

Числовые ряды

Опр. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-сть. Беск. сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_n + \dots$ - числ. ряд

$\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n + \dots$. a_n - n -й элем (слагаемое).

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$ - (n -я) частичная сумма ($\sum_{k=n_0}^n a_k = S_n$)

Опр. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (кон. число), то ряд назыв. сходящийся,

а S - сумма сх-ся ряда ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty (+\infty, -\infty)$,

то ряд наз. расх-ся, но можно написать $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty (+\infty, -\infty)$. Если

$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд наз. расх-ся.

Ясно, что добавление, отбрасывание, изменение нек-го конечного числа элемов (слагаемых) ряда не влияет на его сх-сть (расх-сть), но влияет на сумму.

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд с.с., т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд с.с., т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд с.с., т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд с.с., т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

4. $q = 1 \Rightarrow$ расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд с.с., т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

4. $q = 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \dots$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots, \text{ расх.}$$

Числовые ряды

Опр. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-сть. Беск. сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_n + \dots$ - числ. ряд.

$\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n + \dots$. a_n - n -й член (слагаемое).

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$ - (n -я) частичная сумма ($\sum_{k=n_0}^n a_k = S_n$)

Опр. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (кон. число), то ряд назыв. сходящимся,

S - сумма сх-ся ряда ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty (+\infty, -\infty)$,

то ряд наз. расх-ся, но можно написать $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty (+\infty, -\infty)$. Если

$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд наз. расх-ся.

Ясно, что добавление, отбрасывание, изменение нек-го конечного числа членов (слагаемых) ряда не влияет на его сх-сть (расх-сть), но влияет на сумму.

Из св-в посл-стей $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ (A, B - кон. числа)

то $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B, \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сх.)}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} = S$$

У сх-ся посл-ств \forall подпослед-ств сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(\text{сх.})$

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (согласн. закон)

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

4. $q = 1 \Rightarrow$ расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \dots$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots, \text{ расх.}$$

В расх.-ся ряде скобки расставлять нельзя.

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

4. $q = 1 \Rightarrow$ расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \dots$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ расх.}$$

В расх.-ся ряде скобки расставлять нельзя.

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \quad S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

4. $q = 1 \Rightarrow$ расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \dots$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ расх.}$$

В расх.-ся ряде скобки расставлять нельзя.

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \quad S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S, \text{ т.е. } S = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сч.)}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} = S$$

У сч-ся посл-ств \forall подпослед-ств сч. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(\text{сч.})$

т.е. в сч-ся ряде можно расставлять скобки (согласно закону)

Связь рядов и посл-ствей - двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-ств. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сх.)}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} = S$$

У сх-ся посл-ой \forall подпосл-ость сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(\text{сх.})$

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (соедая. закон)

Связь рядов и посл-остей - двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-ость. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n.$$

Критерий Коши для посл-остей. $\{S_n\}$ сх. $(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$$

(вместо m, n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сх.)}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} = S$$

У сх-ся посл-ств \forall подпослед-ств сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(\text{сх.})$

Т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (согласн. закону)

Связь рядов и посл-ствей - двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-ств. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n.$$

Критерий Коши для посл-ствей. $\{S_n\}$ сх. $(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Критерий Коши для рядов, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сх.)}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У сх-ся посл-ст \forall подпол-ств сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(\text{сх.})$

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (ассоциат. закон)

Связь рядов и посл-стей - двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-ств. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n$$

Критерий Коши для посл-ств. $\{S_n\}$ сх. $(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Критерий Коши для рядов. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$

Необх. признак сх-сти ряда. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сх.)}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У сх-ся посл-ой \forall подпослед-ость сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S$ (сх.)

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (соединяя закон)

Связь рядов и посл-ей - двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-ость. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n$$

Критерий Коши для посл-ей. $\{S_n\}$ сх. $(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Критерий Коши для рядов. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$

Необх. признак сх-ости ряда. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Д-во. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$
 Д-во.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сх.)}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У сх-ого посл-ой \forall подпослед-ость сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S$ (сх.)

т.е. в сх-ом ряде можно расставлять скобки (соединяя закон)

Связь рядов и посл-остей - двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-ость. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n.$$

Критерий Коши для посл-остей. $\{S_n\}$ сх. $(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Критерий Коши для рядов. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$

Необх. признак сх-ости ряда. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

Д-во. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$
Д-во.

Работает как признак расхождености.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, |q| \geq 1 \text{ (2, 3, 4, 5)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ расх.}$$

Неодх. признак не авл. Достат., если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то необходимо, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Необх. признак не абс. достат., если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то необходимо, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Пример. $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ - гармонич. ряд

Отрицательное кр. Коши: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists m > n > N : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \geq \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \forall N \exists n = N+1 > N, \exists m = 2n > n > N \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| =$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ оцр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ - сумма ряда

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ опр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ - сумма ряда

Д-во. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., т.е. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сх. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, т.е. $S_n \uparrow$, а для таких посл-ствей есть соотв. теорема. Теорема Д-зана.

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ опр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ - сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не опр. сверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

T1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ опр. сверху. При этом $S = \sup \{S_n\}$ - сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не опр. сверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

T2 (Признак срав.) , $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

T1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с.х. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ о.р. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ - сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не о.р. сверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

T2 (Признак сравн.). $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с.х. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с.х.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

Д-во. $A_n = a_1 + \dots + a_n$, $B_n = b_1 + \dots + b_n$. $A_n \leq B_n$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с.х. $\xrightarrow{T1} \{B_n\}$ - о.р. сверху, $\Rightarrow \{A_n\}$ о.р. сверху, $\xrightarrow{T1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с.х.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с.х. $\xrightarrow{1.} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с.х., противор. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

Теор. 2-запа.

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ опр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ - сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не опр. сверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

Т2 (Признак сравн.), $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

Сл. $a_n \geq 0, b_n > 0, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. или расх. одновременно.

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ опр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ - сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не опр. сверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

Т2 (Признак сравн.), $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

Сл. $a_n \geq 0, b_n > 0, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. или расх. одновременно.

Д-во. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0: \forall n \geq n_0 \left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon$ ($n_0 = N+1$)

$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$. $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0 \exists n_0: \forall n \geq n_0 \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2}$, т.е.

$\frac{k}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3k}{2} \cdot b_n, \frac{2}{3k} \cdot a_n < b_n < \frac{2}{k} a_n$. Отсюда всё следует. Сл. д-во.