Системы счисления,
или
Как считает компьютер?

Системы счисления

Система счисления (numbering system) - совокупность приемов и правил для записи чисел знаками.

Способов записи чисел цифровыми знаками существует бесчисленное множество.

Наиболее известна десятичная система счисления, в которой для записи чисел используются цифры 0, 1, … , 9.

Любая предназначенная для практического применения система счисления должна обеспечивать:

- возможность представления любого числа в рассматриваемом диапазоне величин;
- единственность представления (каждой комбинации символов должна соответствовать одна и только одна величина);
- простоту оперирования числами

Непозиционные системы счисления

Непозиционная система счисления – система, для которой **численное значение символа (цифры) не зависит от его положения в числе**.

Например, система с одним символом-палочкой встречалась у многих народов. Для изображения какого-то числа в этой системе нужно записать количество палочек, равное данному числу.

2=II 5=IIIII 10=IIIIIIIIII 1250=IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII…..

Эта система неэффективна, так как запись числа получается длинной.

Основной недостаток всех непозиционных систем – громоздкость записи и трудность выполнения арифметических действий

IIIIIIIIIIIII x IIIIIIIIIIIIII=?

Самая известная «почти» непозиционная система счисления - римская

Римская система использует набор следующих символов (цифр):

I - "один";
V - "пять";
X - "десять";
L - "пятьдесят";
C - "сто";
D - "пятьсот";
M - "тысяча"

В этой системе существует отклонение от правила независимости значения цифры от положения в числе. В числах LX и XL символ X принимает два различных значения: +10 – в первом случае и –10 – во втором случае.

Запись больших чисел громоздка: 1994=MDCCCCLXXXXIV

Выполнение арифметических операций крайне затруднено:

XXXVII
IX
____
??????

Позиционные системы счисления

Позиционная система счисления – система, в которой **значение символа (цифры) определяется его положением в числе**: один и тот же знак принимает различное значение. Например, в десятичном числе 222 первая цифра справа означает две единицы, соседняя с ней – два десятка, а левая – две сотни.

Любая позиционная система характеризуется основанием. Основание (базис) позиционной системы счисления – количество знаков или символов, используемых для изображения числа в данной системе.

Позиционные системы счисления имеют ряд преимуществ перед непозиционными: удобство выполнения арифметических и логических операций, а также представление больших чисел, поэтому и людьми, и в цифровой технике применяются позиционные системы счисления.

Различные используемые позиционные системы счисления

В общем виде для любой позиционной системы счисления с основанием В число из n цифр имеет вид:

$$A_B=a_1B^{n-1}+a_2B^{n-2}+\ldots+a_nB^0$$

Например:

$$123_{10}=1*10^{3-1}+2*10^{3-2}+3*10^{3-3}$$

В	Название	Цифры
2	двоичная	0, 1
3	троичная	0, 1, 2
8	восьмеричная	0, ... , 7
16	шестнадцатеричная	0, ... , 9 , A, ... , F

Каждая система счисления имеет свои правила арифметики (таблицы умножения, сложения). Поэтому, производя какие-либо операции над числами, надо помнить о системе счисления, в которой они представлены.

Если основание больше 10…

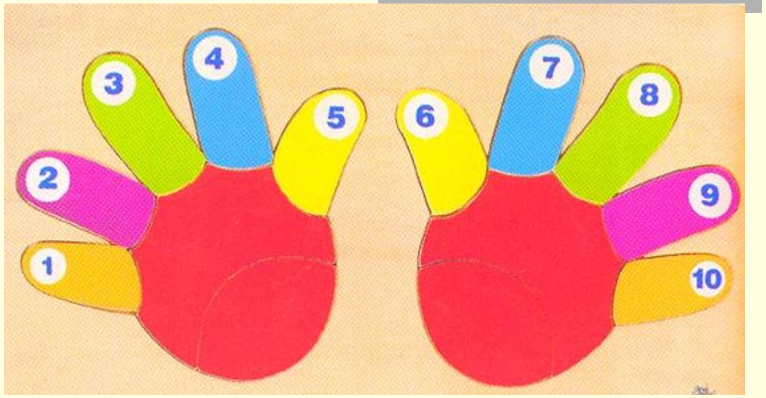
Если основание системы q превышает 10, то цифры, начиная с 10, при записи обозначают прописными буквами латинского алфавита: A,B,...,Z. При этом цифре 10 соответствует знак 'A', цифре 11 - знак 'B' и т.д.

В таблице приведены десятичные числа от 0 до 15 и их эквивалент в различных системах счисления.

B=10	B=2	B=16	B=10	B=2	B=16
0	0	0	8	1000	8
1	1	1	9	1001	9
2	10	2	10	1010	A
3	11	3	11	1011	B
4	100	4	12	1100	C
5	101	5	13	1101	D
6	110	6	14	1110	E
7	111	7	15	1111	F

Применение различных систем счисления

Десятичная (число пальцев на руках) – исторически стала единственной системой, применяемой населением Земли.



В **двоичной системе** работает электронная техника, так как всего две цифры 0 и 1 легче всего представить в виде электрических сигналов

В **шестнадцатеричной системе** представляются многие числа в Интернете (скажем, так кодируется цвет в HTML): background=#ffffff;

Общий метод перевода чисел из одной СС в другую

Перевод целых чисел из системы с основанием q_1 в систему с основанием q_2 осуществляется делением на основание q_2 новой системы счисления, правильных дробей – умножением на основание q_2. Действия деления и умножения выполняются по правилам q_1-арифметики. Перевод дробей осуществляется раздельно по указанным правилам, результат записывается в виде новой дроби в системе с основанием q_2.

Пример. Перевести десятичное число А = 61_{10} (q_1 = 10) в двоичную систему счисления (q_2 = 2).

_61 |2
60 _30 |2
b_0 = **1** 30 _15 |2
b_1 = **0** 14 _7 |2
b_2 = **1** 6 _3 |2
b_3 = **1** 2 **1** = b_5
b_4 = **1**

Полученные остатки от деления записываем по порядку появления в ряд справа налево

Получаем правильный ответ: $61_{10} = 111101_2$

Табличный метод перевода

В простейшем виде табличный метод заключается в следующем: имеется таблица всех чисел одной системы с соответствующими эквивалентами из другой системы; задача перевода сводится к нахождению соответствующей строки таблицы и выбору из нее эквивалента. Такая таблица очень громоздка и требует большой емкости памяти для хранения.

Другой вид табличного метода заключается в том, что имеются таблицы эквивалентов в каждой системе только для цифр этих систем и степеней основания (положительных и отрицательных); задача перевода сводится к тому, что в выражение ряда для исходной системы счисления надо поставить эквиваленты из новой системы для всех цифр и степеней основания и произвести соответствующие действия (умножения и сложения) по правилам q_2-арифметики. полученный результат этих действий будет изображать число в новой системе счисления.

Пример табличного метода перевода

Пример. Перевести десятичное число A = 113_{10} в двоичную систему счисления, используя таблицу эквивалентов цифр и степеней основания.

Десятичное число	Двоичное число
10^0	0001
10^1	1010
10^2	110 0100

Решение. Подставив значения двоичных эквивалентов десятичных цифр и степеней основания, получим:

$$A = 113_{10} = 1\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 = 0001\cdot 1100100 + 0001\cdot 1010 + 0011\cdot 0001 = 1110001_2.$$

Ответ: 1110001_2.

Какие бывают числа

Целые: 10, 125, -1512

Действительные (вещественные) – с дробной частью: 1.125

С экспоненциальной частью:

$1.2 \cdot 10^{23}$

Рациональные: можно представить в виде m/n, где m- целое число, n – целое число.

Иррациональные: нельзя представить в виде m/n (число π)

Комплексные: *x+iy*, где $i = \sqrt{-1}$

Все эти числа надо каким-то образом представлять в памяти компьютера, выражая их в двоичной системе счисления

Представление действительных чисел в компьютере

Для представления действительных (вещественных) чисел в современных компьютерах принят способ представления **с плавающей запятой (floating point)**. Этот способ представления опирается на нормализованную (экспоненциальную) запись действительных чисел.

Как и для целых чисел, при представлении действительных чисел в компьютере используется двоичная система, следовательно, предварительно десятичное число должно быть переведено двоичную систему.

Нормализованная запись отличного от нуля действительного числа - это запись вида $\mathbf{a=\pm m \cdot P^q}$, где q - целое число (положительное, отрицательное или ноль), а m - правильная дробь. При этом m называется **мантиссой** числа, q - **порядком** числа.

Представление вещественных чисел в компьютере

Примеры:

- $3{,}1415926 = 0{,}31415926 * 10^1$;
- $1000=0{,}1 * 10^4$;
- $0{,}123456789 = 0{,}123456789 * 10^0$;
- $0{,}0000107_8 = 0{,}1078 * 8^{-4}$; (порядок записан в десят. системе)
- $1000{,}0001_2 = 0{,}10000001_2 * 2^4$.

Нормализованная запись нуля в десятичной системе будет такой: $0 = 0{,}0 * 10^0$.

Представление чисел с плавающей точкой

При представлении чисел с плавающей точкой часть разрядов ячейки памяти отводится для записи порядка числа, остальные разряды - для записи мантиссы. По одному разряду (биту) в каждой группе отводится для изображения знака порядка и знака мантиссы. Для того чтобы не хранить знак порядка, был придуман так называемый **смещенный порядок**, который рассчитывается по формуле

$$2^{a-1} -1+ \text{ИП (истинный порядок)}$$

где a - количество разрядов, отводимых под порядок.

Пример:

Если истинный порядок равен -5, тогда смещённый порядок для 4-байтового числа (из которых 1 байт выделен на порядок) будет равен $2^{8-1}-1+(-5)=128-1+(-5)=122$.

Алгоритм представления числа с плавающей запятой

1. перевести число из Р-ичной системы счисления в двоичную;
2. представить двоичное число в нормализованной экспоненциальной форме;
3. рассчитать смещённый порядок числа;
4. разместить знак, порядок и мантиссу в соответствующие биты ячейки памяти.

Пример:

Представить число -25,625 в машинном виде с использованием 4 байтового представления (где 1 бит отводится под знак числа, 8 бит - под смещённый порядок, остальные биты - под мантиссу).

Этап 1: Представление числа -25,625 в двоичном виде

Целая часть:

$25_{10} = 11001_2$;

Дробная часть:

$$\begin{array}{r|l} 0 & ,625 \\ \times & \quad 2 \\ \hline 1 & ,250 \\ \times & \quad 2 \\ \hline 0 & ,500 \\ \times & \quad 2 \\ \hline 1 & ,000 \end{array}$$

$0{,}625_{10} = 0{,}101_2$;

$-25{,}625_{10} = -11001{,}101_2$.

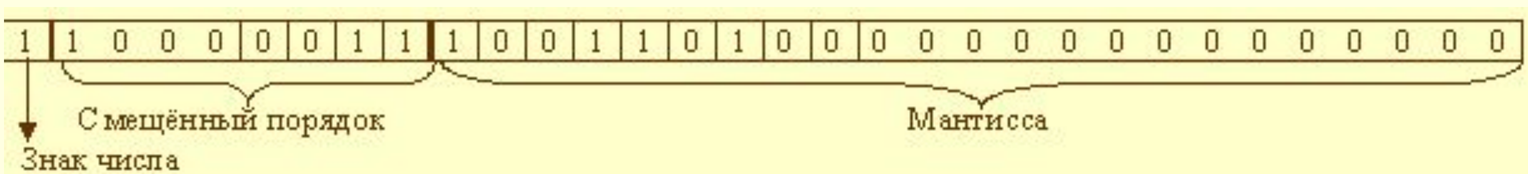
- Этап 2: Преобразование в экспоненциальную форму:

$$-100011{,}101_2 = -1{,}00011101_2 \cdot 2^4$$

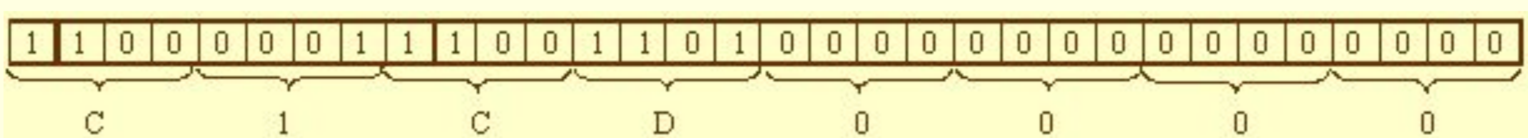
- Этап 3: Расчет смещенного порядка:

$$СП = 127 + 4 = 131 = 10000011_2$$

- Этап 4: Заносим все это в ячейку памяти:



Представление действительного числа не очень удобно изображать в двоичной системе, поэтому часто используют шестнадцатеричное представление:



Двоичная арифметика - сложение

Пример. Сложить двоичные числа 1101_2 и 11011_2.

Запишем слагаемые в столбик и пронумеруем разряды, присвоив младшему разряду номер 1:

5 4 3 2 1

- \+ 1 1 0 1
- 1 1 0 1 1

разряд 1: 1 + 1 = 10; 0 остается в разряде 1, 1 переносится во второй разряд;

разряд 2: 0 + 1 + 1 = 10, где вторая 1 - единица переноса; 0 остается в разряде 2, 1 переносится в третий разряд;

разряд 3: 1 + 0 + 1 = 10, где вторая 1 - единица переноса; 0 остается в разряде 3, 1 переносится в разряд 4;

разряд 4: 1 + 1 + 1 = 11, где третья 1 - единица переноса; 1 остается в разряде 4, 1 переносится в пятый разряд;

разряд 5: 1 + 1 = 10; где вторая 1 - единица переноса; 0 остается в разряде 5, 1 переносится в шестой разряд.

Таким образом:

- 1 1 0 1
- \+ 1 1 0 1 1
- 1 0 1 0 0 0

Для проверки определим десятичные значения слагаемых и результата:

$$1101_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13;$$

$$11011_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27;$$

$$101000_2 = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 32 + 0 + 8 + 0 + 0 + 0 = 40.$$

Поскольку 13 + 27 = 40, двоичное сложение выполнено верно.

Двоичная арифметика - вычитание

Пример. Вычесть из двоичного числа 101_2 двоичное число 11_2.

Запишем алгебраические слагаемые в столбик в порядке "уменьшаемое - вычитаемое" и пронумеруем разряды, присвоив младшему разряду номер 1:

3 2 1

- -1 0 1
- 1 1

разряд 1: 1 - 1 = 0;

разряд 2: поскольку 0 меньше 1 и непосредственное вычитание невозможно, занимаем для уменьшаемого единицу в старшем разряде. Тогда разряд 2 рассчитывается как 10 - 1 = 1;

разряд 3: поскольку единица была занята в предыдущем шаге, в разряде остался 0.

Таким образом:

- 1 0 1
- \- 1 1
- 1 0

Для проверки определим десятичные значения слагаемых и результата:

- $101_2 = 5$;
- $11_2 = 3$;
- $10_2 = 2$.

Поскольку 5 - 3 = 2, вычитание выполнено верно.

Двоичная арифметика - умножение

Пример. Умножить двоичное число 101_2 на двоичное число 11_2.

Запишем множители в столбик и пронумеруем разряды, присвоив младшему разряду номер 1:

3 2 1

- 1 0 1
- 1 1

умножение множимого на разряд 1 множителя дает результат: $101_2 * 1_2 = 101_2$;

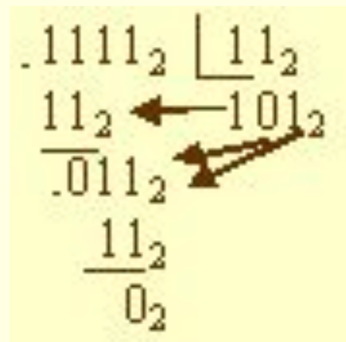
умножение множимого на разряд 2 множителя дает результат: $101_2 * 10_2 = 1010_2$. Здесь значение разряда 2 множителя сформировано по принципам формирования значения числа в позиционных системах счисления;

для получения окончательного результата складываем результаты предыдущих шагов: $101_2 + 1010_2 = 1111_2$.

Двоичная арифметика - деление

Пример. Разделить двоичное число 1111_2 на двоичное число 11_2.

Решение задачи представим схемой:

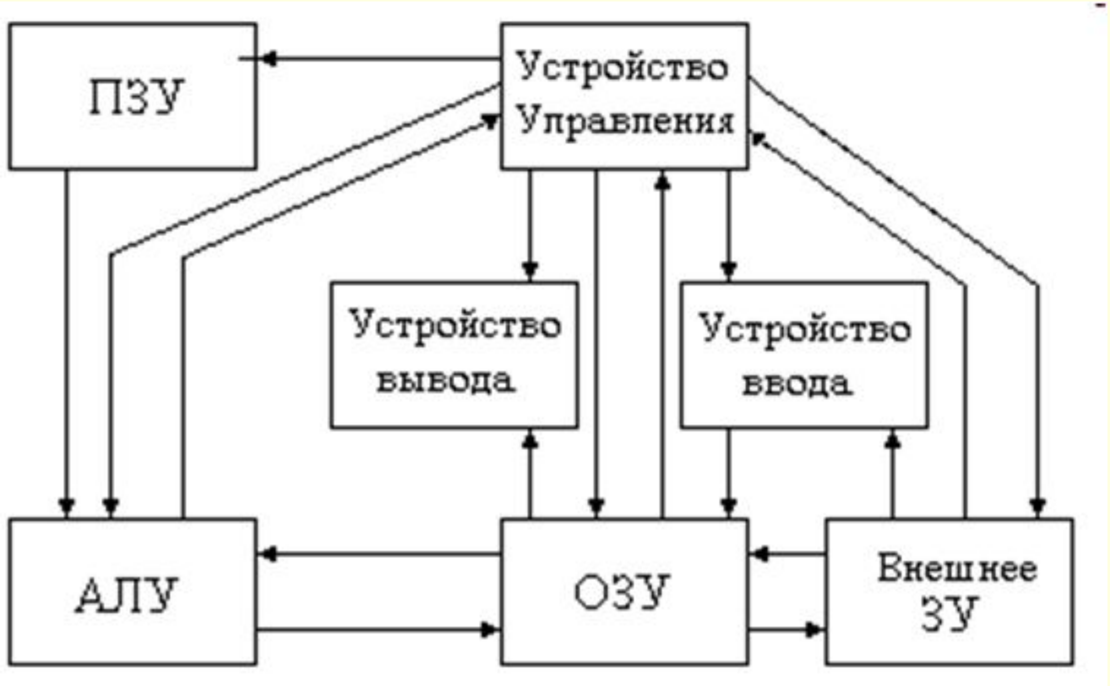


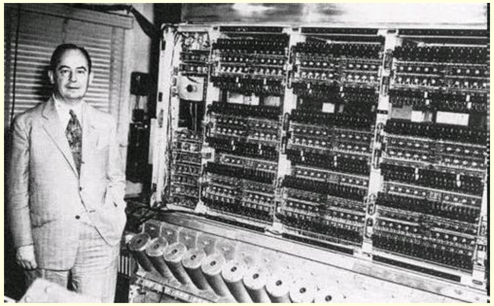
Для проверки правильности результата преобразуем двоичные числа в десятичные:

- $1111_2 = 15$;
- $11_2 = 3$;
- $15 / 3 = 5$;
- $5 = 101_2$.

Деление выполнено верно.

Как считает компьютер





Структура компьютера с хранимой программой
по Дж. фон Нейману

Все расчеты, которые выполняет компьютер, в конечном итоге базируются всего на одной операции - сложении. Вычитание - это сложение уменьшаемого с дополнительным кодом вычитаемого. Умножение - это более сложная операция в виде циклического сложения первого множителя с самим собой, сдвигаемым влево на каждом шаге цикла. Деление - это циклическая комбинация умножений и вычитаний, то есть, в конечном итоге, все тех же сложений.

Все, что должен знать процессор:

0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1; 1 + 0 = 1;
1 + 1 = 0 (перенос)