Свойства эквивалентных бесконечно малых

1. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ и $\beta(x) \sim \gamma(x)$ то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ при $x \to x_0$

пропустить 3 клеточки

2. Сумма б.м. величин разного порядка малости эквивалентна слагаемому низшего порядка малости.

пропустить 30 клеточек

3. При вычислении пределов произведения и частного б.м. величины можно заменять их эквивалентами.

пропустить 15 клеточек

4. Критерий эквивалентности двух б.м.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \to x_0$.

$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ *или* $o(\beta(x))$

пропустить 30 клеточек

§ 7. Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ б.м.ф. при $x \to x_0$. Рассмотрим $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

Опр. 33. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. одного порядка малости, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$$

Опр. 34. $\alpha(x)$ – б.м. высшего порядка малости относительно $\beta(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

пишут: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ или $\alpha(x) \ll \beta(x)$

Опр. 35. $\alpha(x)$ – б.м. низшего порядка малости относительно $\beta(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$$

пишут: $\beta(x) = o(\alpha(x))$ или $\beta(x) \ll \alpha(x)$

Опр. 36. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \nexists$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ не сравнимы между собой

пропустить 10 клеточек

Теорема 6. Произведение б.м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть б.м. высшего порядка малости по сравнению с каждым из сомножителей.

пропустить 5 клеточек $\alpha(x)\beta(x) \ll \alpha(x)$

Опр. 37. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \to x_0$.
$\alpha(x)$ называется б.м. k - го порядка малости относительно $\beta(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = A \neq 0: \quad \begin{cases} 0 < k < 1 & - \ \alpha \gg \beta \\ 1 < k < \infty & - \ \alpha \ll \beta \\ k = 1 & - \ \alpha \text{ и } \beta \text{ одного порядком малости} \end{cases}$$

Число $\boldsymbol{k}$ называется порядком малости

пропустить 20 клеточек

Сравнение бесконечно больших функций. Эквивалентные бесконечно большие

Опр. 38. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ б.б.ф. при $x \to x_0$. Рассмотрим $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

1. Б.б. $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ называются б.б. одного порядка роста, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$$

2. Б.б. $f(x)$ – низшего порядка роста относительно $g(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

пишут: $f(x) \ll g(x)$

3. Б.б. $f(x)$ – б.б. высшего порядка роста относительно $g(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

пишут: $f(x) \gg g(x)$

4. Б.б. $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ называются эквивалентными, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

пишут: $f(x) \sim g(x)$

Свойства

1. Сумма б.б. величин разных порядков эквивалентна слагаемому высшего порядка роста.

2. При вычислении пределов произведения и частного б.б. величины можно заменять их эквивалентами.

3. Произведение двух б.б.ф. имеет высший порядок роста относительно каждого из сомножителей

§ 8. Свойства непрерывных на отрезке функций.

Опр. 39. Функция, определенная на отрезке $[\,a, b\,]$ и непрерывная в каждой его точке, называется непрерывной на этом отрезке.

Свойства

Т. 1. (теорема Вейерштрасса об ограниченности и достижении непрерывных на отрезке функций своих точных границ)
Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем своих точных верхней и нижней границы

Т. 2. (теорема Коши о промежуточном значении)
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[\,a, b\,]$ и на концах отрезка $f(a) \neq f(b)$.
Тогда $\forall C \in [f(a), f(b)]$ найдется хотя бы одна точка $\xi \in [\,a, b\,]$ такая, что $f(\xi) = C$.

Т. 3. (об обращении непрерывной функции в ноль)
Если функция $f(x)$ непрерывна на $[\,a, b\,]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то на $[\,a, b\,]$ существует хотя бы одна точка $x = \xi$, в которой $f(x)$ обращается в ноль.