·cosß
4. Треугольник АОМ-прямоугольный, АО=√2·АМ, АО=√2·С·cosß
5. А$_1$О= √c^2-2c^2-cos^{2}ß=c√1-2cos^{2}ß = c√-cos2ß.
6. V=S$_{осн.}$·h= a·b·c√-cos2ß

Ответ : V=a·b·c√-cos2ß

Свойство объемов №1

Равные тела имеют равные объемы

Свойство объемов №2

Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Свойство объемов №3

Если одно тело содержит другое, то объем первого тела не меньше объема второго.