

Лекция №6 (УСР)

*Экстремум функции двух
переменных*

§6. Экстремум функции двух переменных

1⁰. Экстремум функции двух переменных. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную в некоторой области D . Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *точкой максимума (минимума)* функции $f(x, y)$, если существует такая δ -окрестность этой точки, где $f(x, y)$ определена и непрерывна, и для всех точек $M(x; y)$ из этой окрестности, отличных от точки $M_0(x_0; y_0)$, выполняется неравенство $f(M) \leq f(M_0)$ ($f(M) \geq f(M_0)$).

Точка M_0 называется *точкой глобального максимума* (соответственно *минимума*) функции $f(M)$ в области D , если $f(M_0) \geq f(M)$ (соответственно $f(M_0) \leq f(M)$) для всех M из D .

Минимум (максимум) функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется *строгим*, если $f(M_0) < f(M)$ ($f(M_0) > f(M)$).

Например, функция $z = 5 - 2x^2 - y^2$ в точке $M_0(0; 0)$ достигает максимума, равного 5.

2^o. Необходимое условие экстремума. Имеет место

Теорема 1. Если в точке $(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $f(x, y)$ достигает экстремума, то все ее первые частные производные в этой точке равны нулю.

Экстремум функции двух переменных

Точки, в которых все частные производные функции нескольких переменных равны нулю, называются *критическими* или *стационарными*.

3⁰. Достаточные условия экстремума.

Теорема 2. Пусть функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M(x_0; y_0)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ является критической точкой, т. е.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \quad \text{Тогда функция } f(x, y) \text{ при}$$

$x = x_0, \quad y = y_0$ имеет максимум, если

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} < 0 \text{ и}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0;$$

Экстремум функции двух переменных

минимум, если

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} < 0 \text{ и}$$
$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0;$$

не имеет экстремума при

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} > 0;$$

экстремум может быть, а может и не быть при

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = 0.$$

Пример 1. Исследовать на экстремум функции:

$$\text{а) } z = x^2 - 2xy + 4y^3, \text{ б) } z = 3x^2y - x^3 - y^4.$$

Решение. а) Вычислим частные производные заданной функции и приравняем их к нулю.

$$z'_x = 2x - 2y = 0, \quad z'_y = -2x + 12y^2 = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получаем две стационарные точки:

$$M_1(0;0) \text{ и } M_2\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right).$$

Находим частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{xy} = -2, \quad z''_{yy} = 24y.$$

Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки $M_1(0;0)$. Так как $A = z''_{xx}(M_1) = 2$, $B = z''_{xy}(M_1) = -2$, $C = z''_{yy}(M_1) = 0$, то $B^2 - AC = 4 > 0$ и, значит, в точке M_1 функция не имеет экстремума.

В точке M_2 : $A=2$, $B=-2$, $C=4$. Следовательно, $B^2 - AC = 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$ и, так как $A=2 > 0$, то в точке M_2 функция имеет минимум.

б) Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$z'_x = -3x^2 + 6xy = 0, \quad z'_y = 3x^2 - 4y^3 = 0.$$

Решая эту систему, находим две стационарные точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(6;3)$.

Вычисляем частные производные второго порядка данной функции: $z''_{xx} = -6x + 6y$, $z''_{xy} = 6x$, $z''_{yy} = -12y^2$. В точке M_1 : $A=0$, $B=0$, $C=0$ и, значит, $B^2 - AC = 0$. Поэтому точка $M_1(0;0)$ требует дополнительного исследования. Значение

функции $z(x, y)$ в этой точке равно нулю: $z(0; 0) = 0$. Далее при $x < 0, y = 0$ имеем $z(x, y) = -x^3 > 0$, а при $x = 0, y \neq 0$ имеем $z(x, y) = -y^4 < 0$. Следовательно, в любой окрестности $M_1(0; 0)$ функция $z(x, y)$ принимает значения, как больше $z(0; 0)$, так и меньше $z(0; 0)$ и, значит, в точке M_1 функция $z(x, y)$ не имеет экстремума.

В точке M_2 : $A = -18, B = 36, C = -108$, и, значит, $B^2 - AC = -648 < 0$. Так как $A < 0$, то в точке M_2 функция имеет максимум. \square

Условный экстремум

. Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ называют экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (уравнение связи). Если уравнение связи можно разрешить относительно одной из переменных x или y или представить его параметрическими уравнениями, то задача отыскания экстремума функции z сводится к задаче отыскания экстремума функции одной переменной (метод исключения части переменных). Отыскание условного экстремума функции $f(x, y)$ без разрешения уравнения связи можно свести к исследованию на обычный (безусловный) экстремум функции Лагранжа (метод Лагранжа)

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \quad (3)$$

Условный экстремум

Чтобы найти значения x и y , удовлетворяющие уравнению связи $\varphi(x; y) = 0$, при которых функция $z = f(x, y)$ может иметь условный экстремум, нужно составить вспомогательную функцию (3) и приравнять к нулю ее производные по x , y , и λ , т.е. получить систему

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

из которой определить искомые x , y , λ .

Уравнения (4) являются *необходимыми условиями условного экстремума*.

Условный экстремум

Выяснить характер условного экстремума можно по знаку второго дифференциала функции $F(x, y, \lambda)$, вычисленного для полученных из (4) значений x, y, λ с учетом того, что dx и dy связаны уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0.$$

Если $d^2F < 0$, функция $f(x, y)$ имеет условный максимум, а если $d^2F > 0$ — условный минимум. При $d^2F = 0$ требуется дополнительное исследование.

Пример 6. Найти условные экстремумы функции при заданных уравнениях связи:

1) $z = x^2 + y^2 + xy - 10x - 8y + 5, \quad x + y = 2;$

2) $z = \sin^2 x + \sin^2 y, \quad x - y = \frac{\pi}{4};$

Условный экстремум

Решение. 1) Разрешим уравнение связи относительно y . Имеем $y = 2 - x$. Подставляя полученное y в выражение для данной функции, будем иметь

$$z = x^2 + (2 - x)^2 + x(2 - x) - 10x - 8(2 - x) + 5 = x^2 - 4x - 7.$$

Получена функция одной переменной $z = g(x) = x^2 - 4x - 7$. Локальный экстремум функции $g(x)$ и будет искомым локальным экстремумом функции $z = f(x, y)$. Исследуем функцию $g(x)$, используя достаточное условие существования локального экстремума для функции одной переменной ([1], гл. 8, § 2 с. 291). Имеем $g'(x) = 2x - 4$, $g'(x) = 0$ при $x = 2$, $g''(x) = 2$.

Так как $g''(x) > 0$ при все x из \mathbb{R} , то в точке $x = 2$ функция $g(x) = x^2 - 4x - 7$ имеет локальный минимум: $g_{\min} = g(2) = -11$.

Таким образом, заданная функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(2; 0)$ имеет условный минимум $z_{\min} = f(2, 0) = -11$.

Глобальный экстремум

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области (глобальные или абсолютные экстремумы). Если функция $f(M)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своих наибольшего и наименьшего значения или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в круге:

$$1) z = x^2 + y^2 - 10x + 20y, x^2 + y^2 \leq 20;$$

$$2) z = 3x^2 + 2y^2, x^2 + y^2 \leq 9.$$

Самостоятельно разобрать задачу 2 из примера 6, и задачи 1,2 примера 9.