ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

7.1. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования

Интегрирование функции $f(x)$ — это операция отыскания (для данной функции $f(x)$) так называемой *первообразной* функции.

Первообразной называют такую функцию $F(x)$, по отношению к которой исходная функция $f(x)$ является производной, т.е. $f(x) = F'(x)$.

Например, для функции $f(x) = 2x^2 - 3x$ первообразной будет $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, точнее, *семейство* первообразных $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная. Действительно, легко убедиться, что

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C\right)' = 2x^2 - 3x.$$

Переход $f(x) \to [F(x) + C]$ есть *операция интегрирования* функции $f(x)$.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Геометрически неопределенный интеграл представляет семейство плоских кривых, смещенных друг относительно друга вдоль вертикальной оси.

Таблица основных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$$

Методы интегрирования

представляется в виде

Метод разложения $\int f(x)dx \Rightarrow$ сумма табличных интегралов

Метод подстановки (замены переменной) $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

Метод интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$

П р и м е р ы

Метод разложения

$$\int (x^2+7x-5)dx = \int x^2 dx + \int 7x dx - \int 5 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + C.$$

Проверка. $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + C\right)' = \frac{3x^2}{3} + \frac{14x}{2} - 5 = x^2 + 7x - 5.$

Метод подстановки (замены переменной)

Найти $\int (4x-3)^2 dx.$

Введем новую переменную, положив $u = 4x-3$,

$$du = (4x-3)' dx = 4dx, \quad dx = \frac{du}{4}.$$

Внесем эти выражения в интеграл

$$\int u^2 \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^2 du = \frac{1}{4}\frac{u^3}{3} + C.$$

Сделаем обратную замену

$$\frac{1}{4}\frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x-3)^3}{12} + C.$$

Интегрирование по частям

Требуется найти интеграл $\int xe^x dx$.

Положим

$$U = x,\ dV = e^x\,dx. \text{ Тогда } dU = dx,\ V = e^x$$

и

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Проверка. $(xe^x - e^x + C)' = xe^x + e^x - e^x = xe^x.$

Упражнения. Найти:

а) $x^6 dx$; б) $\int (x - x^3)dx$; в) $\int x^2(x^2 + 3)dx$; г) $\int \sin 7x dx$;

д) $\int \cos(3x + 7)dx$; е) $\int x \ln x \, dx$ (принять $U = \ln x$).

7.2. Определенный интеграл

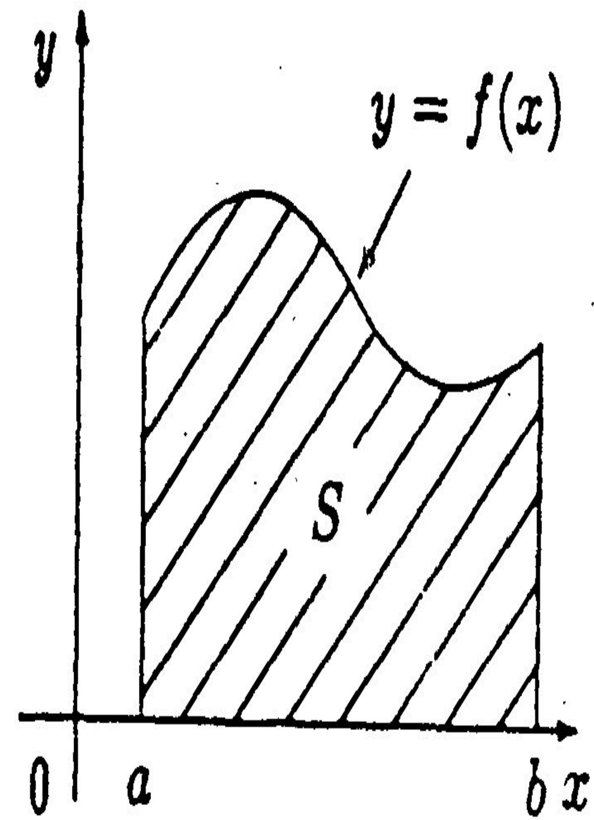
Интеграл можно определить как предел интегральных сумм.

Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$	$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S$

С помощью интегральных сумм можно приближенно вычислять самые различные величины.

Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции: $F(b)-F(a)$, т.е. (формула Ньютона—Лейбница)

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$$



Геометрический смысл определенного интеграла

Примеры. Вычислить:

а) $\int\limits_1^2 x^2\,dx$; б) $\int\limits_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx$.

а) $\int\limits_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$.

б) $\int\limits_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx = \int\limits_0^8 \sqrt{2x}\,dx + \int\limits_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^8 + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^8 = \frac{16^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3}0 + \frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}0 = \frac{100}{3}.$$

Упражнение. Найти числа, получающиеся при использовании в интеграле $\int_1^2 f(x)\,dx$ следующих функций:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; б) $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

Ответ. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{8}$.

Пример. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y = \sin x$ и осью абсцисс, если $x \in [0, \pi]$.

Для ответа на поставленный вопрос следует вычислить определенный интеграл

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -((-1) - 1) = 2 \text{ ед.}^2.$$

П р и м е р. *Интегрирование по частям* в определенном интеграле

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \sin x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\cos 0\right) + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Здесь

$$U = x,\ dU = dx,\ dV = \sin x\,dx,\ V = -\cos x.$$