

**Повторение
Алгебра и начала
анализа (ЕМН)
10 класс
II ПОЛУГОДИЕ**

Разделы 2 полугодия

- ▶ Раздел 10.3А: Многочлены
- ▶ Раздел 10.3В: Предел функции и непрерывность
- ▶ Раздел 10.3С: Производная
- ▶ Раздел 10.4А: Применение производной
- ▶ Раздел 10.4В: Случайные величины и их числовые характеристики

Цель урока

Повторить разделы:

- ▶ Многочлены.
- ▶ Предел функции и непрерывность.
- ▶ Производная.
- ▶ Применение производной.
- ▶ Случайные величины и их числовые характеристики.
- ▶ Вероятность.

Теорема Безу

Теорема: Остаток многочлена $P_n(x)$ при делении на двучлен $x-a$ равен значению $P(a)$ многочлена в точке $x=a$.

$$R = P(a)$$

Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — целые числа, $a_n \neq 0$.

Теорема о рациональных корнях многочлена

Если многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

с целыми коэффициентами имеет рациональный корень

$$x_0 = \frac{p}{q},$$

то число p является делителем числа a_0 (свободного члена), а число q является делителем числа a_n (старшего коэффициента).

1. Используя схему Горнера разделите многочлен $f(x)$ на $x - \alpha$ бином

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8, \alpha = 1$

	1	-2	4	-6	8
1	1	-1	3	-3	5

$$f(x) = (x-1)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + 5$$

Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

$$\frac{C}{0} = \infty \quad \frac{C}{\infty} = 0$$

то предел будет равен:

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad 1^\infty; \quad 0^0; \quad 0^\infty; \quad \infty^0; \quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются **неопределенности**, а вычисление пределов в этом случае называется **раскрытие неопределенности**.

Раскрытие неопределенностей

◆ Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{18}{-2} = \textcircled{-9}$$

Если $f(x)$ - дробно-рациональная функция, необходимо разложить на множители числитель и знаменатель дроби

Если $f(x)$ - иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1) \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

Раскрытие неопределенностей

◆ Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

Если $f(x) = \frac{C}{x^2}$ — рациональная функция или иррациональная дробь, то $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

$$\frac{2 + 0 + 0}{4 + 0 + 0} = \frac{1}{2}$$

необходимо разделить
числитель и знаменатель
дроби на x в старшей степени

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f(x)$	$f'(x)$
C (const)	0
$kx+b$	k
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

$$(U+V)' = U' + V'$$

$$(UV)' = U'V + UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$(CU)' = CU', C - \text{const}$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	a^x	$a^x \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$	e^x	e^x
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Исследование функции

- 1) Область определения функции
- 2) Свойства функции (четность, нечетность, периодичность)
- 4) Точки пересечения функции с осями координат
- 5) Непрерывность функции. Характер точек разрыва
- 6) Асимптоты
- 7) Экстремумы функции. Исследование функции на монотонность
- 8) Выпуклость/вогнутость графика функции. Точки перегиба

Исследуем функцию
построим её график

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \quad \text{и}$$

- 1) Поскольку знаменатель положителен при всех, область определения функции - вся ось Ox ,
- 2) Функция $f(x)$ - нечётная, поскольку при смене знака x числитель меняет знак, а знаменатель остаётся без изменения, откуда $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

Периодической функция не является.

- 3) Поскольку область определения этой элементарной функции - вся вещественная ось, вертикальных асимптот график не имеет.

4) Найдём наклонные асимптоты при
в виде $x \rightarrow \pm\infty$. Имеем: $y = kx + b$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 + 0} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

Таким образом, асимптотой как при $x \rightarrow +\infty$,
так и при $x \rightarrow -\infty$ служит прямая

$$y = 1x + 0 = x$$

5) Найдём точки пересечения с осями координат.

Имеем:

$f(0) = 0$, причём $x=0$ - единственное решение уравнения $f(x) = 0$. Значит, график $y = f(x)$ пересекает сразу и ось Ox , и ось Oy в начале координат.

Очевидно, что $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x) < 0$ при $x < 0$.

6) Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Очевидно, что $f'(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$;
единственная точка, в которой $f'(x) = 0$ - это $x=0$.
Значит, функция $f(x)$ возрастает на всей оси Ox , а
в стационарной точке $x=0$ имеет горизонтальную
касательную.

7) Найдём вторую производную:

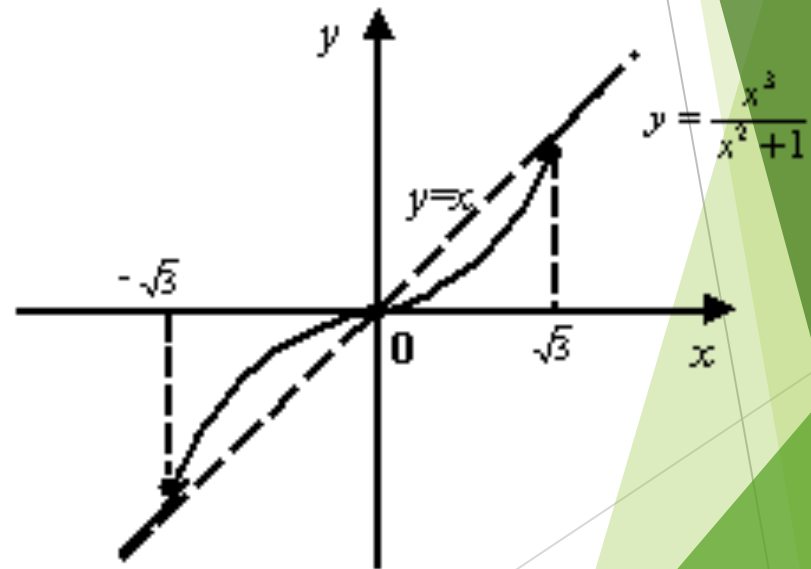
$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Знаменатель этой дроби положителен при всех x .

Числитель имеет корни $x=0$ и $x=\pm\sqrt{3}$, при этом $f''(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$ - на этих интервалах функция выпукла. На интервалах $(-\sqrt{3}; 0)$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ выполняется обратное неравенство $f''(x) < 0$, здесь функция вогнута. Все три точки, в которых $f''(x) = 0$, то есть точки $-\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$, являются точками перегиба.

8) Теперь мы можем построить график с учётом всех предыдущих пунктов исследования функции. График имеет такой вид:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$



Пример 4. Случайная величина X принимает значения 1, 2, 3, 4, причем $P(X = 1) = 0,4$; $P(X = 2) = 0,3$; $P(X = 3) = 0,2$. Найти $P(X = 4)$, $P(X > 2)$, $P(X \leq 3)$, $P(1,5 < X < 3,7)$.

□ Поскольку $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$, то

$$P(X = 4) = 1 - (0,4 + 0,3 + 0,2) = 0,1.$$

Событие $(X > 2)$ наступает тогда и только тогда, когда случайная величина X принимает значение 3 или 4, т. е. это событие является суммой событий $(X = 3)$ и $(X = 4)$. Поэтому

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= P((X = 3) + (X = 4)) = P(X = 3) + P(X = 4) = \\ &= 0,2 + 0,1 = 0,3. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,9;$$

$$P(1,5 < X < 3,7) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,5. \blacksquare$$

Пример: Партия из 10 телевизоров содержит четыре исправных телевизора. Из этой партии наугад выбирают три телевизора. Составить закон распределения числа неисправных телевизоров в выборке

Решение: Из 10 телевизоров выбираем любые 3: это все равно возможные исходы. Вероятность $p(A) = 1/120$

$$P(X = 0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}; \quad P(X = 1) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2};$$

$$P(X = 2) = \frac{C_6^1 \cdot C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}; \quad P(X = 3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

Как проверить правильность вычислений? Подсчитаем сумму полученных вероятностей $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30}$. Она равна 1. Это говорит в пользу правильности решения задачи.

Ответ:

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$



Рефлексия

- Что я повторил, чему научился?*
- Что осталось непонятным?*
- Над чем необходимо работать?*