Здравствуйте!

Лекция №4

Замена переменных в определенном интеграле

Теорема. Пусть

1. $f(x)$ **интегрируема на** $[a,b]$**;**

2. функция $\varphi(t)$ монотонно возрастает и $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

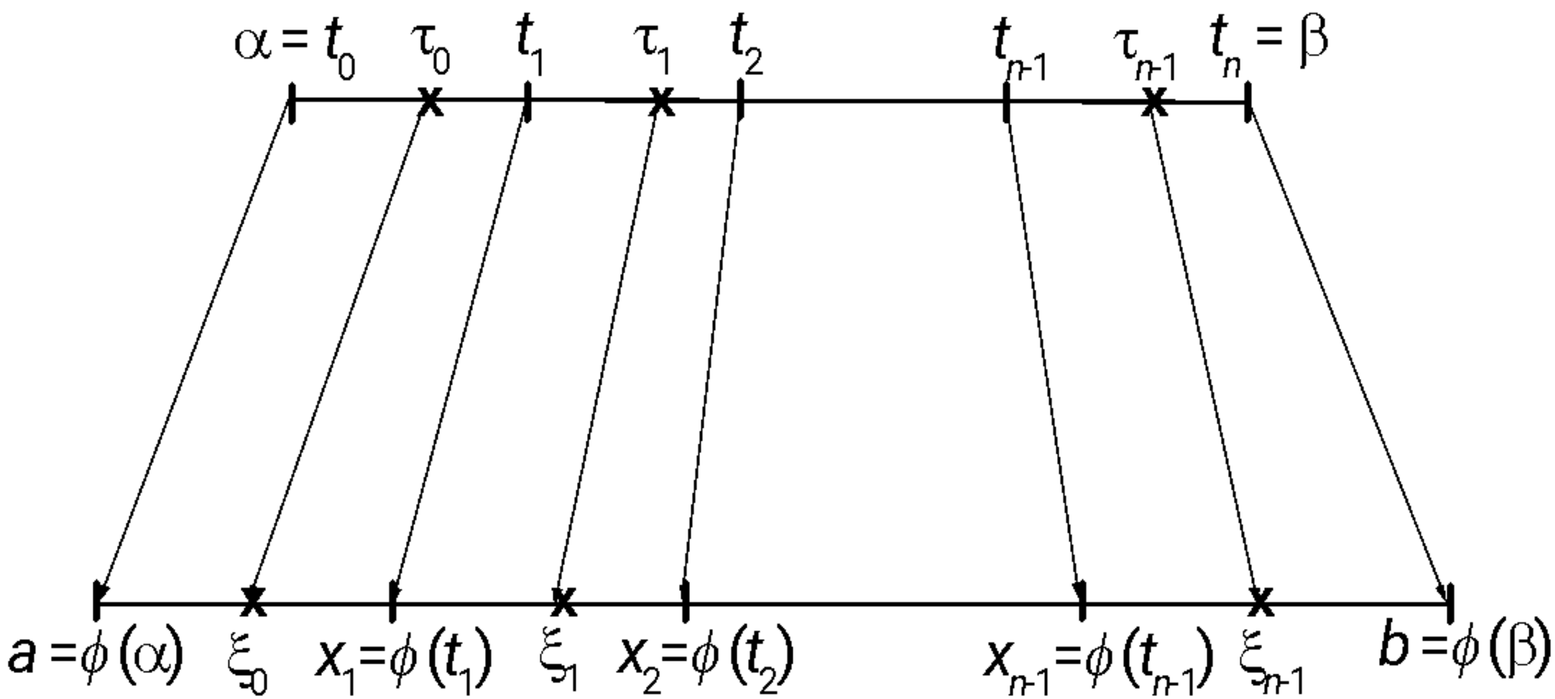
3. $\forall t \in [\alpha,\beta] \ \ \exists \varphi'(t)$**.**

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$**.**

Обратите внимание на пределы интегрирования во втором интеграле.

Доказательство.

Разобьем отрезок $[\alpha,\beta]$ на кусочки точками $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$, и пусть $\lambda = \max_i \Delta t_i$. Тогда отрезок $[a,b]$ также разобьется на кусочки точками $x_i = \varphi(t_i)$, причем $x_0 = \varphi(t_0) = \varphi(\alpha) = a$ и $x_n = \varphi(t_n) = \varphi(\beta) = b$.



Рассмотрим величины $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Для них, используя формулу Лагранжа, имеем

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$

где $t_i \le \tau_i \le t_{i+1}$.

Как говорилось в определении понятия определенного интеграла, предел интегральной суммы не должен зависеть от выбора средней точки. Возьмем поэтому $\xi_i = \varphi(\tau_i)$. Тогда для интегральной суммы получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i .$$

Проделаем теперь предельный переход при $\lambda = \max_i \Delta t_i \to 0$. В силу равномерной непрерывности функции $\varphi(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, при этом будет и $\lambda' = \max_i \Delta x_i \to 0$. Мы получим

$$\lim_{\lambda' \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i) \Delta t_i,$$

что и дает формулу

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Обратите внимание на следующие моменты:

1. В отличие от неопределенного интеграла здесь нет возврата к переменной x.
2. Но зато во втором интеграле **стоят другие пределы!** И это есть тот момент, о котором студенты, решая задачи, часто забывают. Так что **НЕ ЗАБЫВАЙТЕ МЕНЯТЬ ПРЕДЕЛЫ!**

Учебный пример:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_0^3 \frac{e^t dt}{e^t\sqrt{1+t}} = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} =$$

$$t = \ln x \quad x = \phi(t) = e^t$$

$$x = 1 \quad t = 0$$

$$x = e^3 \quad t = 3$$

$$= \int_0^3 \frac{d(t+1)}{\sqrt{t+1}} = 2\sqrt{t+1}\Big|_0^3 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2$$

Интегрирование определенных интегралов по частям

Вспомним формулу интегрирования неопределенных интегралов по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Переходя к определенным интегралам, получим:

$$\int_a^b u dv = \int u dv \Big|_a^b = uv\Big|_a^b - \int v du \Big|_a^b =$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du.$$

Итак

$$\int_a^b u dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du.$$

Эта формула носит название формулы интегрирования определенных интегралов по частям.