Лекция №6 (УСР)

Экстремум функции двух переменных

§6. Экстремум функции двух переменных

1^0. Экстремум функции двух переменных. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную в некоторой области D. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f(x, y)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, где $f(x, y)$ определена и непрерывна, и для всех точек $M(x; y)$ из этой окрестности, отличных от точки $M_0(x_0; y_0)$, выполняется неравенство $f(M) \le f(M_0)\left(f(M) \ge f(M_0)\right)$.

Точка M_0 называется *точкой глобального максимума* (соответственно *минимума*) *функции* $f(M)$ *в области* D, если $f(M_0) \geq f(M)$ (соответственно $f(M_0) \leq f(M)$) для всех M из D.

Минимум (максимум) функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$
называется *строгим*, если $f(M_0) < f(M) \left(f(M_0) > f(M) \right)$.

Например, функция $z = 5 - 2x^2 - y^2$ в точке $M_0(0;0)$ достигает максимума, равного 5.

2°. Необходимое условие экстремума. Имеет место

Теорема 1. *Если в точке* $(x_0;y_0)$ *дифференцируемая функция* $f(x,y)$ *достигает экстремума, то все ее первые частные производные в этой точке равны нулю.*

Экстремум функции двух переменных

Точки, в которых все частные производные функции нескольких переменных равны нулю, называются *критическими* или *стационарными*.

3^0. Достаточные условия экстремума.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y)$ в некоторой окрестности точки $M(x_0;y_0)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть точка $M_0(x_0;y_0)$ является критической точкой, т. е. $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$. Тогда функция $f(x,y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$ имеет максимум, если*

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}<0 \text{ и}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0;$$

Экстремум функции двух переменных

минимум, если

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}<0 \text{ и}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}>0\,;$$

не имеет экстремума при

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}>0\,;$$

экстремум может быть, а может и не быть при

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}=0\,.$$

Пример 1. Исследовать на экстремум функции:

а) $z = x^2 - 2xy + 4y^3$, б) $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$.

Решение. а) Вычислим частные производные заданной функции и приравняем их к нулю.

$$z'_x = 2x - 2y = 0, \quad z'_y = -2x + 12y^2 = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получаем две стационарные точки:

$$M_1(0;0) \text{ и } M_2\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right).$$

Находим частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{xy} = -2, \quad z''_{yy} = 24y.$$

Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки $M_1(0;0)$. Так как $A = z''_{xx}(M_1) = 2$, $B = z''_{xy}(M_1) = -2$, $C = z''_{yy}(M_1) = 0$, то $B^2 - AC = 4 > 0$ и, значит, в точке M_1 функция не имеет экстремума.

В точке M_2: $A=2$, $B=-2$, $C=4$. Следовательно, $B^2-AC= =4-4\cdot 2=-4<0$ и, так как $A=2>0$, то в точке M_2 функция имеет минимум.

б) Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$z'_x=-3x^2+6xy=0,\ z'_y=3x^2-4y^3=0.$$

Решая эту систему, находим две стационарные точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(6;3)$.

Вычисляем частные производные второго порядка данной функции: $z''_{xx}=-6x+6y, z''_{xy}=6x, z''_{yy}=-12y^2$. В точке M_1: $A=0, B=0$, $C=0$ и, значит, $B^2-AC=0$. Поэтому точка $M_1(0;0)$ требует дополнительного исследования. Значение функции $z(x,y)$ в этой точке равно нулю: $z(0;0)=0$. Далее при $x<0, y=0$ имеем $z(x,y)=-x^3>0$, а при $x=0, y\neq 0$ имеем $z(x,y)=-y^4<0$. Следовательно, в любой окрестности $M_1(0;0)$ функция $z(x,y)$ принимает значения, как больше $z(0;0)$, так и меньше $z(0;0)$ и, значит, в точке M_1 функция $z(x,y)$ не имеет экстремума.

В точке M_2: $A=-18, B=36, C=-108$, и, значит, $B^2-AC=-648<0$. Так как $A<0$, то в точке M_2 функция имеет
максимум. □

Условный экстремум

. *Условным экстремумом* функции $z = f(x, y)$ называют экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (*уравнение связи*). Если уравнение связи можно разрешить относительно

одной из переменных x или y или представить его параметрическими уравнениями, то задача отыскания экстремума функции z сводится к задаче отыскания экстремума функции одной переменной (метод исключения части переменных). Отыскание условного экстремума функции $f(x, y)$ без разрешения уравнения связи можно свести к исследованию на обычный (безусловный) экстремум функции Лагранжа (метод Лагранжа)

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \qquad (3)$$

Условный экстремум

Чтобы найти значения x и y, удовлетворяющие уравнению связи $\varphi(x;y) = 0$, при которых функция $z = f(x,y)$ может иметь условный экстремум, нужно составить вспомогательную функцию (3) и приравнять к нулю ее производные по x, y, и λ, т.е. получить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x,y) = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

из которой определить искомые x, y, λ.

Уравнения (4) являются *необходимыми условиями условного экстремума.*

Условный экстремум

Выяснить характер условного экстремума можно по знаку второго дифференциала функции $F(x, y, \lambda)$, вычисленного для полученных из (4) значений x, y, λ с учетом того, что dx и dy связаны уравнением

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0, \qquad dx^2 + dy^2 \neq 0.$$

Если $d^2F < 0$, функция $f(x, y)$ имеет условный максимум, а если $d^2F > 0$ — условный минимум. При $d^2F = 0$ требуется дополнительное исследование.

Пример 6. Найти условные экстремумы функции при заданных уравнениях связи:

1) $z = x^2 + y^2 + xy - 10x - 8y + 5,\ x + y = 2;$

2) $z = \sin^2 x + \sin^2 y,\ x - y = \dfrac{\pi}{4};$

Условный экстремум

Решение. 1) Разрешим уравнение связи относительно y. Имеем $y = 2 - x$. Подставляя полученное y в выражение для данной функции, будем иметь

$$z = x^2 + (2-x)^2 + x(2-x) - 10x - 8(2-x) + 5 = x^2 - 4x - 7.$$

Получена функция одной переменной $z = g(x) = x^2 - 4x - 7$. Локальный экстремум функции $g(x)$ и будет искомым локальным экстремумом функции $z = f(x,y)$. Исследуем функцию $g(x)$, используя достаточное условие существования локального экстремума для функции одной переменной ([1], гл. 8, § 2 с. 291). Имеем $g'(x) = 2x - 4$, $g'(x) = 0$ при $x = 2$, $g''(x) = 2$.

Так как $g''(x) > 0$ при все x из $\mathbb{R}$, то в точке $x = 2$ функция $g(x) = x^2 - 4x - 7$ имеет локальный минимум: $g_{\min} = g(2) = -11$.

Таким образом, заданная функция $z = f(x,y)$ в точке $M_0(2;0)$ имеет условный минимум $z_{\min} = f(2,0) = -11$.

Глобальный экстремум

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области (глобальные или абсолютные экстремумы). Если функция $f(M)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своих наибольшего и наименьшего значения или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в круге:

1) $z = x^2 + y^2 - 10x + 20y$, $x^2 + y^2 \leqslant 20$;

2) $z = 3x^2 + 2y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

Самостоятельно разобрать задачу 2 из примера 6, и задачи 1,2 примера 9.