Числовые ряды

Опр. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числ. посл-сть. Беск. сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ – числ. ряд.

$\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty} \Rightarrow \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n + \ldots$. a_n – n-й член (слагаемое).

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n$ – (n-я) частичная сумма $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k = S_n\right)$

Опр. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (кон. число), то ряд назыв. сходящимся, а S – сумма сх-ся ряда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S\right)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(+\infty, -\infty)$, то ряд наз. расх-ся, но можно написать $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ $(+\infty, -\infty)$. Если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд наз. расх-ся.

Ясно, что добавление, отбрасывание, изменение нек-го конечного числа членов (слагаемых) ряда не влияет на его сх-сть (расх-сть), но влияет на сумму.

Пример. $a_n = q^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

Пример. $a_n = q^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

Пример. $a_n = q^n \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

Пример. $a_n = q^n \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$
2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$
3. $q < -1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$
4. $q = 1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$

$$S_n = 1+q+\ldots+q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$
2. $q>1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$
3. $q<-1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$
4. $q=1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$
5. $q=-1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \ldots,$ т.е.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\ldots$ расх.

Числовые ряды

Опр. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-сть. Беск. сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ - числ. ряд

$\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty} \Rightarrow \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n + \ldots$. a_n - n-й член (слагаемое).

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n$ - (n-я) частичная сумма $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k = S_n\right)$

Опр. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (кон. число), то ряд назыв. сходящимся, а S - сумма сх-ся ряда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S\right)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty\ (+\infty, -\infty)$, то ряд наз. расх-ся, но можно написать $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty\ (+\infty, -\infty)$. Если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд наз. расх-ся.

Ясно, что добавление, отбрасывание, изменение нек-го конечного числа членов (слагаемых) ряда не влияет на его сх-ть (расх-ть), но влияет на сумму.

Из св-в посл-стей $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ (A, B - кон. числа)

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot A_n = c \cdot A$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сх.)}.$$

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \ldots + \ldots a_{k_2}}_{b_2} + \ldots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \ldots + a_{k_p}}_{b_p} + \ldots = S$$

У сх-ся посл-ти $\forall$ подпосл-ть сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S$ (сх.),

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (сочетат. закон)

Пример. $a_n = q^n$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$
2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$
3. $q < -1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$
4. $q = 1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$
5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ S_2 = 1,\ S_3 = 0,\ \ldots,$ т.е.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расх.

В расх-ся ряде скобки расставлять нельзя.

$S = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0$

Пример. $a_n = q^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$
2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$
3. $q < -1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$
4. $q = 1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$
5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \ldots,$ т.е.

   $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расх.

В расх-ся ряде скобки расставлять нельзя.

$S = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 \qquad S = 1 - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сх-ся, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$
2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$
3. $q < -1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$
4. $q = 1 \Rightarrow$ расх., $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$
5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \ldots,$ т.е.
   $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расх.

В расх-ся ряде скобки расставлять нельзя.

$S = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0$ $\quad S = 1 - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1$

$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S$, т.е. $S = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S$$ (кон. число, т.е. ряд сх.).

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \ldots + \ldots a_{k_2}}_{b_2} + \ldots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \ldots + a_{k_p}}_{b_p} + \ldots = S$$

У сх-ся посл-сти $\forall$ подпосл-ть сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S$ (сх.),

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (сочетат. закон)

Связь рядов и посл-стей - двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-ть. $a_1 = u_1,\ a_2 = u_2 - u_1,\ \ldots,\ a_n = u_n - u_{n-1}, \ldots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \ldots + \underline{u_n} - u_{n-1} = u_n.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S$ (кон. число, т.е. ряд сх.).

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \ldots + \ldots a_{k_2}}_{b_2} + \ldots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \ldots + a_{k_p}}_{b_p} + \ldots = S$$

У сх-ся посл-ти $\forall$ подпосл-ть сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p = S$ (сх.),

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (сочетат. закон)

Связь рядов и посл-стей – двусторонняя. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числ. посл-ть. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \ldots, a_n = u_n - u_{n-1}, \ldots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \ldots + \underline{u_n} - u_{n-1} = u_n.$$

<u>Критерий Коши</u> для посл-стей. $\{S_n\}$ сх. $(\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$

(вместо m, n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S$$ (кон. число, т.е. ряд сх.).

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + \dots a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У сх-ся посл-сти ∀ подпосл-ть сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S$ (сх.),

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (сочетат. закон)

Связь рядов и посл-стей – двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числ. посл-ть. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + \underline{u_n} - u_{n-1} = u_n.$$

<u>Критерий Коши</u> для посл-стей. $\{S_n\}$ сх. $(\exists \lim_{n\to\infty} S_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$

(вместо m, n)

<u>Критерий Коши</u> для рядов. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > n > N \ \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сх.)}.$$

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \ldots + \ldots a_{k_2}}_{b_2} + \ldots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \ldots + a_{k_p}}_{b_p} + \ldots = S$$

У сх-ся посл-ти $\forall$ подпосл-ть сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S$ (сх.)

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (сочетат. закон)

Связь рядов и посл-тей – двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числ. посл-ть. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \ldots, a_n = u_n - u_{n-1}, \ldots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \ldots + \underline{u_n} - u_{n-1} = u_n.$$

Критерий Коши для посл-тей. $\{S_n\}$ сх. $(\exists \lim_{n\to\infty} S_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > n > N \ |S_m - S_n| < \varepsilon$

Критерий Коши для рядов. (вместо m, n) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > n > N \ \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

Необх. признак сх-ти ряда. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S$ (кон. число, т.е. ряд сх.).

$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \ldots + \ldots a_{k_2}}_{b_2} + \ldots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \ldots + a_{k_p}}_{b_p} + \ldots = S$

У сх-ся посл-ти $\forall$ подпосл-ть сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S$ (сх.),

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (сочетат. закон)

Связь рядов и посл-тей – двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числ. посл-ть. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \ldots, a_n = u_n - u_{n-1}, \ldots$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \ldots + \underline{u_n} - u_{n-1} = u_n$.

<u>Критерий Коши</u> для посл-тей. $\{S_n\}$ сх. $(\exists \lim_{n\to\infty} S_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$

(вместо m, n)

<u>Критерий Коши</u> для рядов. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall m > n > N \ \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$.

<u>Необх. признак сх-ти ряда.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Д-во. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S, \exists \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$

Д-зано.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S$ (кон. число, т.е. ряд сх.).

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \ldots + \ldots a_{k_2}}_{b_2} + \ldots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \ldots + a_{k_p}}_{b_p} + \ldots = S$$

У сх-ся посл-сти $\forall$ подпосл-ть сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S$ (сх),

т.е. в сх-ся ряде можно расставлять скобки (сочетат. закон)

Связь рядов и посл-стей – двусторонняя. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числ. посл-ть. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \ldots, a_n = u_n - u_{n-1}, \ldots$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \ldots + \underline{u_n} - u_{n-1} = u_n.$

<u>Критерий Коши</u> для посл-стей. $\{S_n\}$ сх. $(\exists \lim_{n\to\infty} S_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$

<u>Критерий Коши</u> для рядов. (вместо m, n) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > n > N \ \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$

<u>Необх. признак сх-сти ряда.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Д-во. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S, \exists \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$

Д-зано.

Работает как признак расходимости.

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \ |q| \geq 1 \ (2,3,4,5) \ \lim_{n\to\infty} q^n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ расх.

Необх. признак не явл. достат., если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то необязат. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Необх. признак не явл. достат., если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то необязат. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.

Пример. $a_n = \frac{1}{n} \to 0 \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ – гармонич. ряд

Отрицание кр. Коши: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists m > n > N : \left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\right| \geq \varepsilon$.

$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \ \forall N \ \exists n = N+1 > N, \exists m = 2n > n > N \quad \left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right| =$

$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный, если $a_n \geq 0$ $\forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ огр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ – сумма ряда

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный, если $a_n \geq 0 \ \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ огр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ - сумма ряда

Д-во. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх, т.е. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сх. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, т.е. $S_n \uparrow$, а для таких посл-бей есть соотв. теорема. Теорема д-зана.

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ огр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ – сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не огр. сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\right)$

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный, если $a_n \geq 0 \ \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ огр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ – сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не огр. сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\right)$

Т2 (Признак срав.). $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

Знакоположительные числовые ряды

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

<u>Т1.</u> $a_n \geq 0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ огр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ – сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не огр. сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\right)$

<u>Т2</u> (Признак срав.). $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

Д-во. $A_n = a_1 + \ldots + a_n$, $B_n = b_1 + \ldots + b_n$. $A_n \leq B_n$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\overset{T1}{\Rightarrow} \{B_n\}$ – огр. сверху, $\Rightarrow \{A_n\}$ огр. сверху, $\overset{T.1}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\overset{1.}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., противор. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

Теор. д-зана.

Знакоположительные числовые ряды

<u>Опр.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный, если $a_n \geq 0$ $\forall n$

<u>Т1.</u> $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ огр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ – сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не огр. сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\right)$

<u>Т2</u> (Признак срав.). $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

<u>Сл.</u> $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. или расх. одновременно.

Знакоположительные числовые ряды

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ огр. сверху. При этом $S = \sup\{S_n\}$ - сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не огр. сверху, то $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\right)$

Т2 (Признак срав.). $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

Сл. $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. или расх. одновременно.

Д-во. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon \quad (n_0 = N + 1)$

$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$. $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2}$, т.е.

$\frac{k}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3k}{2} \cdot b_n$, $\frac{2}{3k} \cdot a_n < b_n < \frac{2}{k} a_n$. Отсюда всё следует. Сл. д-зано.