

Числовые ряды

Оп. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-сть. Беск. сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_n + \dots$ - числ. ряд.

$\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n + \dots$. a_n - n-й член (слагаемое).

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$ - (n-я) частичная сумма $(\sum_{k=n_0}^n a_k = S_n)$

Оп. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (кон. число), то ряд назыв. сходящимся,

а S -сумма сх-ся ряда $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S)$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty (+\infty, -\infty)$,

то ряд наз. расход-ся, но можно написать $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty (+\infty, -\infty)$. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд наз. расход-ся.

Ясно, что добавление, отбрасывание, умножение нек-го конечного числа членов (слагаемых) ряда не влияет на его сх-ся (расх-ся), но

влияет на сумму.

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сходится, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сходится, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сходится, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сходится, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

4. $q = 1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сходится, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

4. $q = 1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \dots$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ расходится.}$$

Числовые ряды

Оп. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числ. посл-ст. Беск. сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_n + \dots$ - числ. ряд.

$\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n + \dots$. a_n - n -й член (слагаемое).

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$ - (n -я) частичная сумма. ($\sum_{k=n_0}^n a_k = S_n$)

Оп. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (кон. число), то ряд назыв. сходящимся, а S - сумма сх-ся ряда ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ($+\infty, -\infty$), то ряд наз. расход-ся, но можно написать $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ($+\infty, -\infty$). Если $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд наз. расход-ся.

Ясно, что добавление, отbrasывание, изменение нек-го конечного числа членов (слагаемых) ряда не влияет на его сх-ся (расх-ся), но влияет на сумму.

Из сх-ся посл-стей $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ (A, B - кон. числа)

то $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B, \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. число, т.е. пред cx.).}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У cx-ся мож-ся видоизобр. cx. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(cx)$,

т.е. б cx-ся где можно расставить скобки (сочет. закон)

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сходится, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

4. $q = 1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \dots$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ расходится.}$$

В расходящемся ряду скобки расставляются нелегко.

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \quad , \quad (-) \quad ($$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сход., т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ ряд расход., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расход., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

4. $q = 1 \Rightarrow$ расход., $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \dots$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ расход.}$$

В расход-ся ряде скобки расставляются между.

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \quad S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Пример. $a_n = q^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n + 1, & q = 1 \end{cases}$$

1. $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \Rightarrow$ ряд сходится, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2. $q > 1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$

3. $q < -1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$

4. $q = 1 \Rightarrow$ расходится, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

5. $q = -1 \Rightarrow S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, \dots$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots, \text{ расходится.}$$

В расходящемся ряде скобки расставляются произвольно.

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \quad S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S, \text{ т.е. } S = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (как и выше, т.е. пред cx.).}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У cx-ов нач-ой и n-ой см-и об cx-k то же пределы $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(cx)$.

т.е. б cx-ов предел можно рассчитать скобки (состав. закон)

След. предел в нач-ой и n-ой см-и - 2буксированный. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - нач-ая см-я. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. сумма, т.е. пред сх.)}.$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У сх-са нач-ой и конечн.-ой сх. к конечн. пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(\text{сх})$.

т.е. в сх-се приде можно расставить скобки (соседн. знаки)

След. пред в нач-ой - двухсторонний. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - нач-ой нач-ой. $a_1 = u_2, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + \underline{u_n} - u_{n-1} = u_n.$$

Критерий Коши для нач-ой сх. $\{S_n\}$ сх. ($\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Leftrightarrow$)

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$$

(беск о m, n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сх.)}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У сх-са нач-ои \forall подсум.-ои сх. к конечное пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(\text{сх.})$

т.е. б сх-са ряде можно рассчитывать скобки (соседн. знакои)

След. ряды и нач-ои сх - двусосторонний. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - нач. нач-ои. $a_1 = u_2, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + \underline{u_n} - u_{n-1} = u_n.$$

Критерий Коши Для нач-ои сх. $\{S_n\}$ сх. ($\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$$

(беск. m, n) $\sum_{n=i}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. число, т.е. ряд сх.).}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У сх-са нач-ся и поднодч-ся сх. к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(\text{сх})$.

т. е. б сх-са ряде можно расставить скобки (согласн. закон)

Следует предел и нач-ся ей - 2вступления.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - нач-ся и поднодч-ся, $a_1 = u_2, a_2 = u_3 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + \underline{u_n} - u_{n-1} = u_n.$$

Критерий Коши для нач-ся $\{S_n\}$ сх. ($\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Leftrightarrow$)

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$$

(бескдом, m, n)

Критерий Коши для ряда, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$

Нескд. нулишак сх-са ряда, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (норм. нач., т.е. ряд сх.).}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У сх-са нач-ой А нодомын-об сх-к толык же нреденүй $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(\text{сх})$.

Т. е. б сх-са реде жокиа расстабысты скобки (сосетай. закон)

Сх-са редеб и нач-сің еї - 2бүстірекенді.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - нач-и нач-об. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + \underline{u_n} - u_{n-1} = u_n.$$

Критерий Коши Ешкы нач-сің еї. $\{S_n\}$ сх. ($\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$) \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$

(Барын м, n) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > n > N \quad |\sum_{k=n+1}^m a_k| < \varepsilon$.

Недх. нүзделк сх-са редо. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Д-бо. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$

D-3240.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (кон. члены, т.е. ряд сх.).}$$

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_{k_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}}_{b_2} + \dots + \underbrace{a_{k_{p-1}+1} + \dots + a_{k_p}}_{b_p} + \dots = S$$

У сх-са нач-ся и подпосл-ся. Сх-к тому же пределу $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} b_p = S(\text{сх})$.

т.е. в сх-са ряде можно рассматривать скобки (соседн. члены)

След. рядов и нач-ся ей - двусосторонний. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - нач-ся и подпосл-ся. $a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \dots, a_n = u_n - u_{n-1}, \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = u_1 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n.$$

Критерий Коши для нач-ся ей. $\{S_n\}$ сх. ($\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall m > n > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon$$

(беско m, n) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$.

Недр. признак сх-са ряда. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Д-бо. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$ D-закон .

Работает как признак расходимости.

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, |q| \geq 1$ (2, 3, 4, 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ расходим.

Несхр. признак не abs. Dociat., even $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то расходяч. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ex.

Несокр. признак не авт. Достат., если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то расходится, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ок.

Пример. $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ - расходится. п.20

Описание кр. Коши: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расход. $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists m > n > N : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \geq \varepsilon$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{2} > 0 \ \forall N \ \exists n = N+1 > N, \exists m = 2n > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Знакопонитательные числовые ряды

Онр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопонитательный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Знакопонимательные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопонимательный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

I 1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ оп. сверху. При этом $S = \sup \{S_n\}$ - сумма ряда

Знакоположительные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакоположительный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ оп. сверху. При этом $S = \sup \{S_n\}$ - сумма ряда

Д-бо. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх, т.е. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сх. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, т.е. $S_n \uparrow$, а для таких
неч-сей есть соотв. теорема.

Теорема Д-зана.

Знакопонимательные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопонимательный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ оп. сверху. При этом $S = \sup \{S_n\}$ - сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не оп. сверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

Знакопонимательные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопонимательный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ опр. сверху. При этом $S = \sup \{S_n\}$ - сумма ряда
Если $\{S_n\}$ не опр. сверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

Т2 (Признак срав.). $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх.}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расход.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ расход.}$$

Знакопонимательные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопонимательный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

T1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ оп. сверху. При этом $S = \sup \{S_n\}$ - сумма ряда

Если $\{S_n\}$ не оп. сверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

T2 (Признак срав.). $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх.}, \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расход.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ расход.}$$

Д-во. $A_n = a_1 + \dots + a_n$, $B_n = b_1 + \dots + b_n$. $A_n \leq B_n$

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх.} \stackrel{T1}{\Rightarrow} \{B_n\} \text{- оп. сверху,} \Rightarrow \{A_n\} \text{ оп. сверху,} \stackrel{T1}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх.}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расход.} \text{ Если } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх.} \stackrel{1}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх.,} \text{ противор.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ расход.}$$

Теор. 2-зака.

Знакопонимательные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопонимательный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

T1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ опр. сверху. При этом $S = \sup \{S_n\}$ - сумма ряда
если $\{S_n\}$ не опр. сверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

T2 (Признак срав.). $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх.} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ расх.}$$

C1. $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. или расх.
одновременно.

Знакопонимательные числовые ряды

Оп. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопонимательный, если $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Т1. $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Leftrightarrow \{S_n\}$ опр. сбрык. При этом $S = \sup \{S_n\}$ - сумма ряд

Если $\{S_n\}$ не опр. сбрык., то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$)

Т2 (Признак срав.). $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх.}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ расх.}$$

С1. $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх. или расх. одновременно.}$

Д-бо. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0: \forall n \geq n_0 \left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon$ ($n_0 = N+1$)

$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$. $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0 \exists n_0: \forall n \geq n_0 \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2}$, т.е.

$\frac{k}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3k}{2} \cdot b_n$, $\frac{2}{3k} \cdot a_n < b_n < \frac{2}{k} \cdot a_n$. Отсюда всё следует. С1. Д-зено.