Оптоэлектронные и квантовые приборы и устройства

Лекция 2:

В.М. Шандаров

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Операторы

- **В квантовой физике многие физические величины могут квантоваться, т.е. в некоторых случаях они принимают лишь дискретные значения. Для математического описания таких величин не пригодны обычные непрерывные функции, используемые в классической теории. Квантовая теория использует более общие математические методы, основой которых являются операторы.**

Операторы

- **Оператор − это математический символ, определяющий совокупность действий, которые надо провести над заданной функцией *U* для получения некоторой другой функции *V*. В общем случае будем обозначать оператор символом $\hat{L}$, изображая его действие на некоторую функцию *U* в виде произведения $\hat{L}U$. В итоге оператор определяется соотношением:**

$$\hat{L}U = V$$

Наибольший практический интерес представляют линейные операторы, удовлетворяющие условию:

$$\hat{L}\left[C_1 U_1(x) + C_2 U_2(x)\right] = C_1 \hat{L} U_1(x) + C_2 \hat{L} U_2(x)$$

C_1 и C_2 − произвольные постоянные

Операторы

Самосопряженный линейный оператор должен удовлетворять соотношению:

$$\int U_1(x)\hat{L}U_2(x)dx = \int U_2(x)\hat{L}^*U_1(x)dx$$

$\hat{L}^*$ − оператор, комплексно – сопряженный

Операторы можно складывать, вычитать и перемножать по правилам обычной алгебры. Однако при перемножении нельзя менять порядок сомножителей.

Собственное значение оператора

- **В ряде случаев воздействие оператора $\hat{L}$ на некоторую функцию *U*(*x*) эквивалентно умножению этой функции на постоянную *L*. Эта постоянная и называется собственным значением оператора**

$$\hat{L}U(x) = L \cdot U(x)$$

функция *U*(*x*), удовлетворяющая этому соотношению, называется собственной функцией данного оператора

Собственное значение оператора

- В случае линейного дифференциального оператора уравнение

  $$\hat{L}U(x) = L \cdot U(x)$$

  является линейным дифференциальным уравнением. Известно, что такое уравнение для заданных граничных условий имеет ненулевые решения лишь при определенных значениях ***L***. Эти постоянные и являются собственными значениями оператора.

  Дифференциальный оператор, как правило, имеет множество собственных значений и собственных функций. Совокупность всех собственных значений образует спектр, который может быть как сплошным, так и дискретным.

Дискретный спектр собственных значений оператора

- **С примером дискретного спектра встречаемся, решая, например, задачу о движении частицы между двумя отражающими плоскостями (или о модах планарного оптического волновода).**
- Пусть частица движется вдоль оси ***x*** между плоскостями $x=0$ и $x=a$. Полагаем, что потенциальная энергия U частицы при $0<x<a$ равна нулю. При $x=0$ и $x=a$ она становится бесконечной ($U\to \infty$). При этих условиях частица может находиться лишь внутри промежутка между плоскостями, поскольку она не в состоянии преодолеть бесконечно высокий потенциальный барьер. Данные плоскости для частицы являются идеально отражающими. В этом случае говорят, что частица находится в бесконечно глубокой потенциальной яме. Движение частицы описывается уравнением Шредингера в форме:

Дискретный спектр собственных значений оператора

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{h^2} W\psi = 0$$ **при (0 ≤ *x* < *a*)**

В точках x=0; x=a функция ψ обращается в 0 (поскольку стенки − идеально отражающие, то вероятность нахождения на них частицы равна нулю). Решение этого уравнения ищем в виде:

$$\psi = [\, A \cdot cos(qx) + B \cdot sin(qx)] \cdot exp\left(i\frac{W}{h} t \right)$$

где $$q = \sqrt{\frac{2m}{h^2} W}$$

Дискретный спектр собственных значений оператора

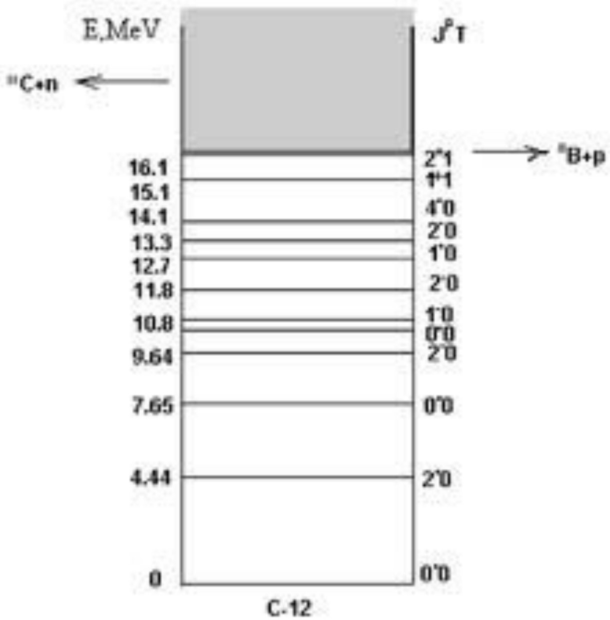
Исходя из граничных условий $\psi = 0|_{x=0, x=a}$ найдем:

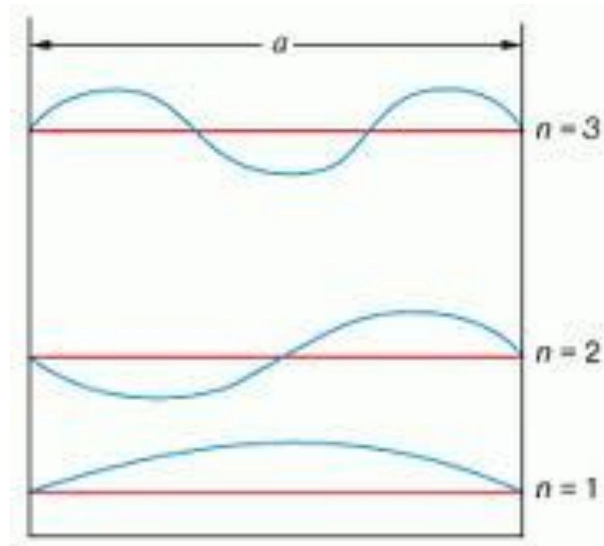
A = 0; $q = \dfrac{n\pi}{a}$ где n=1, 2, 3, … Тогда:

$$W = \frac{q^2 h^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 h^2}{2a^2 m}$$

Таким образом, полная энергия частицы в данной задаче может принимать лишь дискретные значения W_n, соответствующие различным значениям n. Эти значения образуют бесконечный ряд дискретных энергетических уровней. При переходе частицы из одного состояния в другое, ее энергия должна меняться скачком, т. е. в данной ситуации имеет место квантование энергии.

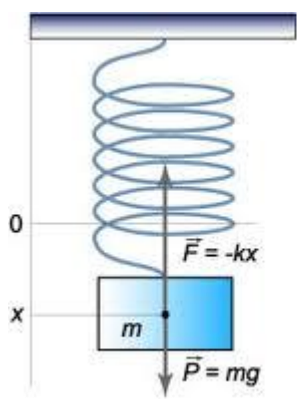
Дискретный спектр собственных значений оператора





Гармонический осциллятор

Любая система, совершающая гармонические колебания с малой амплитудой вблизи состояния устойчивого равновесия (атом в молекуле, электрон в атоме, математический маятник и т.д.) представляет собой гармонический осциллятор.



Рассмотрим частицу с массой *m*, смещенную на некоторое малое расстояние относительно положения устойчивого равновесия. На частицу действует возвращающая упругая сила. Считая, что частица движется вдоль прямой, уравнение ее движения можно записать в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -\alpha \cdot x$$

Гармонический осциллятор

- Здесь x – отклонение частицы от положения равновесия;

  $F = -\alpha \cdot x$ - упругая сила, возвращающая ее в это положение;

  α – величина, называемая коэффициентом упругости.

  Решение уравнения

  $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}x = 0$$

  при α=const:

Гармонический осциллятор

в вещественной форме имеет вид:

$$x = A \cdot cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}} \cdot t + \varphi\right)$$

Видим, что в указанных условиях частица совершает около положения равновесия гармонические колебания с частотой, определяемой только физическими параметрами m и α:

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

Гармонический осциллятор

- Модель гармонического осциллятора применима к любой системе, совершающей гармонические колебания с малой амплитудой вблизи состояния устойчивого равновесия (атом в молекуле, электрон в атоме, математический маятник и т.д.).

- Покажем, что энергия осциллятора в силовом поле не может принимать любые значения, она оказывается квантованной.

Гармонический осциллятор

- Полная энергия осциллятора в силовом поле, как отмечалось, равна:
- $W = W_k + U$ где $\boxed{W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}}$
- Потенциальная энергия U связана с действующей на частицу силой F соотношением: $\overline{F} = -gradU$
- В нашем одномерном случае:

$$\boxed{F = -\frac{dU}{dx} = -\alpha \cdot x}$$

Гармонический осциллятор

- Интегрируя это соотношение, найдем *U*:

$$U = \int \alpha \cdot x \cdot dx = \frac{\alpha \cdot x^2}{2} + C$$

- Полагая *C*=0 (константа интегрирования в каждой конкретной задаче определяется начальными условиями), получим:

$$\boxed{U = \frac{\alpha \cdot x^2}{2}}$$

- И найдем полную энергию осциллятора

Гармонический осциллятор

$$W = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha \cdot x^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha \cdot x^2}{2} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha}{m}x^2\right]$$

Состояние гармонического осциллятора с точки зрения квантовой теории характеризуется волновой функцией ψ, удовлетворяющей уравнению Шредингера:

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{h^2}\left[W - \frac{\alpha x^2}{2}\right] \cdot \psi = 0}$$

Гармонический осциллятор

- Решение этого уравнения хорошо исследовано. Оно является конечным и однозначным (как отмечалось, **волновая функция должна отвечать таким условиям**) на интервале $-\infty < X < \infty$ при дискретных значениях постоянной W:

$$\boxed{W = W_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot h\omega}$$

- где n = 0, 1, 2,… – любое целое число.

Гармонический осциллятор

- Так, **энергия гармонического осциллятора, находящегося в поле потенциальных сил, может принимать только дискретные значения и при изменении его состояния изменяется скачком на величину, кратную энергии кванта $h\omega$.**
- Наименьшая величина энергии гармонического осциллятора:

$$\boxed{W_0 = \frac{1}{2} h\omega}$$

- Она называется нулевой энергией гармонического осциллятора.

Гармонический осциллятор

- Важность полученного результата заключается в том, что **любая квантовая система при наличии каких – либо сил, внутренних или внешних, во многих случаях проявляет свойства дискретности ее энергии, т.е. ее энергия квантуется**.