Десяточка

С нами на шаг впереди

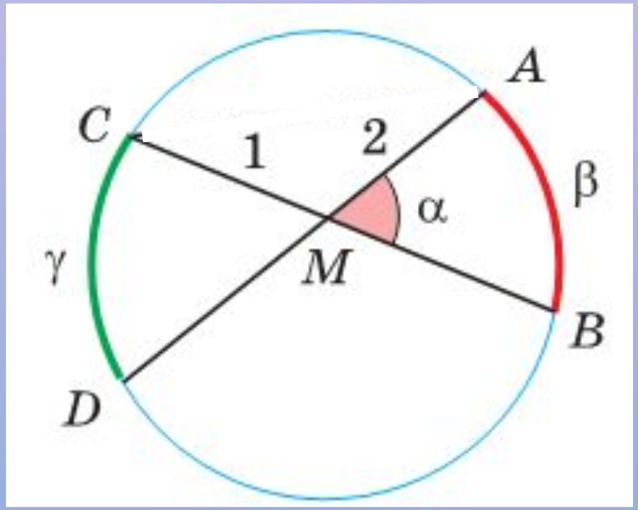
Углы, образованные хордами, секущими, касательными.

Свойство отрезков хорд и касательных

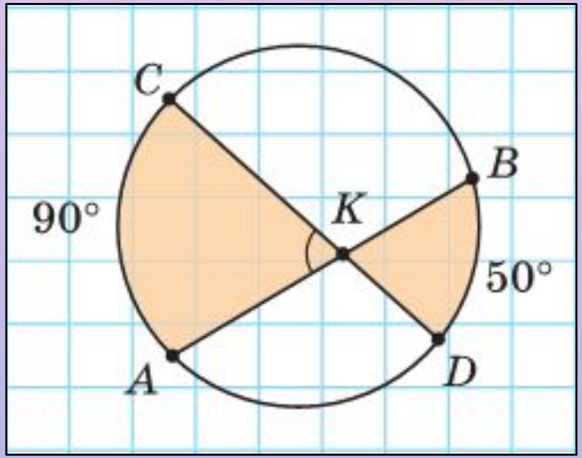
Углы, образованные хордами, секущими, касательными.

Теорема. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, заключённых внутри данного угла и угла, вертикального данному.

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$



Задача 1. Найдите $\angle AKC$, если $\smile$AC=90°, $\smile$BD=50°.

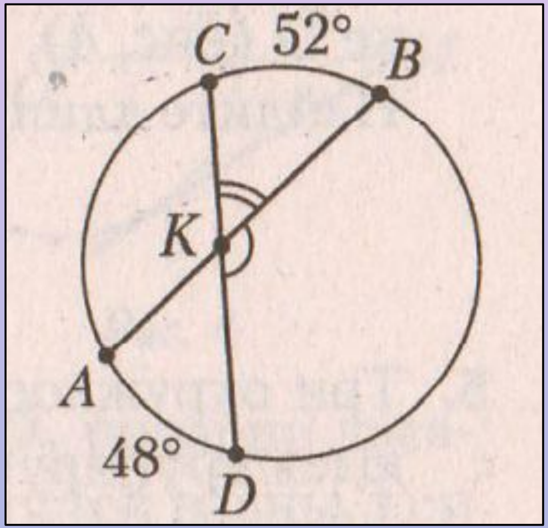


Решение:

$\angle$ АКС = $\frac{1}{2}(\smile \mathrm{AC} + \smile \mathrm{BD}) = \frac{1}{2}(90° + 50°) = 70°$

Ответ: $\angle$ АКС = 70°.

Задача 2. Найдите $\angle CKB$ и $\angle BKD$.



Решение:

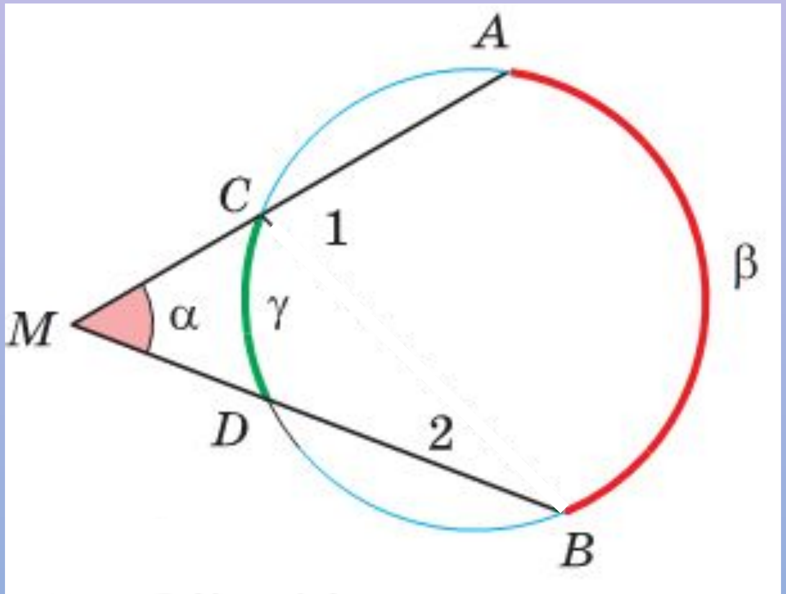
$\angle$ CKB = $\frac{1}{2}(\smile CB + \smile AD) = \frac{1}{2}(52° + 48°) = 50°$

$\angle$ BKD = 180° - $\angle$ CKB = 180° - 50°= 130° (смежные углы)

Ответ: $\angle$ CKB$=50°$, $\angle$ BKD = 130°.

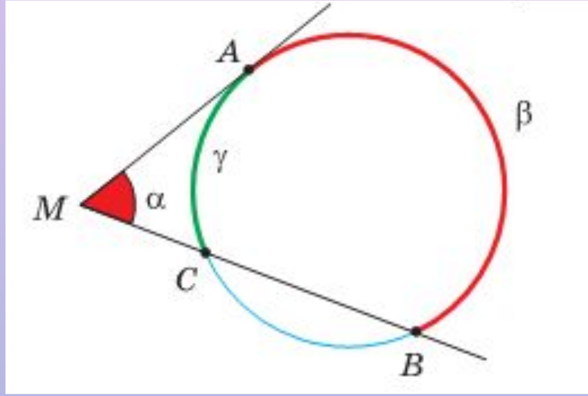
Теорема. Угол ***между секущими***, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключённых внутри угла, то есть

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

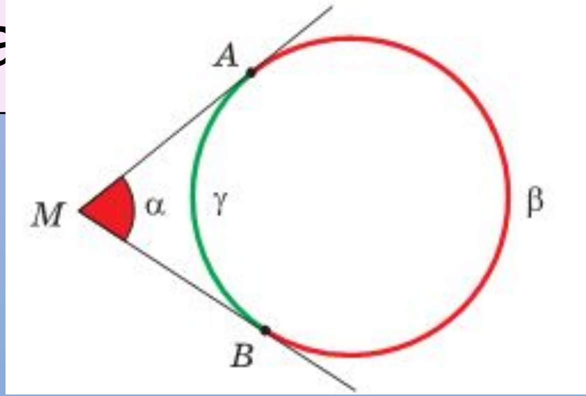


<u>Свойство 1.</u> Угол ***между секущей и касательной***, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключённых внутри угла и ограниченных точками пересечения и точкой касания

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

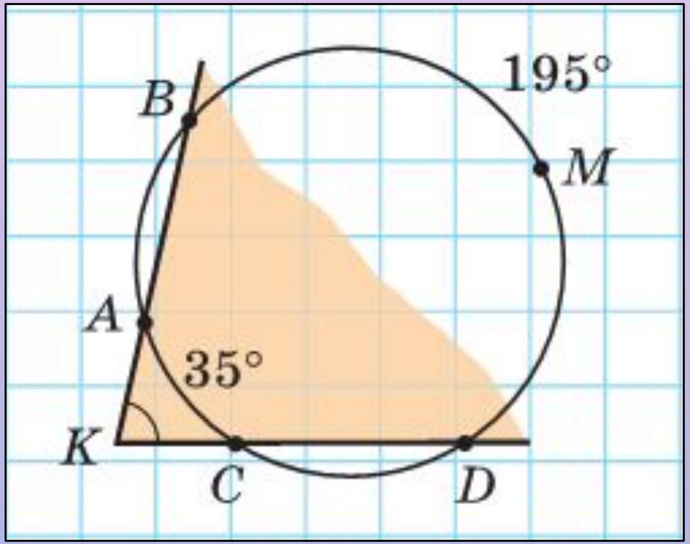


<u>Свойство 2.</u> Угол ***между двумя касательными***, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключённых внутри угла и ограниченных точка



$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

Задача 3. Если $\smile BMD = 195°$, $\smile AC = 35°$, то чему равен $\angle BKD$.

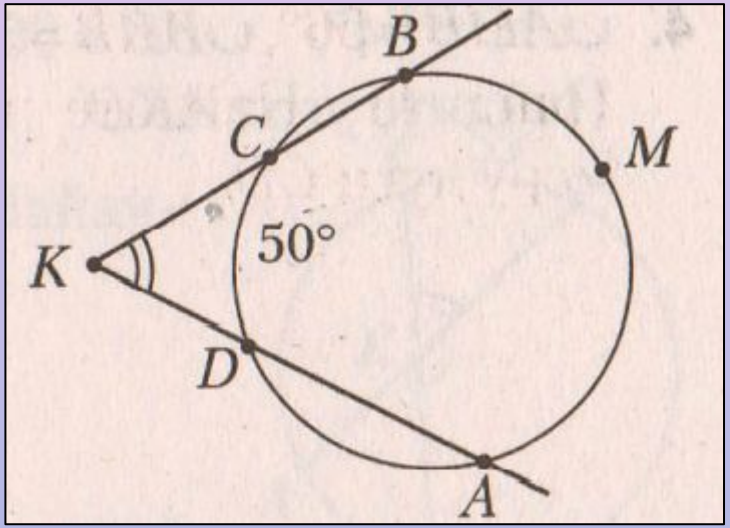


Решение:

$\angle BKD = \frac{1}{2}(\smile BMD + \smile AC) = \frac{1}{2}(195° + 35°) = 115°.$

Ответ: $\angle BKD = 115°$.

Задача 4. $\smile CD = 50°, \smile CD : \smile AMB = 1 : 3.$ Найдите угол АКВ.

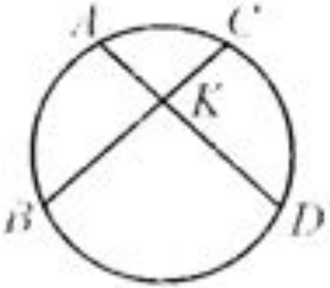


Решение:

$\smile AMB = 3 \smile CD = 150°.$

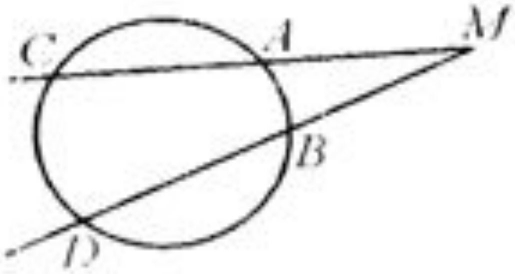
$\angle$ АКВ = $\frac{1}{2}(\smile \mathrm{AMB}$ - $\smile \mathrm{CD}) = \frac{1}{2}(150° - 50°) = 50°.$

Ответ: $\angle$ АКВ $= 50°.$



6. $\cup AC = 40°$, $\cup BD = 100°$

$\angle BKD = ?$



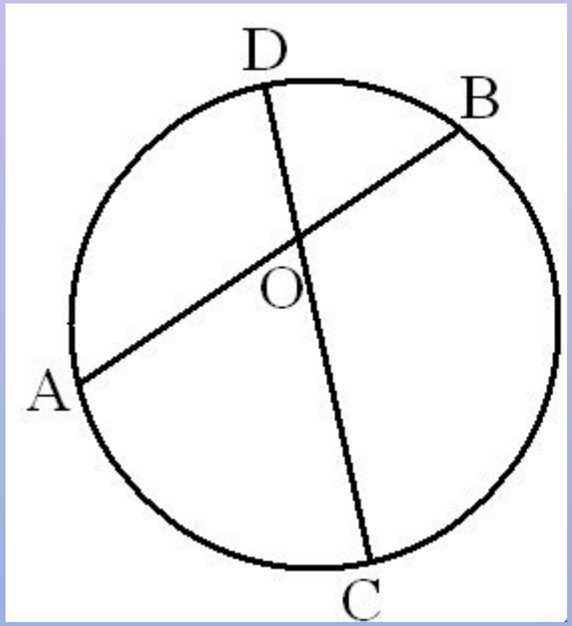
7. $\cup CD = 70°$, $\cup AB = 30°$

$\angle M = ?$

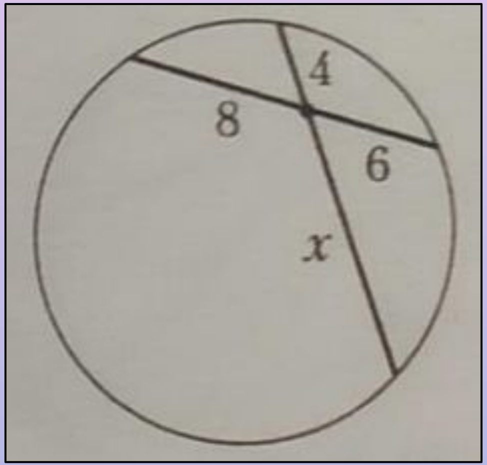
Свойство пересекающихся хорд

Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой.

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD$$



Задача 5. Найдите x.



Решение:

По свойству пересекающихся хорд

$8 \cdot 6 = 4 \cdot x$

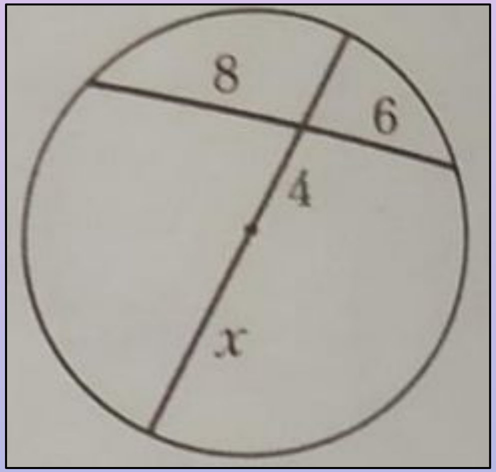
$48 = 4 \cdot x$

$x = 48 : 4$

$x = 12$

Ответ: 12.

Задача 6. Найдите x.



Решение:

По свойству пересекающихся хорд

$8 \cdot 6 = (x + 4) \cdot (x - 4)$

$48 = x^2 + 4x - 4x - 16$

$48 = x^2 - 16$

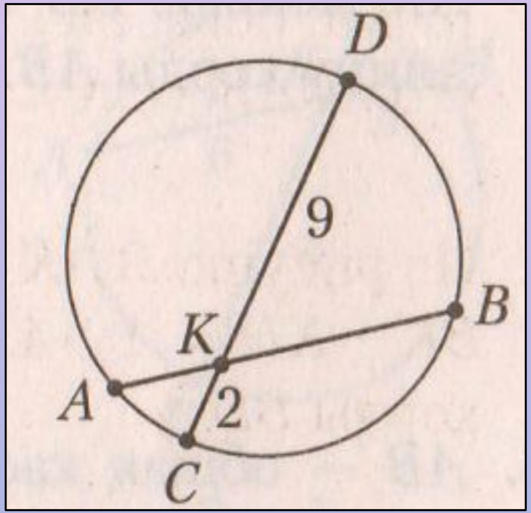
$64 = x^2$

$x_1 = -8$ – не удовлетворяет условию.

$x_2 = 8$

Ответ: 8.

Задача 7. На рисунке СК $= 2$ см, $KD = 9$см, $AK : KB = 1 : 2$. Найдите длину хорды AB.



Решение:

По свойству пересекающихся хорд

$CK \cdot KD = AK \cdot KB$

Пусть $AK = x, KB = 2x$,

$CK \cdot KD = AK \cdot KB$

$2 \cdot 9 = x \cdot 2x$

$18 = 2x^2$

$9 = x^2$

$x = 3$

$AK = 3$ (см), $KB = 6$ (см).

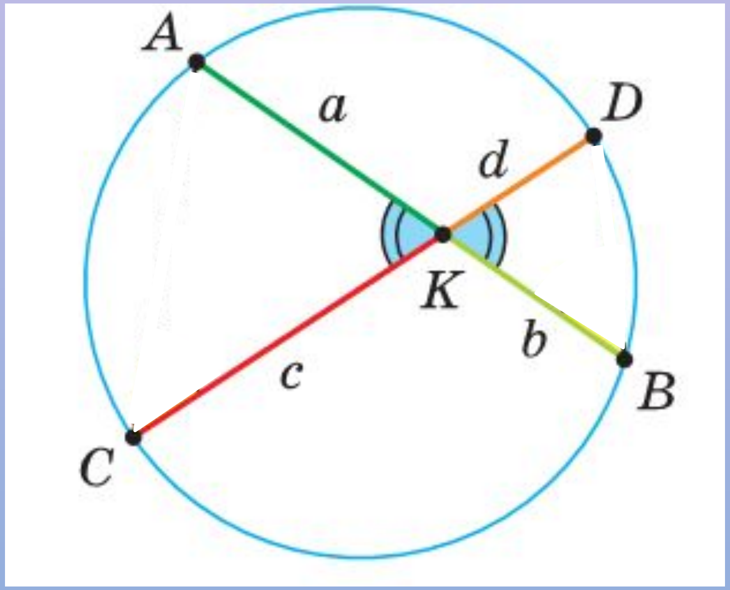
$AB = 3 + 6 = 9$ (см)

Ответ: 9 см.

Свойство отрезков хорд и касательных

<u>Теорема (о пересекающихся хордах)</u>

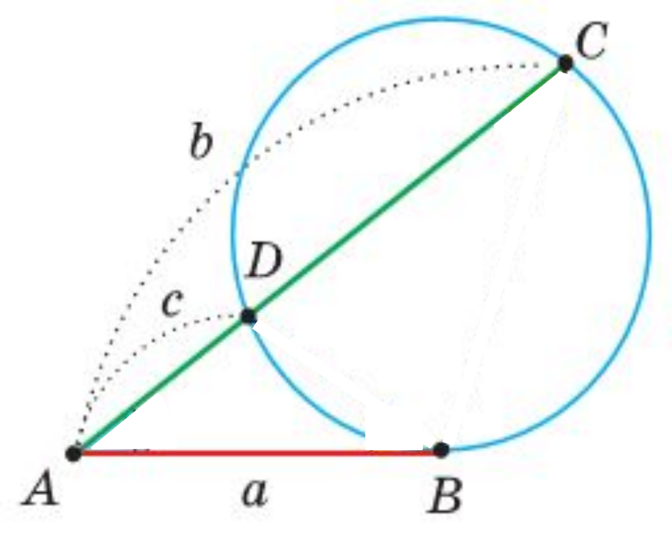
Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой, то есть $ab = cd$.



Теорема (о касательной и секущей)

Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной, соединяющего данную точку и точку касания, равен произведению отрезков секущей, соединяющих данную точку и точку её пересечения с окружностью, т. е.

$$\boldsymbol{a^2 = bc}$$



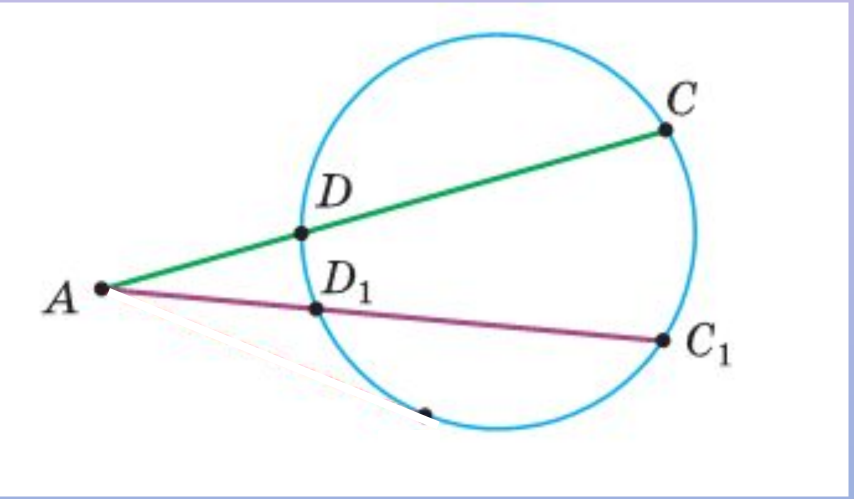
Другая формулировка:

«Квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть.»

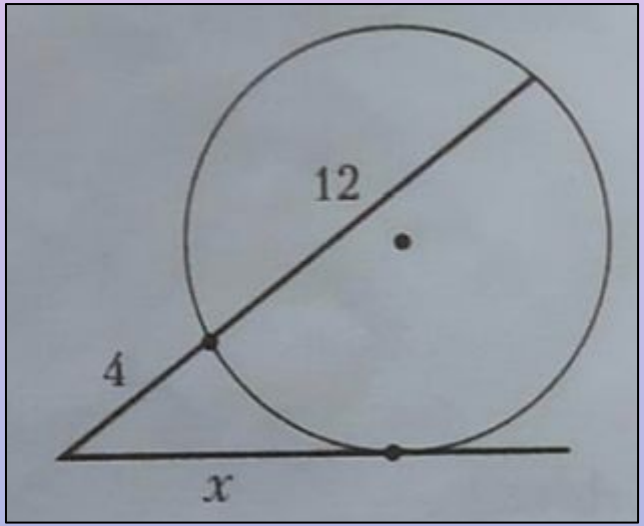
<u>Следствие</u>

Если из точки, взятой вне окружности, к окружности проведено несколько секущих, то произведения больших отрезков секущих на их внешние части равны между собой:

т. е. $AC \cdot AD = AC_1 \cdot AD_1$



Задача 8. Найти x.



Решение:

По свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки

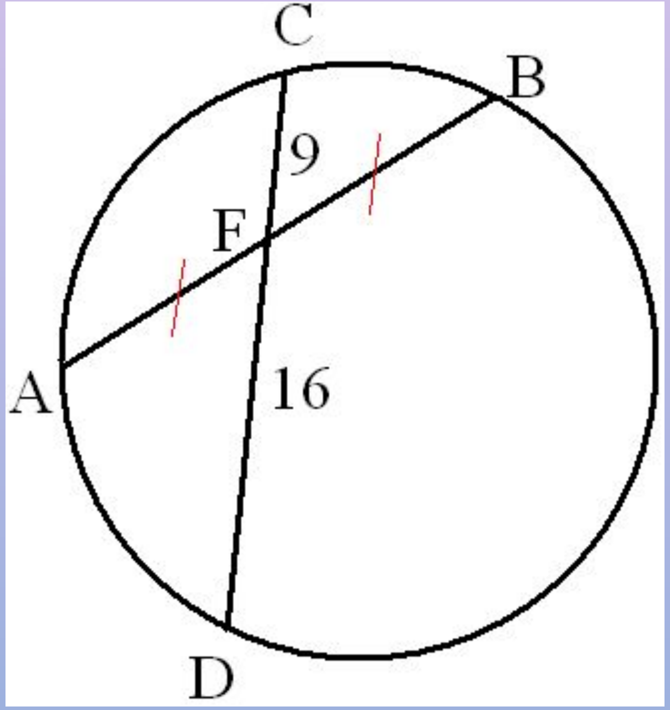
$4 \cdot 12 = x^2$

$x^2 = 48$

$x = 4\sqrt{3}$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задача 9. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке F, которая является серединой хорды AB. Вычислите длину хорды AB, если CD=25 см и CF = 9 см и AF=FB



Решение:

$FD = CD - CF = 25 - 9 = 16$ (см)

Пусть $AF = FB = x$.

По свойству отрезков пересекающихся хорд

$$x \cdot x = CF \cdot FD$$

$$x \cdot x = 9 \cdot 16$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12$$

$AB = 2x = 24$ см

Ответ: 24 см.

<u>Задача 10.</u> Радиус круга равен 7,5 см. Точка *P* лежит внутри круга на расстоянии 6,5 см от его центра *O*. Через точку *P* проведена хорда *AB*, длина которой равна 9 см. Вычислите длины отрезков, на которые точка *P* делит хорду *AB*.

Решение

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

$$(9-x)\cdot x = 1\cdot(6{,}5+7{,}5).$$

$$9x - x^2 = 14.$$

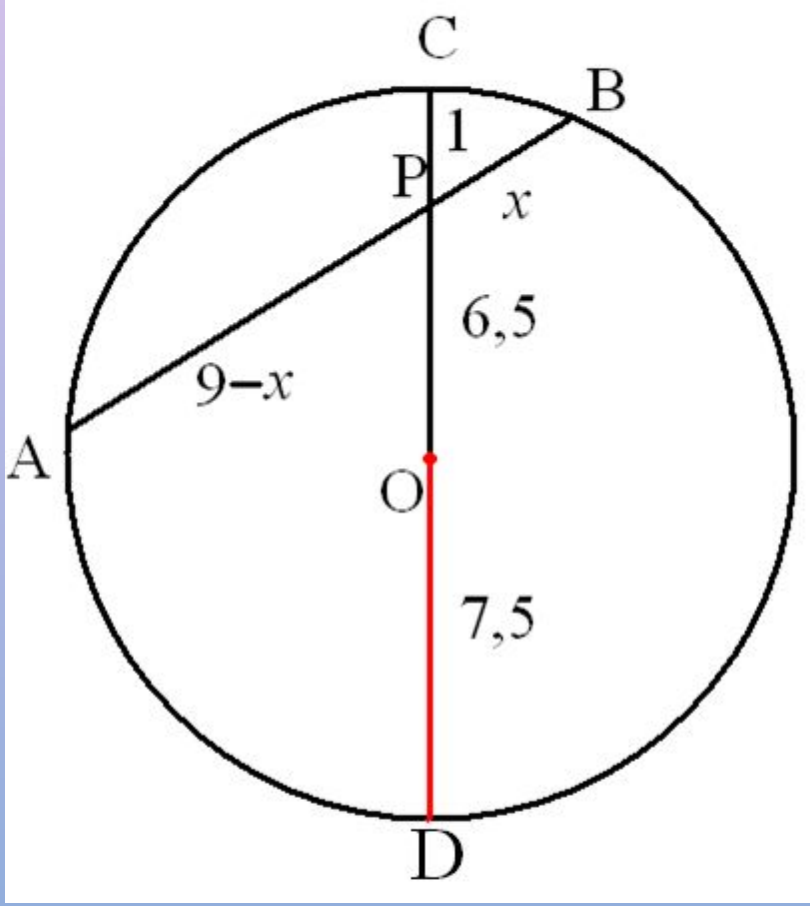
$$x^2 - 9x + 14 = 0.$$

Теорема Виета: $x_1 + x_2 = 9,\ x_1 x_2 = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 7$. Т.о., *PB*=2 или 7.

Тогда *AP*=7 или 2.

Ответ: 2 см и 7 см.



Задача 11. Из точки *A* к окружности проведены касательная *AB* и секущая *AC*, при этом отрезок *AC* пересекается с окружностью в точке *D*. При этом секущая оказалась в 3 раза больше касательной. Найдите длину секущей, если *AD*=2 см.

Решение

Пусть $AB = x$ см. Тогда $AC = 3x$ см.

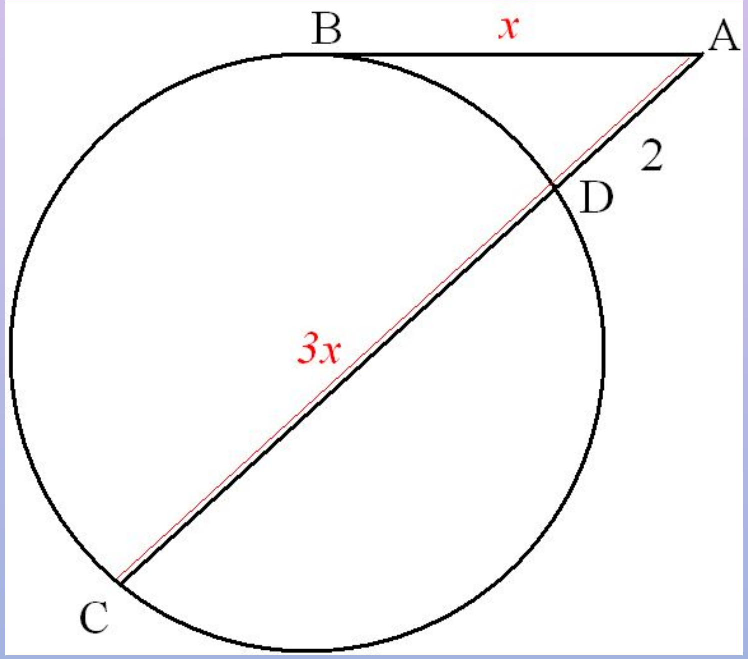
$$AC \cdot AD = AB^2.$$

$$3x \cdot 2 = x^2.$$

$$3 \cdot 2 = x \Rightarrow x = 6.$$

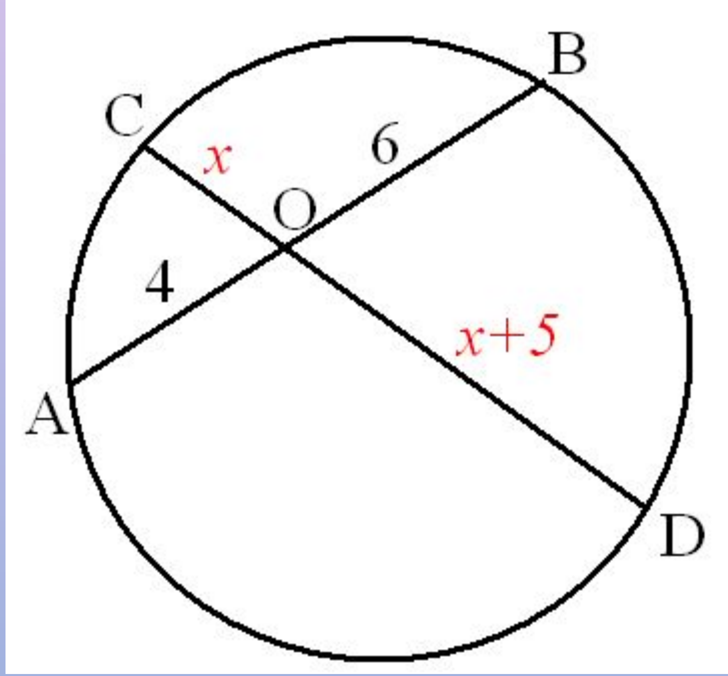
$$AC = 3x = 3 \cdot 6 = 18 \text{ (см)}.$$

Ответ: 18 см.



Задача 12. Хорды *AB* и *CD* окружности пересекаются в точке *O*. Вычислите длины отрезков *DO* и *OC*, если *AO*=4 см, *BO*=6 см, а длина отрезка *DO* на 5 см больше длины отрезка *CO*.

Решение



$$AO \cdot OB = CO \cdot OD.$$

$$4 \cdot 6 = x \cdot (x+5).$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0.$$

Теорема Виета: $x_1 + x_2 = -5,\ x_1 x_2 = -24 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 = -8,\ x_2 = 3.$$

Первый корень не подходит по смыслу задачи.

$x = 3$ (см).

CO=3 см. *DO*=8 см.

Ответ: 8 см, 3 см.

Задача 13. Диаметр *AB* и хорда *CD* окружности перпендикулярны и пересекаются в точке *O*. Вычислите радиус окружности, если *AO*=2 см, а длина хорды *CD* на 2 см меньше диаметра окружности.

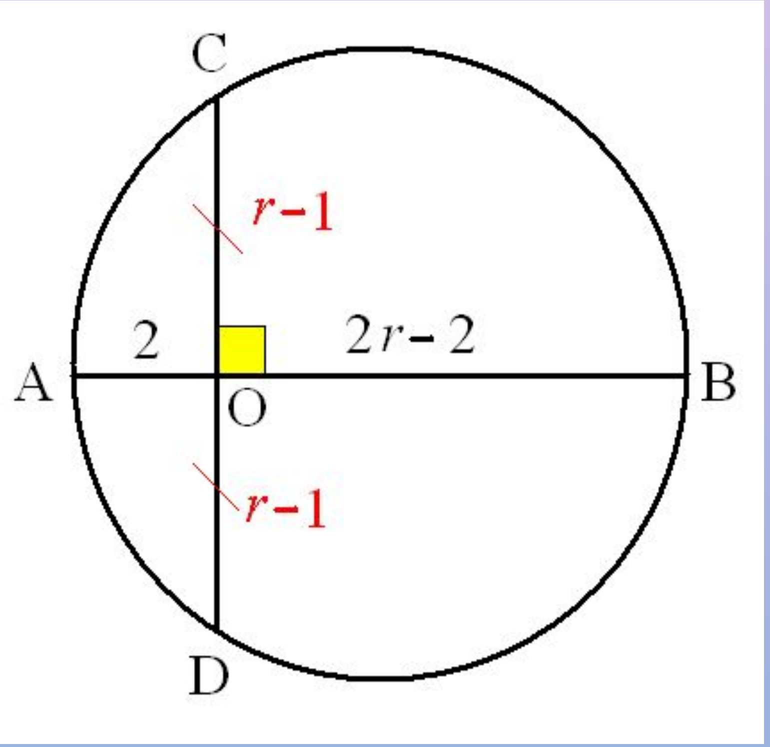
Решение

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD.$$

$$2 \cdot (2r-2) = (r-1)^2.$$

$$4r - 4 = r^2 - 2r + 1.$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0$$



Теорема Виета: $r_1 + r_2 = 6,\ r_1 r_2 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 = 5,\ r_2 = 1.$

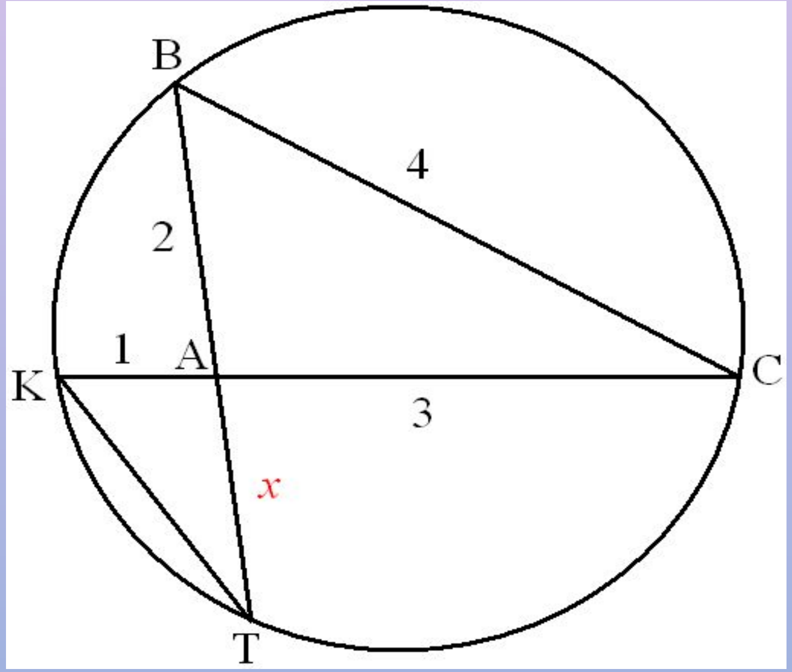
Второй корень не подходит по смыслу задачи.

$r = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

Задача 14. В треугольнике *ABC AB*=2 см, *BC*=4 см, *CA*=3 см. Окружность, проходящая через вершины *B* и *C*, пересекает прямую *AC* в точке *K*, лежащей на луче *CA*, а прямую *AB* – в точке *T*. Известно, что *AK*=1 см. Вычислите длины отрезков *AT* и *KT*.

Решение



1) Пусть $AT=x$ см.

Тогда $2x=1\cdot 3,\ x=\frac{3}{2}$ (см).

2) $\Delta ABC \sim \Delta AKT \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AK}=\frac{BC}{KT}, \frac{2}{1}=\frac{4}{KT},$$

$$KT=\frac{4\cdot 1}{2}=2 \text{ (см)}.$$

Ответ: 1,5 см; 2 см.

Спасибо за внимание!