



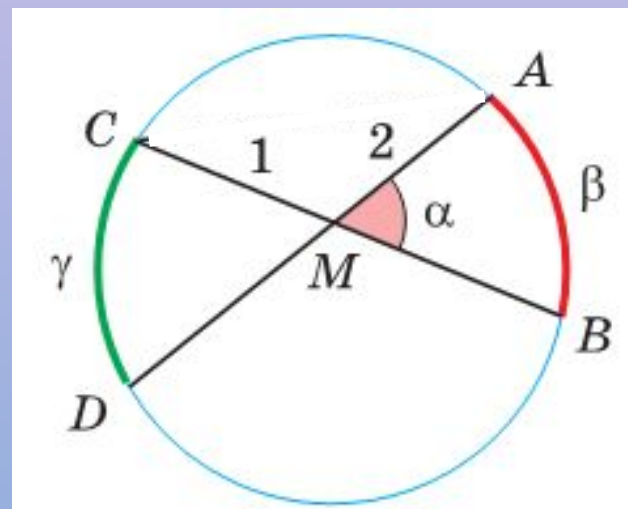
Углы, образованные хордами, секущими, касательными.

Свойство отрезков хорд и касательных

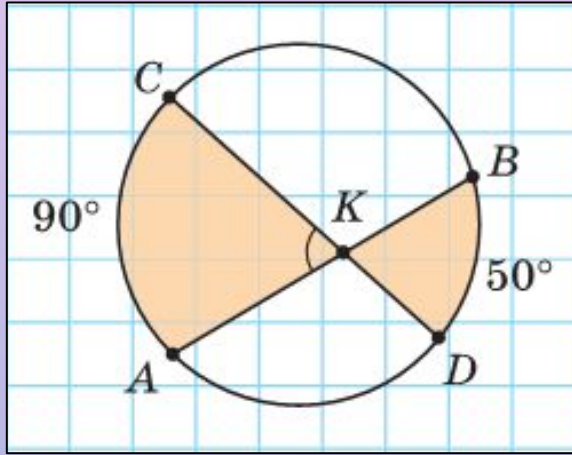
Углы, образованные хордами, секущими, касательными.

Теорема. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, заключённых внутри данного угла и угла, вертикального данному.

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$



Задача 1. Найдите $\angle AKC$, если $\cup AC=90^\circ$, $\cup BD=50^\circ$.

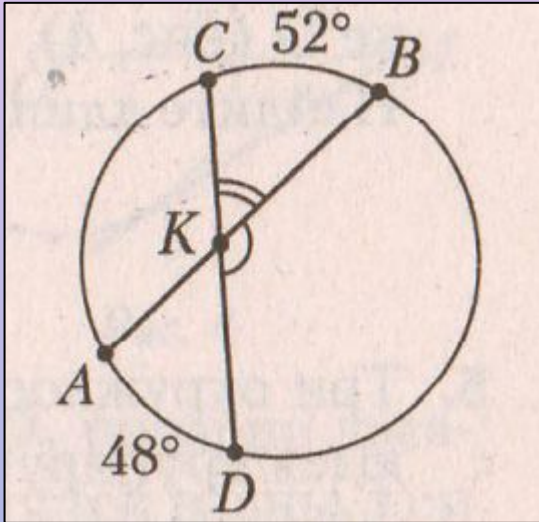


Решение:

$$\angle AKC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD) = \frac{1}{2}(90^\circ + 50^\circ) = 70^\circ$$

Ответ: $\angle AKC = 70^\circ$.

Задача 2. Найдите $\angle CKB$ и $\angle BKD$.



Решение:

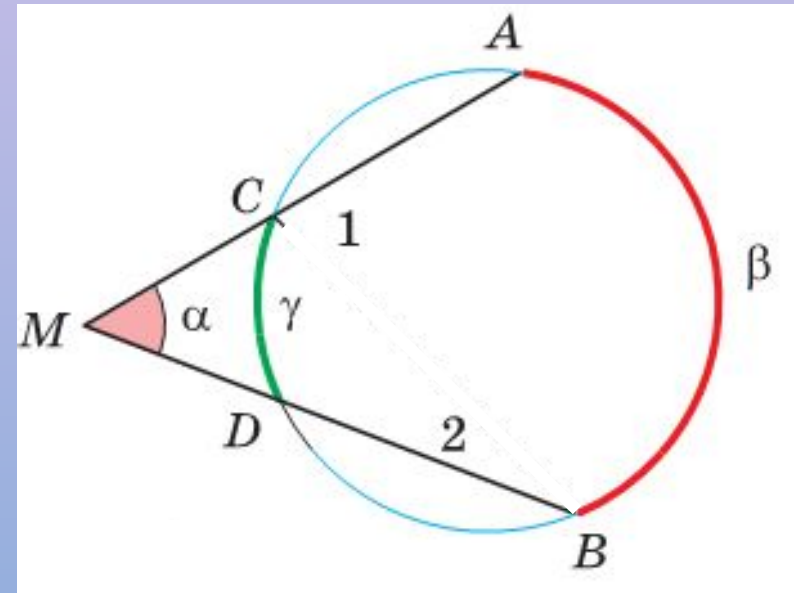
$$\angle CKB = \frac{1}{2}(\cup CB + \cup AD) = \frac{1}{2}(52^\circ + 48^\circ) = 50^\circ$$

$$\angle BKD = 180^\circ - \angle CKB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \text{ (смежные углы)}$$

Ответ: $\angle CKB = 50^\circ$, $\angle BKD = 130^\circ$.

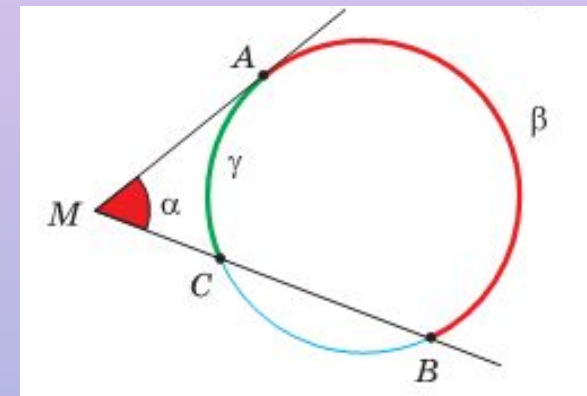
Теорема. Угол между секущими, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключённых внутри угла, то есть

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$



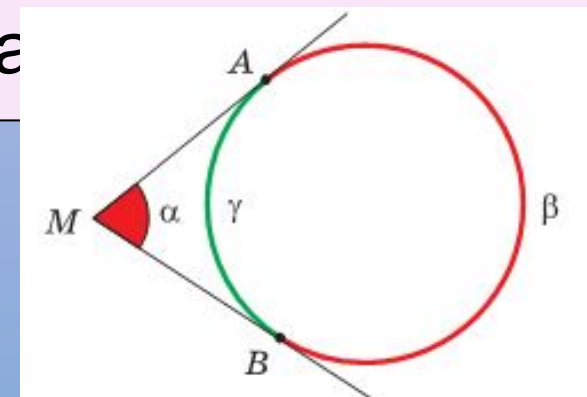
Свойство 1. Угол *между секущей и касательной*, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключённых внутри угла и ограниченных точками пересечения и точкой касания

$$\alpha = \frac{1}{2} (\beta - \gamma)$$

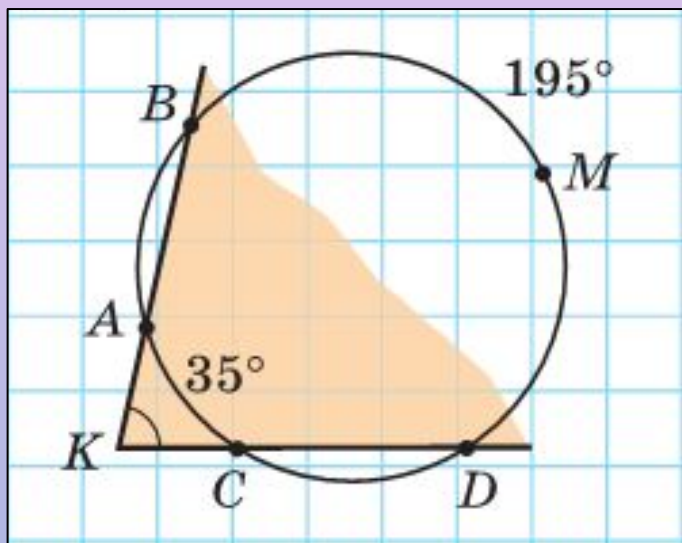


Свойство 2. Угол *между двумя касательными*, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключённых внутри угла и ограниченных точками

$$\alpha = \frac{1}{2} (\beta - \gamma)$$



Задача 3. Если $\cup BMD = 195^\circ$, $\cup AC = 35^\circ$, то чему равен $\angle BKD$.

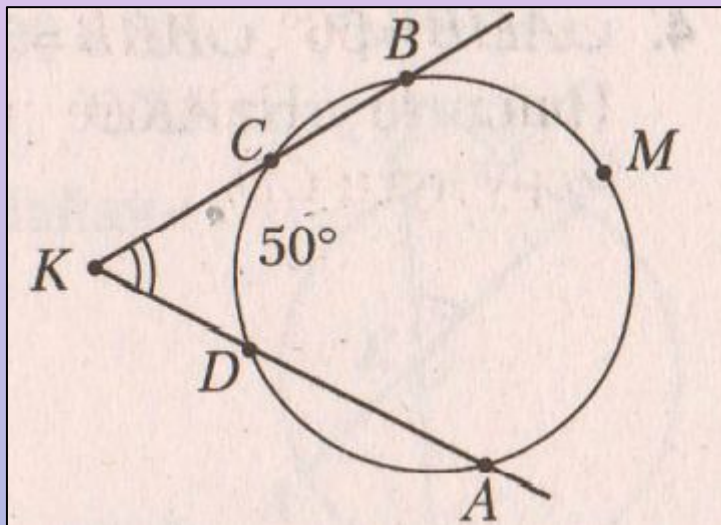


Решение:

$$\angle BKD = \frac{1}{2}(\cup BMD + \cup AC) = \frac{1}{2}(195^\circ + 35^\circ) = 115^\circ.$$

Ответ: $\angle BKD = 115^\circ$.

Задача 4. $\sphericalangle CD = 50^\circ$, $\sphericalangle CD : \sphericalangle AMB = 1 : 3$. Найдите угол АКВ.

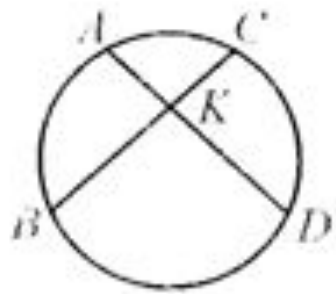


Решение:

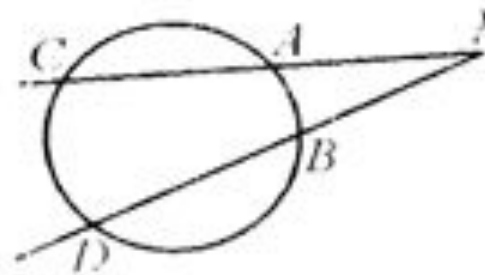
$$\sphericalangle AMB = 3 \sphericalangle CD = 150^\circ.$$

$$\sphericalangle АКВ = \frac{1}{2}(\sphericalangle AMB - \sphericalangle CD) = \frac{1}{2}(150^\circ - 50^\circ) = 50^\circ.$$

Ответ: $\sphericalangle АКВ = 50^\circ$.



6. $\cup AC = 40^\circ$, $\cup BD = 100^\circ$
 $\angle BKD = ?$

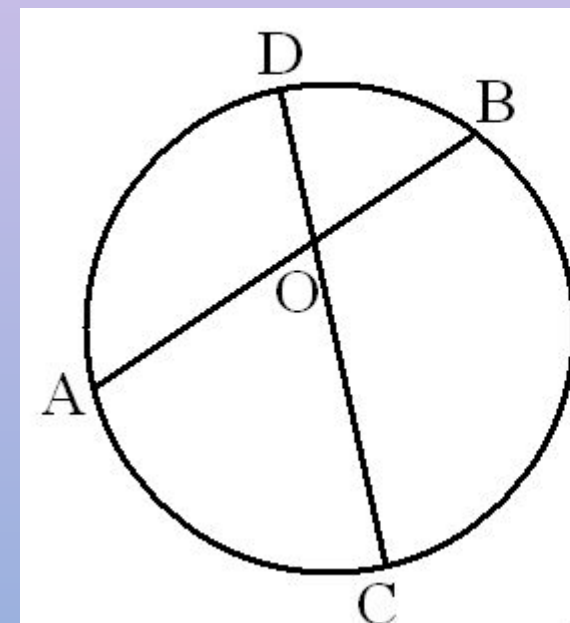


7. $\cup CD = 70^\circ$, $\cup AB = 30^\circ$
 $\angle M = ?$

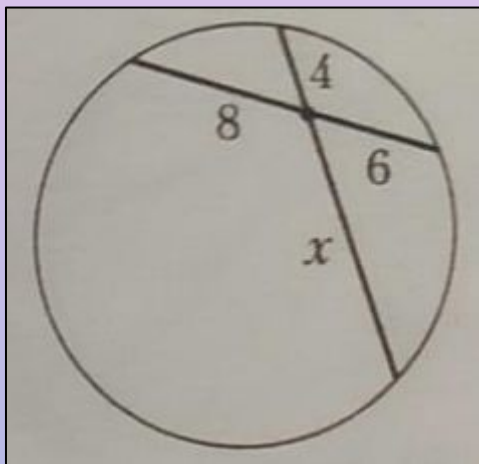
Свойство пересекающихся хорд

Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой.

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD$$



Задача 5. Найдите x .



Решение:

По свойству пересекающихся хорд

$$8 \cdot 6 = 4 \cdot x$$

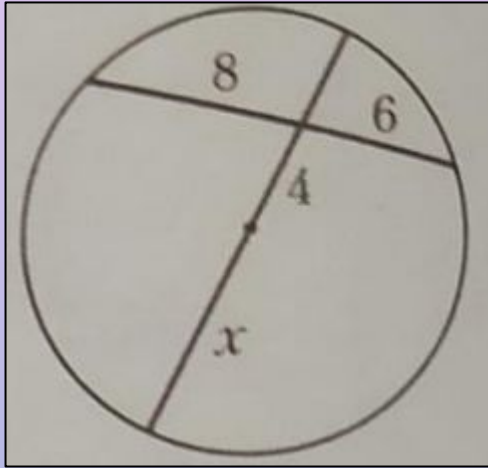
$$48 = 4 \cdot x$$

$$x = 48 : 4$$

$$x = 12$$

Ответ: 12.

Задача 6. Найдите x .



Решение:

По свойству пересекающихся хорд

$$8 \cdot 6 = (x + 4) \cdot (x - 4)$$

$$48 = x^2 + 4x - 4x - 16$$

$$48 = x^2 - 16$$

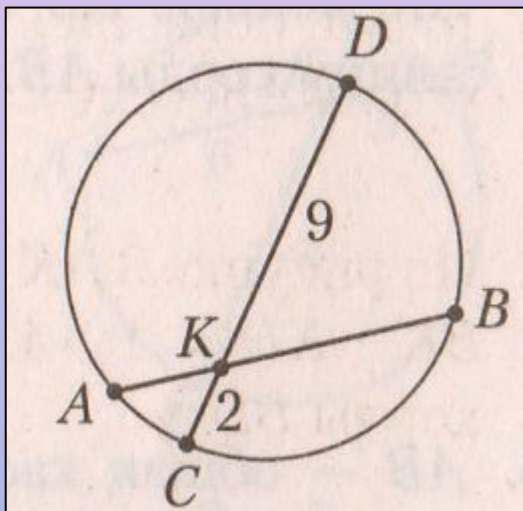
$$64 = x^2$$

$$x_1 = -8 \text{ - не удовлетворяет условию.}$$

$$x_2 = 8$$

Ответ: 8.

Задача 7. На рисунке $CK = 2$ см, $KD = 9$ см, $AK:KB = 1:2$.
Найдите длину хорды AB .



Решение:

По свойству пересекающихся хорд
 $CK \cdot KD = AK \cdot KB$

Пусть $AK = x$, $KB = 2x$,

$$CK \cdot KD = AK \cdot KB$$

$$2 \cdot 9 = x \cdot 2x$$

$$18 = 2x^2$$

$$9 = x^2$$

$$x = 3$$

$$AK = 3 \text{ (см)}, \quad KB = 6 \text{ (см)}.$$

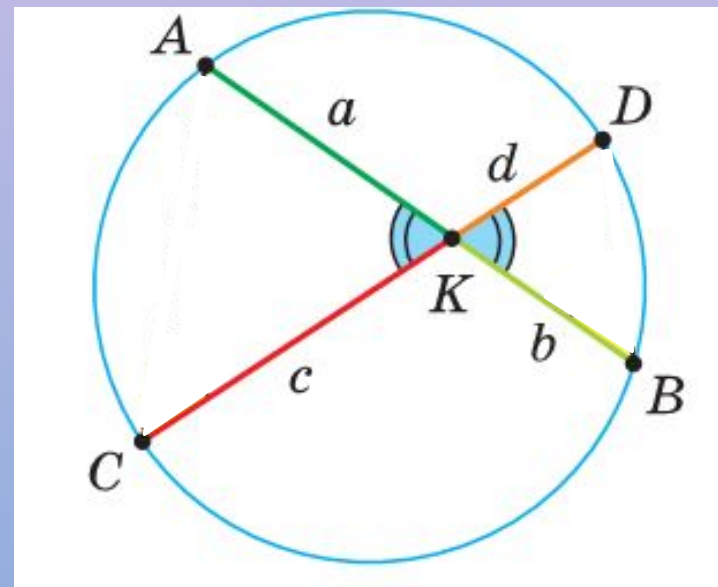
$$AB = 3 + 6 = 9 \text{ (см)}$$

Ответ: 9 см.

Свойство отрезков хорд и касательных

Теорема (о пересекающихся хордах)

Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой, то есть $ab = cd$.



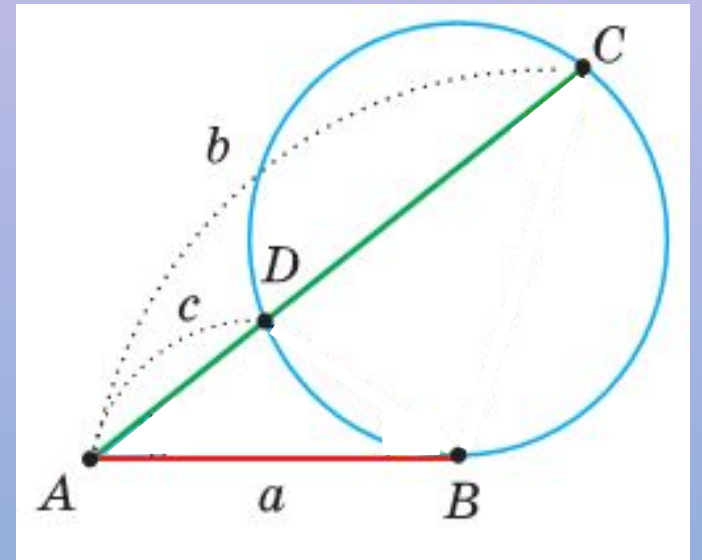
Теорема (о касательной и секущей)

Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной, соединяющего данную точку и точку касания, равен произведению отрезков секущей, соединяющих данную точку и точку её пересечения с окружностью, т. е.

$$a^2 = bc$$

Другая формулировка:

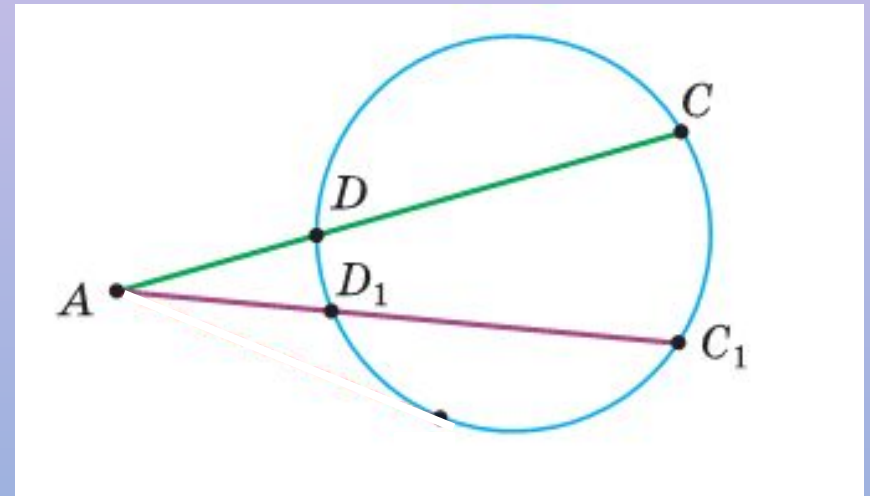
«Квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть.»



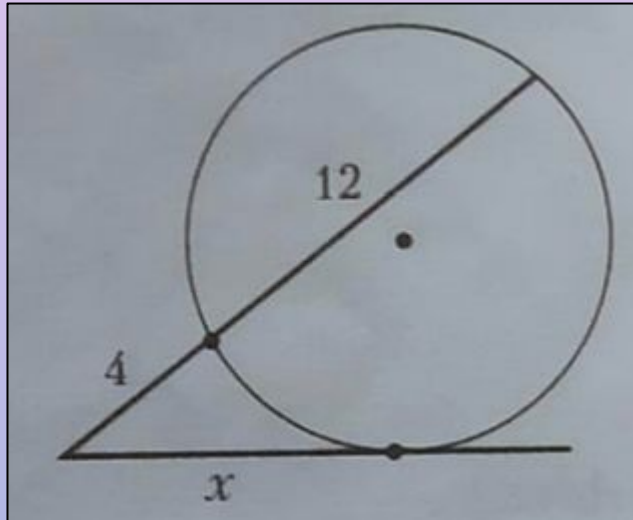
Следствие

Если из точки, взятой вне окружности, к окружности проведено несколько секущих, то произведения больших отрезков секущих на их внешние части равны между собой:

$$\text{т. е. } AC \cdot AD = AC_1 \cdot AD_1$$



Задача 8. Найти x .



Решение:

По свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки

$$4 \cdot 12 = x^2$$

$$x^2 = 48$$

$$x = 4\sqrt{3}$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задача 9. Хорды АВ и СD окружности пересекаются в точке F, которая является серединой хорды АВ. Вычислите длину хорды АВ, если $CD=25$ см и $CF = 9$ см и $AF=FB$

Решение:

$$FD = CD - CF = 25 - 9 = 16 \text{ (см)}$$

Пусть $AF = FB = x$.

По свойству отрезков пересекающихся хорд

$$x \cdot x = CF \cdot FD$$

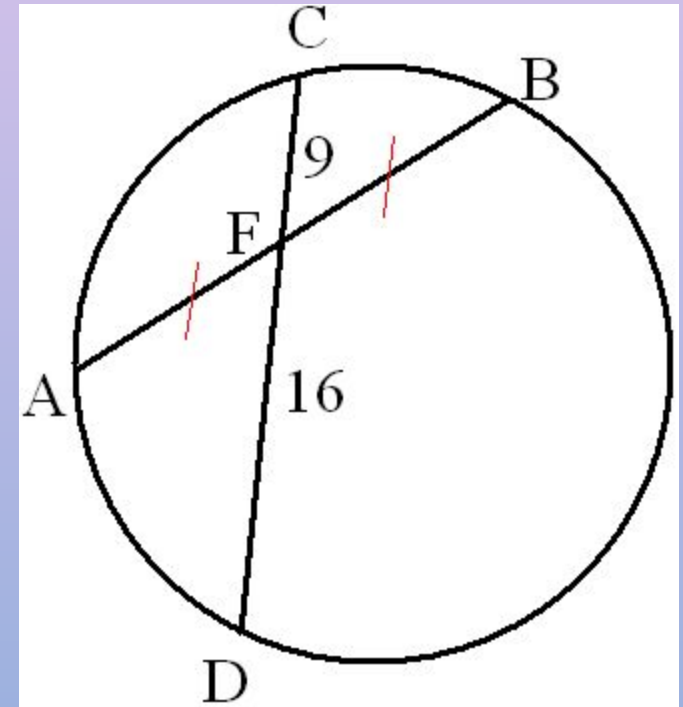
$$x \cdot x = 9 \cdot 16$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12$$

$$AB = 2x = 24 \text{ см}$$

Ответ: 24 см.



Задача 10. Радиус круга равен 7,5 см. Точка P лежит внутри круга на расстоянии 6,5 см от его центра O . Через точку P проведена хорда AB , длина которой равна 9 см. Вычислите длины отрезков, на которые точка P делит хорду AB .

Решение

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

$$(9 - x) \cdot x = 1 \cdot (6,5 + 7,5).$$

$$9x - x^2 = 14.$$

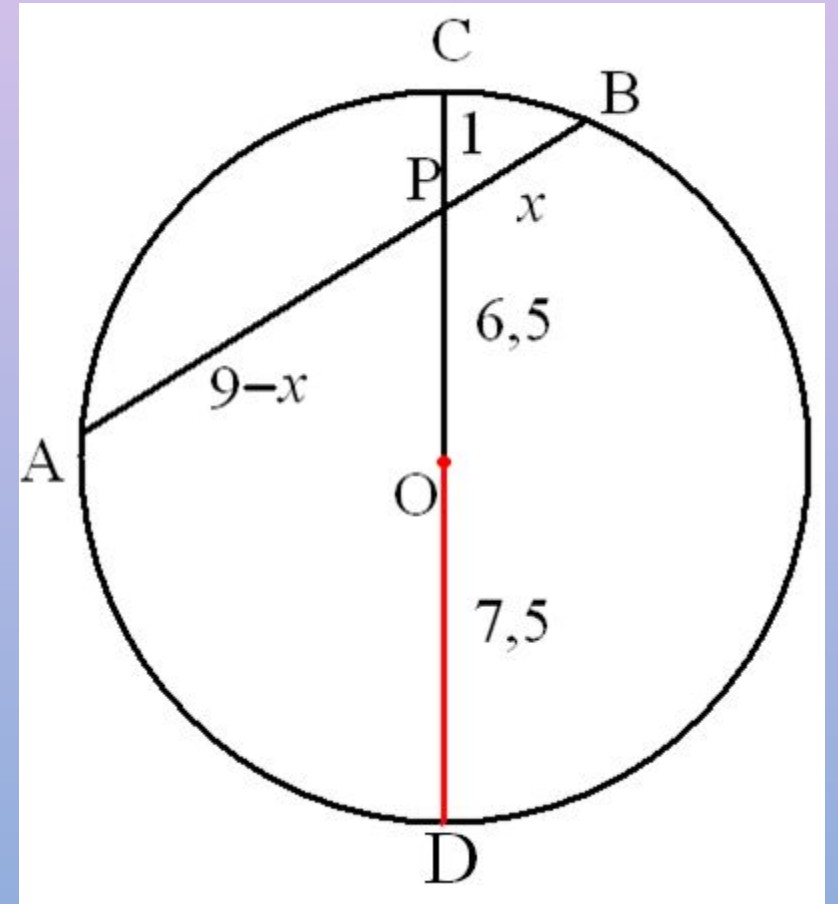
$$x^2 - 9x + 14 = 0.$$

Теорема Виета: $x_1 + x_2 = 9$, $x_1 x_2 = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 7$. Т.о., $PB = 2$ или 7 .

Тогда $AP = 7$ или 2 .

Ответ: 2 см и 7 см.



Задача 11. Из точки A к окружности проведены касательная AB и секущая AC , при этом отрезок AC пересекается с окружностью в точке D . При этом секущая оказалась в 3 раза больше касательной. Найдите длину секущей, если $AD=2$ см.

Решение

Пусть $AB=x$ см. Тогда $AC=3x$ см.

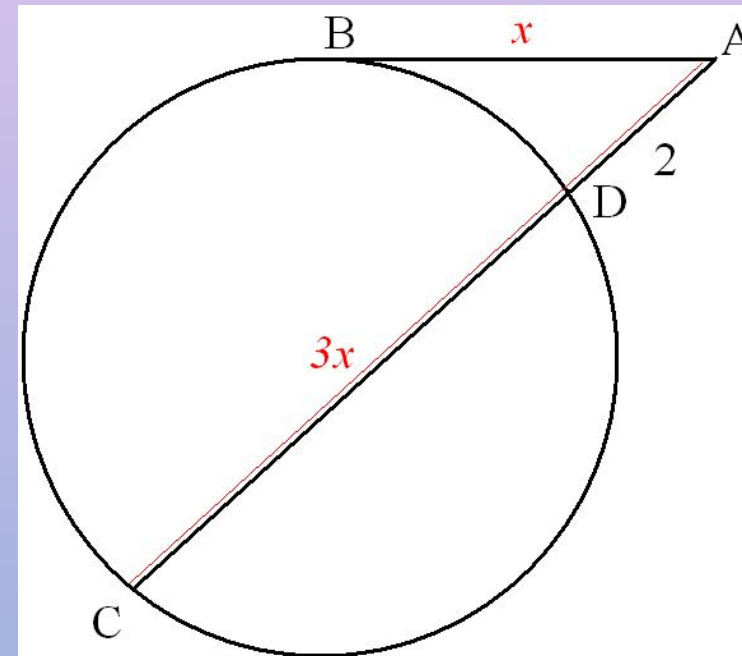
$$AC \cdot AD = AB^2.$$

$$3x \cdot 2 = x^2.$$

$$3 \cdot 2 = x \Rightarrow x = 6.$$

$$AC = 3x = 3 \cdot 6 = 18 \text{ (см)}.$$

Ответ: 18 см.



Задача 12. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке O . Вычислите длины отрезков DO и OC , если $AO=4$ см, $BO=6$ см, а длина отрезка DO на 5 см больше длины отрезка CO .

Решение

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD.$$

$$4 \cdot 6 = x \cdot (x + 5).$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0.$$

Теорема Виета: $x_1 + x_2 = -5$, $x_1 x_2 = -24 \Rightarrow$

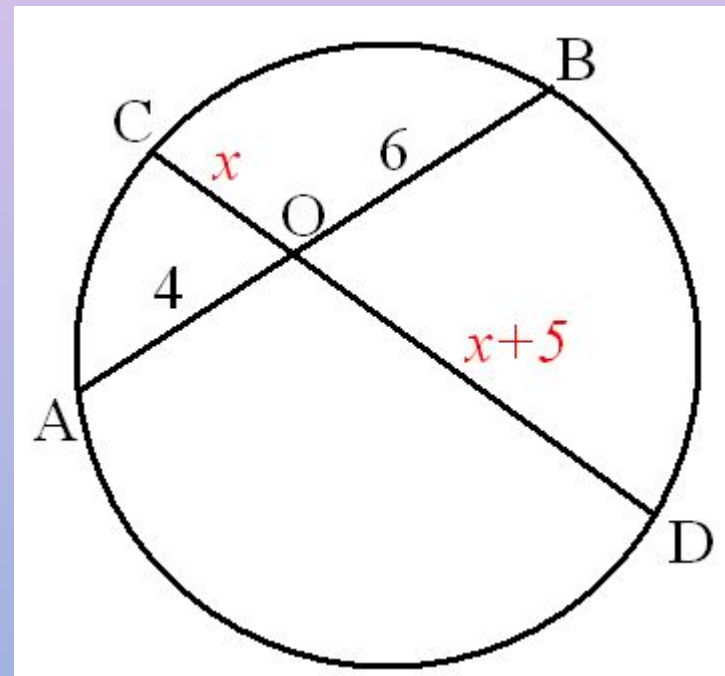
$$\Rightarrow x_1 = -8, x_2 = 3.$$

Первый корень не подходит по смыслу задачи.

$$x = 3 \text{ (см).}$$

$$CO = 3 \text{ см. } DO = 8 \text{ см.}$$

Ответ: 8 см, 3 см.



Задача 13. Диаметр AB и хорда CD окружности перпендикулярны и пересекаются в точке O . Вычислите радиус окружности, если $AO=2$ см, а длина хорды CD на 2 см меньше диаметра окружности.

Решение

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD.$$

$$2 \cdot (2r - 2) = (r - 1)^2.$$

$$4r - 4 = r^2 - 2r + 1.$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0$$

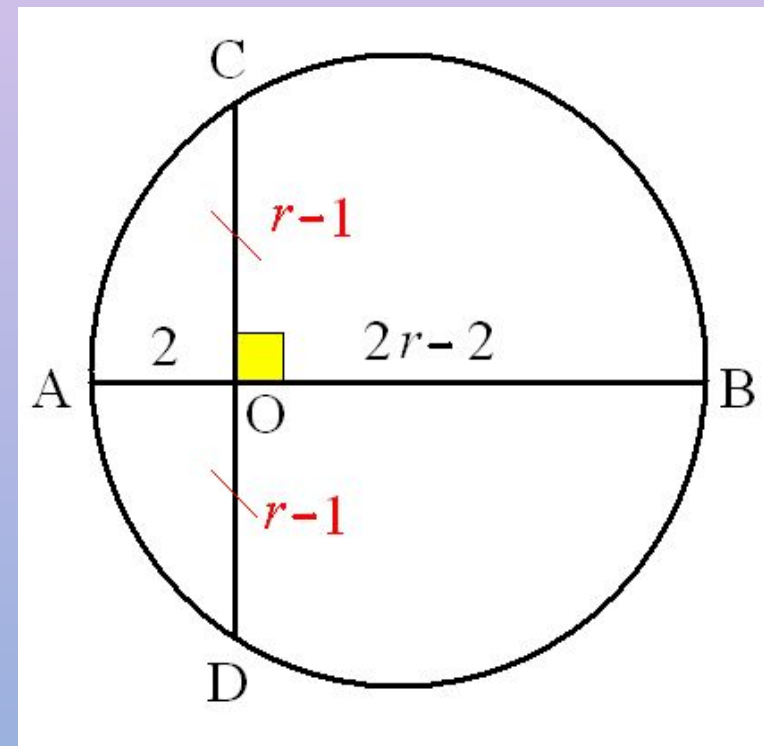
Теорема Виета: $r_1 + r_2 = 6$, $r_1 r_2 = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_1 = 5, r_2 = 1.$$

Второй корень не подходит по смыслу задачи.

$$r = 5 \text{ (см).}$$

Ответ: 5 см.



Задача 14. В треугольнике ABC $AB=2$ см, $BC=4$ см, $CA=3$ см. Окружность, проходящая через вершины B и C , пересекает прямую AC в точке K , лежащей на луче CA , а прямую AB – в точке T . Известно, что $AK=1$ см. Вычислите длины отрезков AT и KT .

Решение

1) Пусть $AT=x$ см.

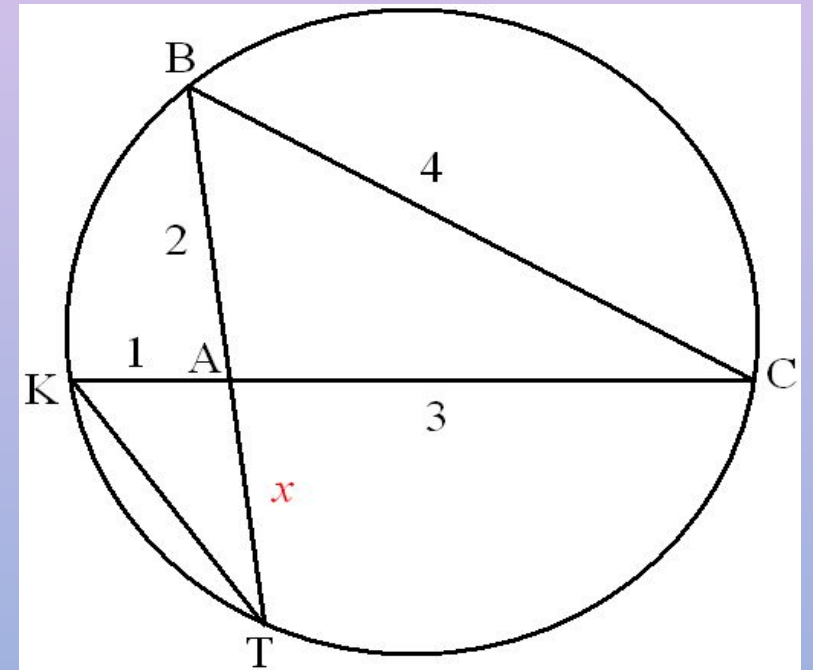
$$\text{Тогда } 2x = 1 \cdot 3, \quad x = \frac{3}{2} \text{ (см).}$$

2) $\triangle ABC \sim \triangle AKT \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{BC}{KT}, \quad \frac{2}{1} = \frac{4}{KT},$$

$$KT = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \text{ (см).}$$

Ответ: 1,5 см; 2 см.



Спасибо за внимание!