Повторение
Алгебра и начала анализа (ЕМН)
10 класс
II ПОЛУГОДИЕ

Разделы 2 полугодия

- Раздел 10.3А: Многочлены
- Раздел 10.3В: Предел функции и непрерывность
- Раздел 10.3С: Производная
- Раздел 10.4А: Применение производной
- Раздел 10.4В: Случайные величины и их числовые характеристики

Цель урока

Повторить разделы:

- Многочлены.
- Предел функции и непрерывность.
- Производная.
- Применение производной.
- Случайные величины и их числовые характеристики.
- Вероятность.

Теорема Безу

Теорема: *Остаток многочлена* $P_n(x)$ *при деление на двучлен х-а равен значению* $P(a)$ *многочлена в точке х=а.*

$$R = P(a)$$

Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 \mathrm{x} + a_0$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ − целые числа, $a_n \neq 0$.

Теорема о рациональных корнях многочлена

Если многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 \mathrm{x} + a_0$$

с целыми коэффициентами имеет рациональный корень

$$x_0 = \frac{p}{q},$$

то число p является делителем числа a_0 (свободного члена), а число q является делителем числа a_n (старшего коэффициента).

1. Используя схему Горнера разделите многочлен f (x) на $x-\alpha$ бином

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$, $\alpha = 1$

	1	-2	4	-6	8
1	1	-1	3	-3	5

$f(x) = (x-1)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + 5$

Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x-1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad 1^{\infty};\quad 0^{0};\quad 0^{\infty};\quad \infty^{0};\quad \infty-\infty$$

Эти выражения называются ***неопределенности***, а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности.***

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

Если f(x) – дробно – рациональная функция, необходимо разложить на множители числитель и знаменатель дроби

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\left[\frac{C}{\infty}=0\right]=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – дробно - рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на x в старшей степени

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f(x)$	$f'(x)$
C (const)	0
kx+b	k
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

$$(U+V)' = U' + V'$$

$$(UV)' = U'V + UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$(CU)' = CU', C - const$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	a^x	$a^x \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$	e^x	e^x
$tg\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$ctg\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arctg\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcctg\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Исследование функции

1) Область определения функции
2) Свойства функции (четность, нечетность, периодичность)
4) Точки пересечения функции с осями координат
5) Непрерывность функции. Характер точек разрыва
6) Асимптоты
7) Экстремумы функции. Исследование функции на монотонность
8) Выпуклость/вогнутость графика функции. Точки перегиба

Исследуем функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ **и построим её график**

1) Поскольку знаменатель положителен при всех , область определения функции - вся ось Ox

2) Функция *f(x)* - нечётная, поскольку при смене знака *x* числитель меняет знак, а знаменатель остаётся без изменения, откуда *f(-x) = - f(x)*. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

Периодической функция не является.

3) Поскольку область определения этой элементарной функции - вся вещественная ось, вертикальных асимптот график не имеет.

4) Найдём наклонные асимптоты при в виде $x \to \pm\infty$. Имеем: $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{x^3}{x^2+1} - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Таким образом, асимптотой как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ служит прямая

$$y = 1x + 0 = x$$

5) Найдём точки пересечения с осями координат. Имеем:

$f(0) = 0$, причём $x=0$ - единственное решение уравнения $f(x) = 0$. Значит, график $y = f(x)$ пересекает сразу и ось Ox, и ось Oy в начале координат.

Очевидно, что $f(x)>0$ при $x>0$ и $f(x)<0$ при $x<0$.

6) Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

Очевидно, что *f ´(x) ≥ 0* при всех $x \in \mathbb{R}$; единственная точка, в которой *f ´(x)* = 0 - это *x=0*. Значит, функция *f(x)* возрастает на всей оси *Ox*, а в стационарной точке *x=0* имеет горизонтальную касательную.

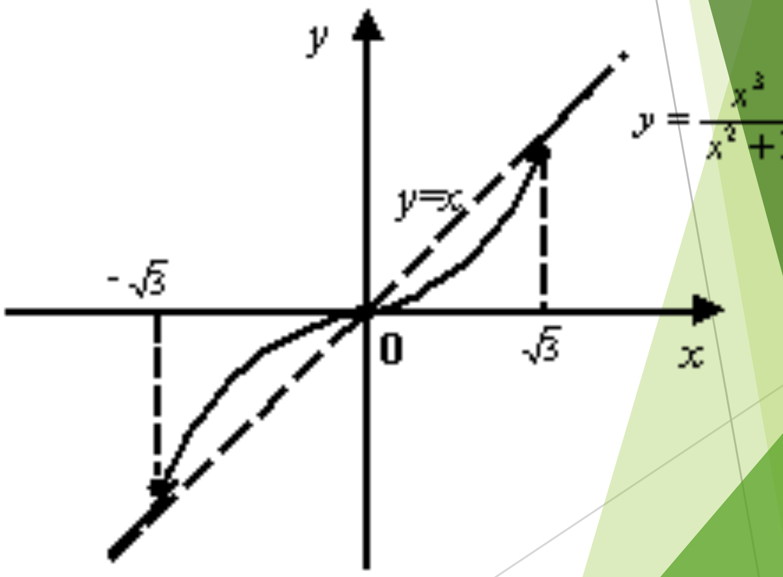
7) Найдём вторую производную:

$$f''(x) = \frac{\left(4x^3 + 6x\right)\left(x^2 + 1\right)^2 - \left(x^4 + 3x^2\right) \cdot 2\left(x^2 + 1\right) \cdot 2x}{\left(x^2 + 1\right)^4} = \frac{2x\left(3 - x^2\right)}{\left(x^2 + 1\right)^3}.$$

Знаменатель этой дроби положителен при всех *x*. Числитель имеет корни *x=0* и x=±√3, при этом *f''(x)>0* на интервалах $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$ и $\left(0; \sqrt{3}\right)$ - на этих интервалах функция выпукла. На интервалах $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$ и $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ выполняется обратное неравенство *f''(x)<0*, здесь функция вогнута. Все три точки, в которых *f''(x)=0*, то есть точки - √3, 0, √3, являются точками перегиба.

8) Теперь мы можем построить график с учётом всех предыдущих пунктов исследования функции. График имеет такой вид:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$



Пример 4. Случайная величина X принимает значения 1, 2, 3, 4, причем $P(X=1)=0{,}4$; $P(X=2)=0{,}3$; $P(X=3)=0{,}2$. Найти $P(X=4)$, $P(X>2)$, $P(X\leqslant 3)$, $P(1{,}5<X<3{,}7)$.

☐ Поскольку $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$, то

$$P(X=4)=1-(0{,}4+0{,}3+0{,}2)=0{,}1.$$

Событие $(X>2)$ наступает тогда и только тогда, когда случайная величина X принимает значение 3 или 4, т. е. это событие является суммой событий $(X=3)$ и $(X=4)$. Поэтому

$$P(X>2)=P((X=3)+(X=4))=P(X=3)+P(X=4)=$$
$$=0{,}2+0{,}1=0{,}3.$$

Аналогично:

$$P(X\leqslant 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}9;$$

$$P(1{,}5<X<3{,}7)=P(X=2)+P(X=3)=0{,}5.\ \blacksquare$$

Пример: **Партия из 10 телевизоров содержит четыре исправных телевизора. Из этой партии наугад выбирают три телевизора. Составить закон распределения числа неисправных телевизоров в выборке**

Решение: Из 10 телевизоров выбираем любые 3: это все равновозможные исходы. Вероятность p(A) = 1/120

$$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6};\quad P(X=1)=\frac{C_6^2\cdot C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2};$$

$$P(X=2)=\frac{C_6^1\cdot C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10};\quad P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}.$$

Как проверить правильность вычислений? Подсчитаем сумму полученных вероятностей $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}$. Она равна 1. Это говорит в пользу правильности решения задачи.

Ответ:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

■

Рефлексия

- Что я повторил, чему научился?
- Что осталось непонятным?
- Над чем необходимо работать?