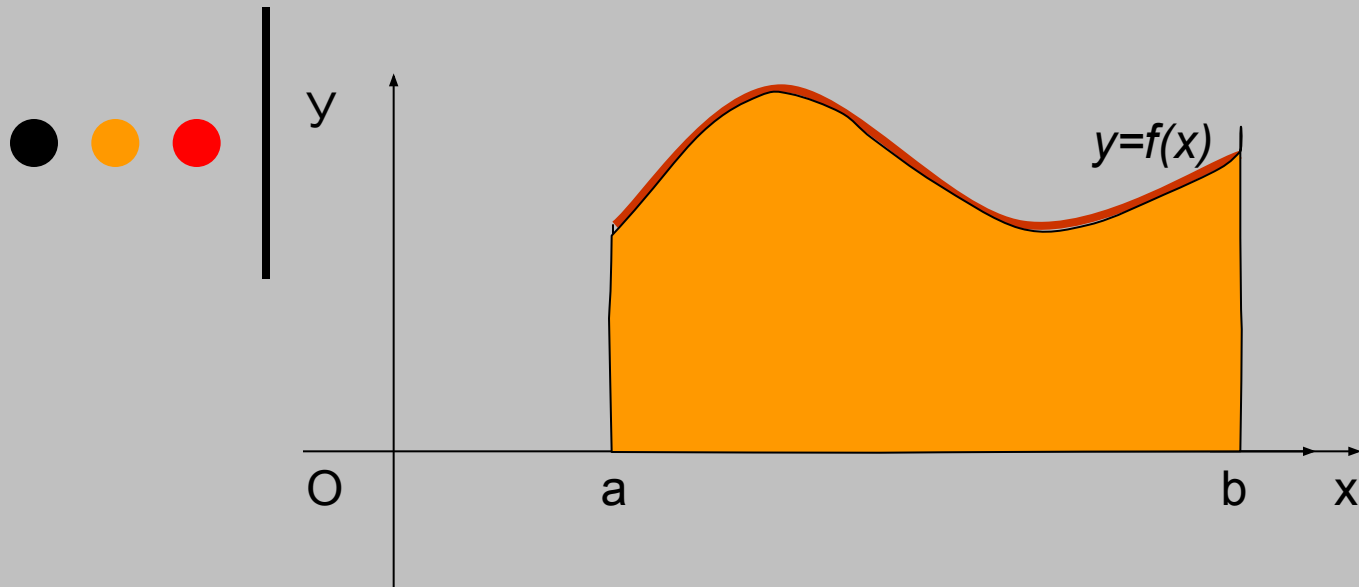




# Вычисление объемов тел вращения

Применение интеграла

11 класс



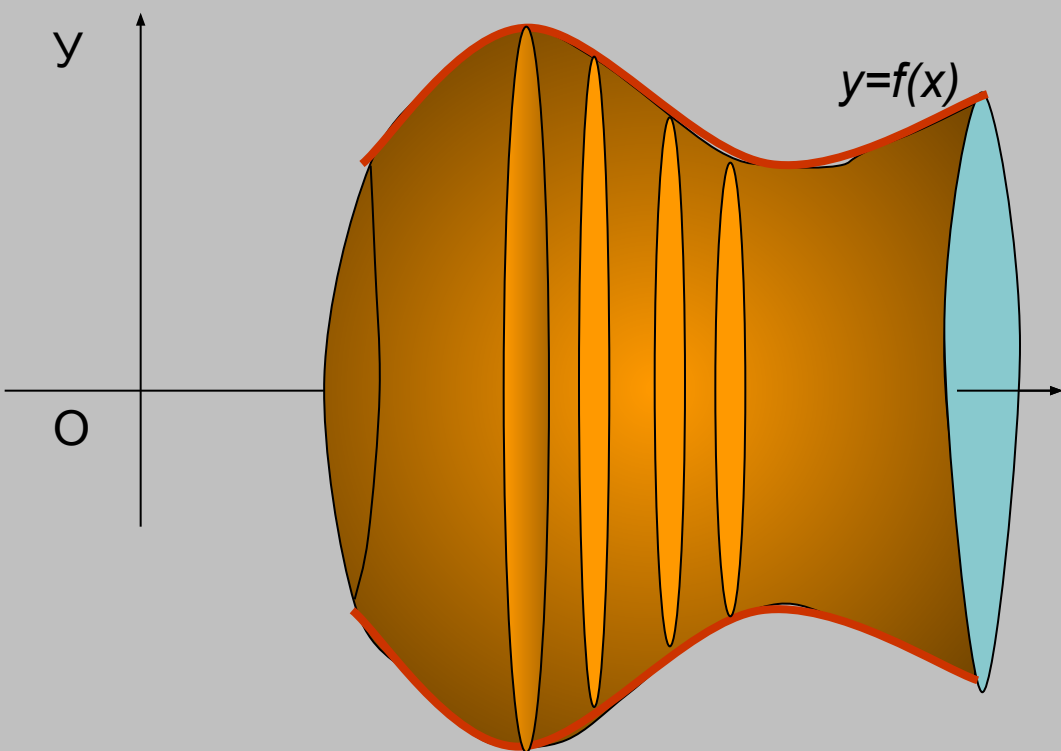
## Постановка задачи

Пусть функция  $y = f(x)$  определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , тогда график кривой  $y=f(x)$  на  $[a; b]$ , ось  $Ox$ , прямые  $x = a$ ,  $x = b$  образуют криволинейную трапецию.

Рассмотрим тело, образованное вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси  $Ox$  и найдем его объем.

● ● ●

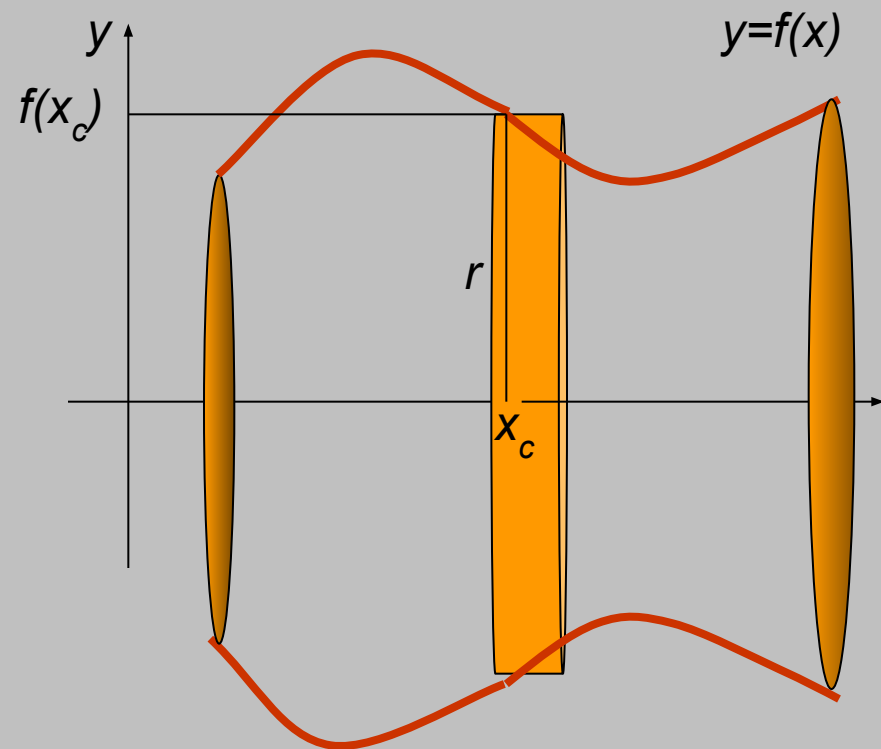
Разобьем отрезок  $[a;b]$  на  $n$  частей произвольным образом, через каждую точку деления проведем плоскость, перпендикулярную к оси  $Ox$  и найдём площади полученных поперечных сечений.



$x$

Очевидно, что любое поперечное сечение тела вращения – круг. Радиус круга равен значению функции в  $x_c$   
Площадь этого круга –  $S(x) = \pi \cdot f^2(x_c)$

● ● ●  
Построим на каждом промежутке  
цилиндрическое тело, образующая которого  
параллельна оси ОХ,  
а основанием является сечение - круг.



Радиус круга равен  
значению функции в  $x_c$   
Площадь этого круга –

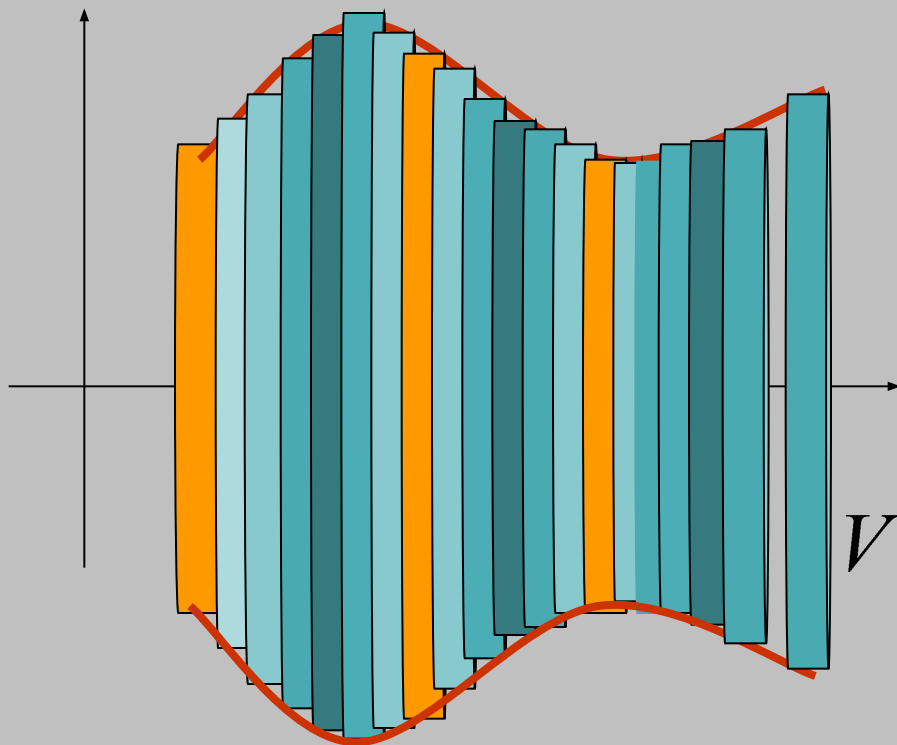
$$S(x) = \pi f^2(x_c)$$

Объём цилиндра –

$$V = S(x) \cdot \Delta x$$

● ● ●  
Объем каждого цилиндра с основанием  $S(x)$  и высотой  $\Delta x$  равен  $S(x) \cdot \Delta x$ , а объем всего ступенчатого тела равен сумме объёмов всех цилиндров.

$$V_{CT} = \sum_{k=1}^n S(x_k) \cdot \Delta x_k$$



Предел полученной интегральной суммы, который существует в силу непрерывности функции  $S(x)$ , при  $n \rightarrow \infty$  называется объемом заданного тела и равен определенному интегралу:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{CT} = \int_a^b S(x) dx$$

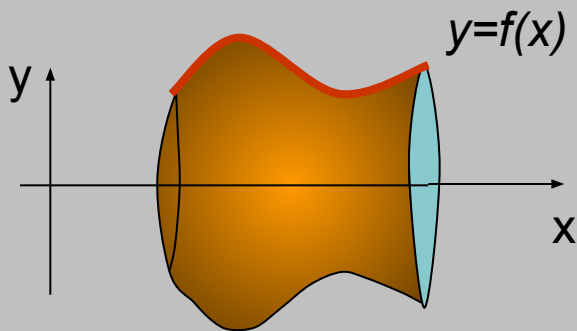
● ● ● | Предел полученной интегральной суммы, при  $n \rightarrow \infty$  равен определенному интегралу:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S(x) \cdot \Delta x = \int_a^b S(x) dx$$

□ Тогда объем тела вращения вокруг оси ОХ:

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \pi \cdot f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

□ Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, образованной функцией  $y=f(x)$  на отрезке  $[a;b]$ , вокруг оси ОХ, то его объём можно найти по формуле:



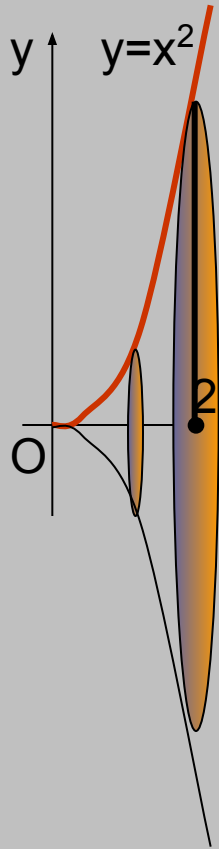
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

## Задача.

Пусть тело образовано вращением параболы  $y=x^2$  на отрезке  $[0;2]$  вокруг оси  $OX$ .

Найдите объём тела вращения.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



$$V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \pi \cdot (x^2)^2 dx =$$

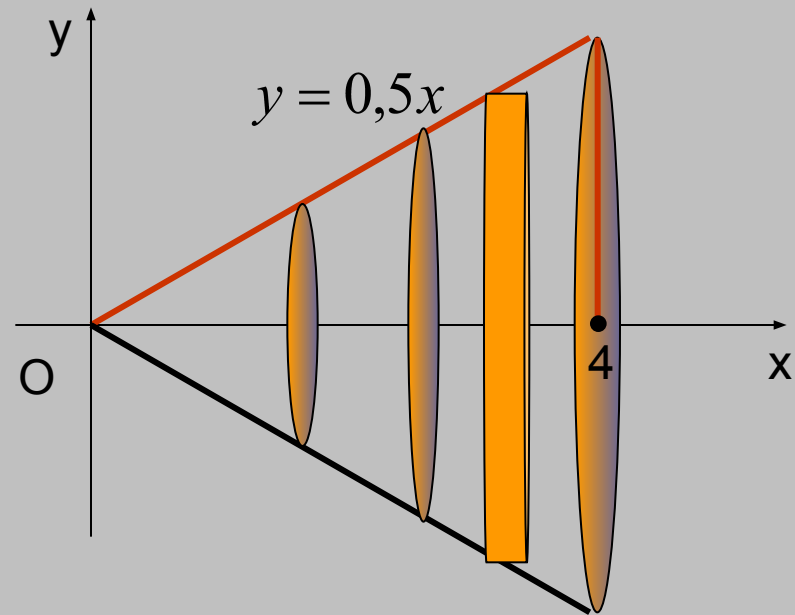
$$= \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \text{ (куб.ед.)}$$

## Задача.

Пусть тело образовано вращением функции  $y=0,5x$  на отрезке  $[0;4]$  вокруг оси  $OX$ .

Найдите объём тела вращения.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

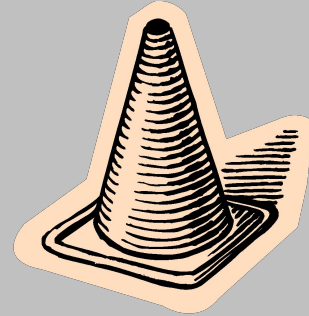
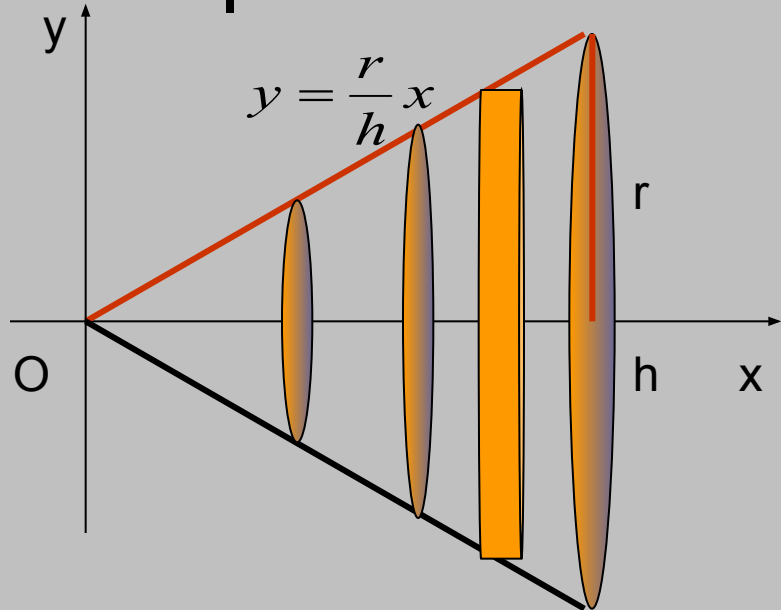


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (0,5x)^2 dx = \\ &= \pi \cdot \frac{0,25x^3}{3} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{16\pi}{3} \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$



● ● ●  
Рассмотрим конус и найдём его объём

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

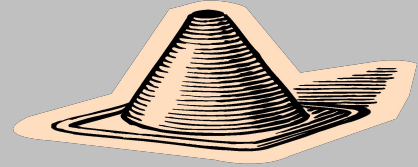
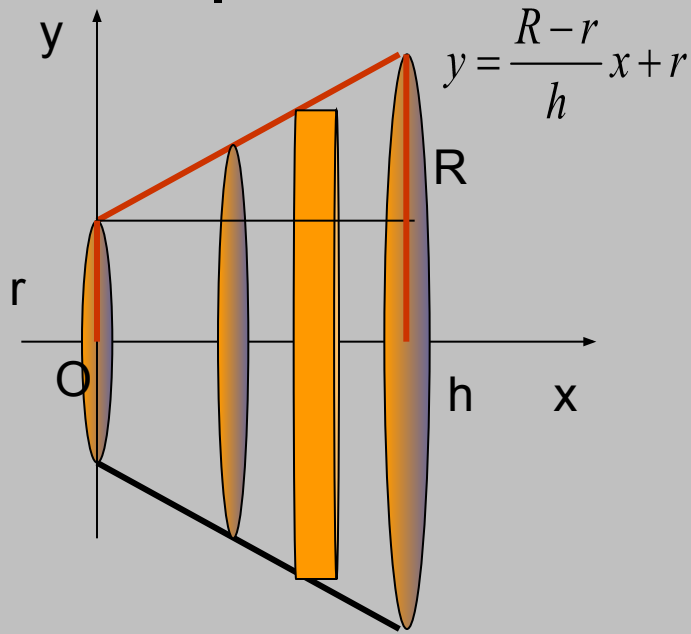


$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \pi \int_0^h \left( \frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2 x^3}{h^2 \cdot 3} \Bigg|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

# Рассмотрим усечённый конус и найдём его объём

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



$$V = \pi \int_0^h \left( \frac{R-r}{h} x + r \right)^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \frac{h}{R-r} \cdot \frac{\left( \frac{R-r}{h} x + r \right)^3}{3} \Bigg|_0^h =$$

$$= \frac{\pi h}{3(R-r)} (R^3 - r^3) = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

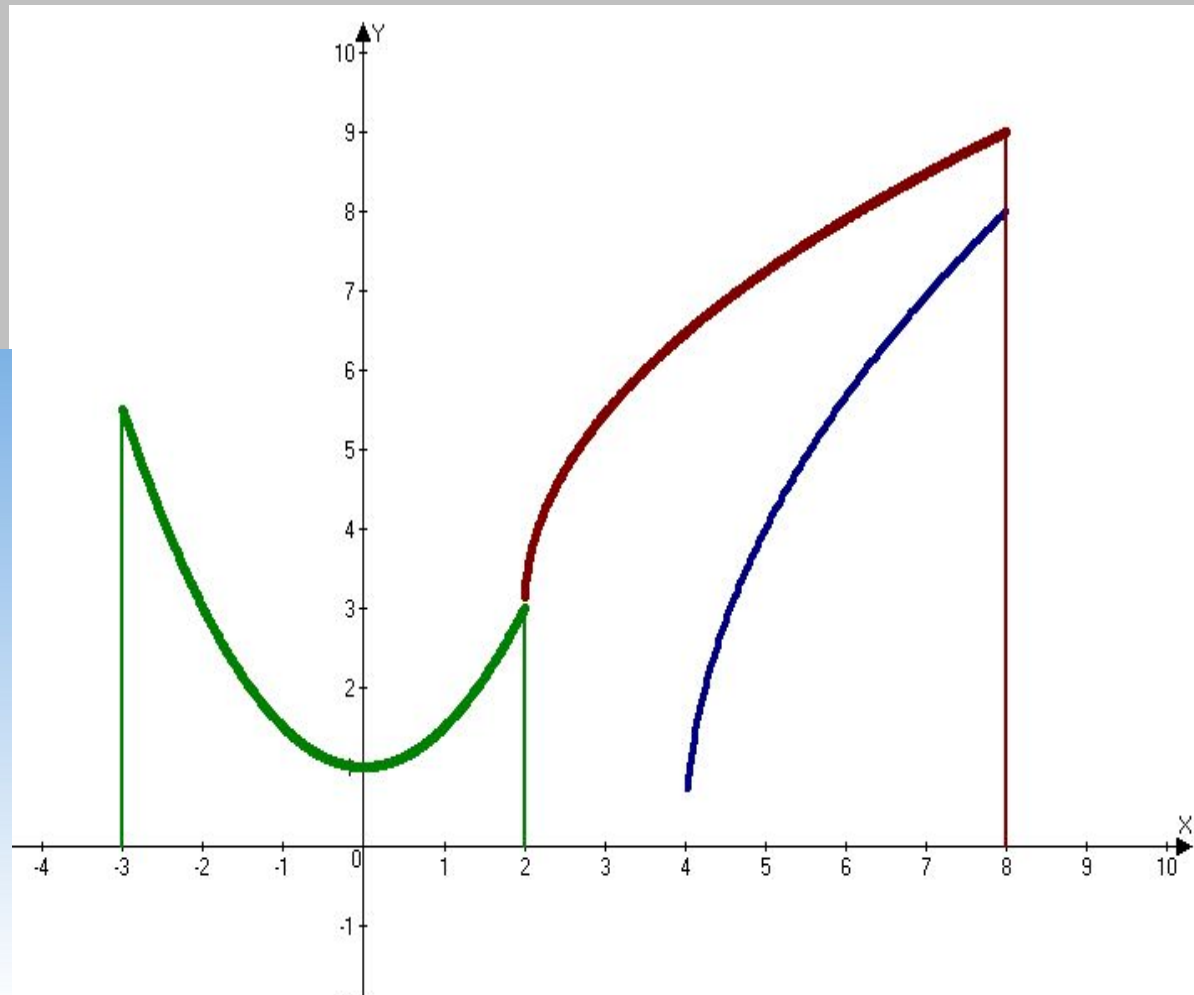
\*\*\* Найдите объём тела, если его поверхность получена вращением фигуры образованной графиками функций:

● ● ●

$$y = 0,5x^2 + 1, \text{ на } [-3; 2]$$

$$y = \sqrt{6x - 12} + 3, \text{ на } [2; 8]$$

$$y = 4\sqrt{x - 4}, \text{ на } [4; 8]$$



Вычисление определённых интегралов

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

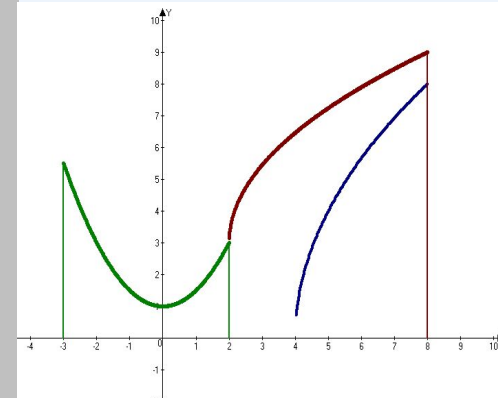
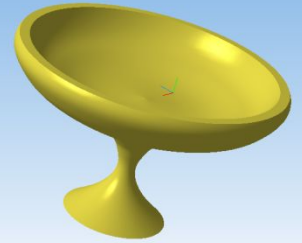
$$V = V_{\text{основания}} + V_{\text{чаши}} - V_{\text{выемки}}$$

$$V_{\text{основания}} = \pi \int_{-3}^2 (0,5x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_{-3}^2 (0,25x^4 + x^2 + 1) dx = \pi \cdot 30 \frac{5}{12} \text{ куб.ед.}$$

$$V_{\text{чаши}} = \pi \int_2^8 (\sqrt{6x-12} + 3)^2 dx = \pi \int_2^8 (6x-12 + 6\sqrt{6x-12} + 9) dx = \pi \cdot 306 \text{ куб.ед.}$$

$$V_{\text{выемки}} = \pi \int_4^8 (4\sqrt{4x-4})^2 dx = \pi \int_4^8 16(4x-4) dx = \pi \cdot 128 \text{ куб.ед.}$$

$$V_{\text{кубка}} = 208 \frac{5}{12} \pi \approx 654.4 \text{ куб.ед.}$$



# Объем наклонной призмы

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту

1. Треугольная призма

имеет  $S$  основания и высоту  $h$ .

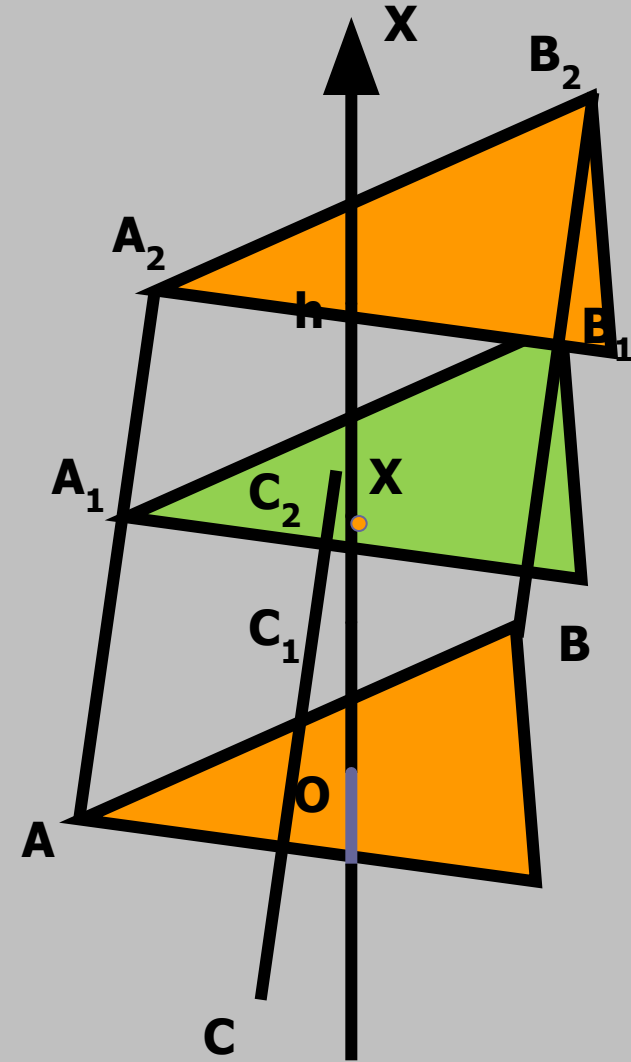
$O = OX \cap (ABC)$ ;  $OX \perp (ABC)$ ;  $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ ;

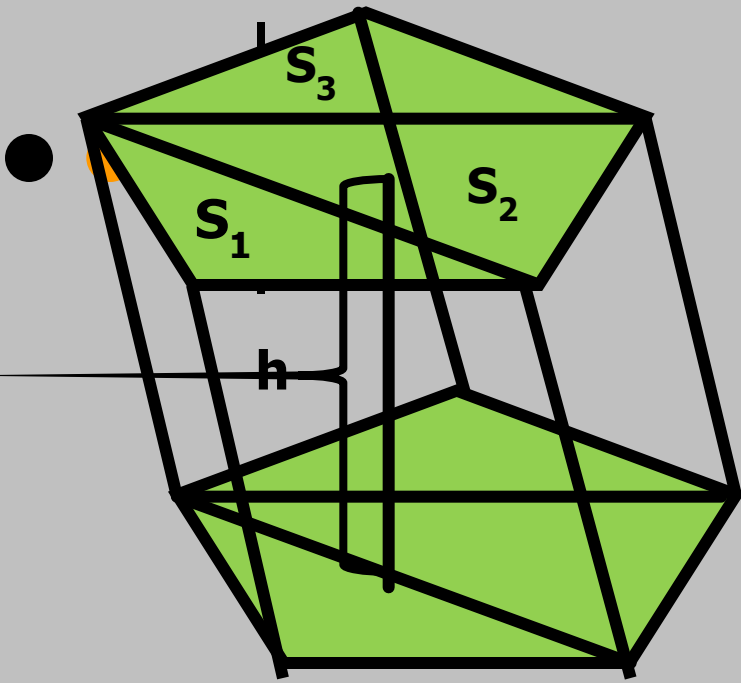
$(A_1B_1C_1)$ -плоскость сечения:  $(A_1B_1C_1) \perp OX$

$S(x)$ -площадь сечения;  $S = S(x)$ , т.к.

$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$  и  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$  ( $AA_1C_1C$ -параллелограмм  $\rightarrow AC = A_1C_1, BC = B_1C_1, AB = A_1B_1$ )

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = S \int_0^h dx = Sx \Big|_0^h = S * h$$





2. Наклонная призма с многоугольником в основании

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 = \\ &= S_1 * h + S_2 * h + S_3 * h = \\ &= h(S_1 + S_2 + S_3) = S * h \end{aligned}$$

Объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ребру сечения

● ● ● № 676 Найти объем наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10см, 10см, 12см, а боковое ребро равно 8см, составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$

Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  - наклонная прямая призма.  $\angle B_1BK = 60^\circ$ ,  $BC = 10\text{см}$ ,  $AB = 10\text{см}$ ,  $AC = 12\text{см}$ ,  $BB_1 = 8\text{см}$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}} = ?$

Решение:

$V = S_{ABC} \cdot h$ ,  $S_{\text{осн.}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  - формула Герона

$$S_{\text{осн.}} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6} = 4 \cdot 2 \cdot 6 = 48 \text{ (см}^2\text{)}$$

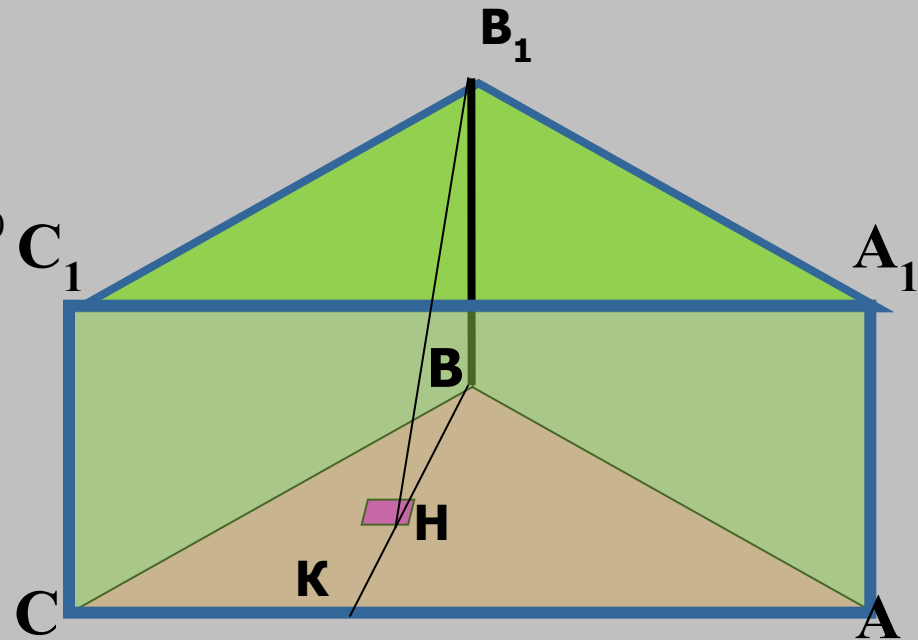
Треугольник  $BB_1H$  - прямоугольный,

так как  $B_1H$  - высота  $B_1H = BB_1 \cdot \cos 60^\circ$

$$B_1H = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$V = 4\sqrt{3} \cdot 48 = 192\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ:  $V_{\text{пр.}} = 192\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}$



№ 680 Основанием наклонной призмы является прямоугольный треугольник со сторонами  $a$  и  $b$ . Боковые ребра длины  $c$  составляет со смежными сторонами основания углы, равные  $\beta$ . Найти объем призмы?

Дано:  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ -призма,  $ABCD$ -прямоугольник,  $AB=a$ ,  $AD=b$ ,  $AA_1=c$ ,

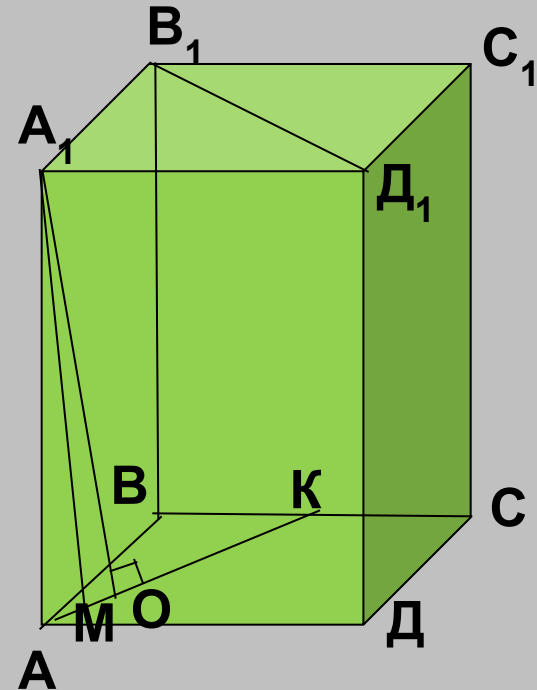
$\angle A_1AD = \angle A_1AB = \beta$

Найти:  $V_{\text{призмы}} = ?$

Решение:

- $\angle A_1AD = \angle A_1AB$  значит точка  $A_1$  проецируется на биссектрису  $\angle A$ ,  $A_1O \perp (ABC)$ ,  $AO$ -биссектриса  $\angle A$
- Так как  $A_1O \perp (ABC)$ ,  $OM \perp AD$  ( $OM$ -проекция,  $A_1M$ -наклонная) отсюда следует,  $A_1M \perp AD$
- Треугольник  $AA_1M$ -прямоугольный,  $AM = c \cdot \cos \beta$
- Треугольник  $AOM$ -прямоугольный,  $AO = \sqrt{2} \cdot AM$ ,  
 $AO = \sqrt{2} \cdot c \cdot \cos \beta$
- $A_1O = \sqrt{c^2 - 2c^2 \cdot \cos^2 \beta} = c \sqrt{1 - 2\cos^2 \beta} = c \sqrt{-\cos 2\beta}$ .
- $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = a \cdot b \cdot c \sqrt{-\cos 2\beta}$

Ответ :  $V = a \cdot b \cdot c \sqrt{-\cos 2\beta}$







## Свойство объемов №1

Равные тела имеют равные объемы

## Свойство объемов №2

Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

## Свойство объемов №3

Если одно тело содержит другое, то объем первого тела не меньше объема второго.