Логарифмические уравнения

Простейшие уравнения

$$\log_a f(x) = \mathrm{c} \Leftrightarrow f(x) = a^c$$

$$\log_{f(x)} b = \mathrm{c} \Leftrightarrow \begin{cases} f^c(x) = b, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$$

$$\log_x 16 = 2;$$

Метод потенцирования.

$$\text{То есть } \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x).$$

Метод потенцирования.

Решить уравнение

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x).$$

Решение.

$$\begin{cases} 7 - 2x > 0 \\ x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3{,}5\ , \\ x^2 - x - 12 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3{,}5\ , \\ \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -3; \end{array} \right. \end{cases} \qquad x = -3.$$

Ответ: -3.

3. **Решить уравнение** $\log_{x+4}(x^2-1)=\log_{x+4}(5-x)$.

Решение.

$$\begin{cases} x^2-1=5-x, \\ 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x-6=0, \\ x<5, \\ x>-4, \\ x\neq -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=2, \end{array}\right. \\ -4<x<5, \\ x\neq -3; \end{cases}$$

$$x=2.$$

***Ответ*: 2.**

Метод введения новой переменной.

4. Решить уравнение

$$3\log_{0,5}^2 x + 5\log_{0,5} x - 2 = 0.$$

Метод логарифмирования.

5. Решить уравнение $x^{1-\log_5 x} = 0{,}04.$

Решение. 1)

2) $\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0{,}04.$

$$\log_5 0{,}04 = \log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = \log_5 5^{-2} = -2.$$

Ответ: 25; $\frac{1}{5}$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

№ 1350–1358 (2)

Логарифмические неравенства

Метод потенцирования.

$$\text{Если } a>1, \text{ то } \log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

$$\text{Если } 0<a<1, \text{ то } \log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Теорема 1. Неравенство $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \le 0$

равносильно системе $\begin{cases} \dfrac{f(x)-g(x)}{a(x)-1} \le 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0; \end{cases}$

Например $\log_{0,5}(x^2+4x) + \log_2(x^2+3x-4) > 0$

$$\log_{0,5}(x^2+4x) - \log_{0,5}(x^2+3x-4) > 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2+4x)-(x^2+3x-4)}{0,5-1} > 0, \\ x^2+4x > 0, \\ x^2+3x-4 > 0. \end{cases}$$

Теорема2. Неравенство $\log_{f(x)} a(x) - \log_{g(x)} a(x) \leq 0$

равносильно системе $\begin{cases} \dfrac{(a(x)-1)(f(x)-g(x))}{(f(x)-1)(g(x)-1)} \geq 0, \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0; \end{cases}$

Решить неравенство

$$\log_{(4x^2+1)^2}(x^2-4x+5)^2 \geq \log_{(3x^2+4x+1)}(x^2-4x+5)$$

$$\log_{(4x^2+1)}(x^2-4x+5) \geq \log_{(3x^2+4x+1)}(x^2-4x+5)$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-4x+5-1)\cdot(4x^2+1-3x^2-4x-1)}{(4x^2+1-1)\cdot(3x^2+4x+1-1)} \leq 0, \\ (4x^2+1)^2 > 0, \\ 3x^2+4x+1 > 0, \\ x^2-4x+5 > 0. \end{cases}$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

№ 1407-1414 (чет)

СПАСИБО за УРОК!