ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКОВ

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Вычисление определителя 2-го порядка

Определителем II порядка, составленного из чисел a_1, b_1, a_2, b_2 называется число определяемое равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 - коэффициенты системы $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$

Порядком определителя называется число столбцов или строк, которых всегда одинаковое количество.

Вычисление определителя II порядка можно проиллюстрировать схемой

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Для системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ **определитель** $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ **называется** **главным.**

Составим еще два определителя для данной системы, которые получаются из главного заменой столбца коэффициентов при соответствующей переменной столбцом свободных членов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2 ,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 .$$

Для того чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы главный определитель системы Δ был отличен от нуля.
В этом случае решение находится по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Эти формулы называются **формулами Крамера.**

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x + 4y = 18, \\ 2x + 5y = 19. \end{cases}$

Т.к. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 15 - 8 = 7 \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое найдем по формулам Крамера.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 19 & 5 \end{vmatrix} = 90 - 76 = 14$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 57 - 36 = 21$, $x = \frac{14}{7}$, $y = \frac{21}{7}$.

$x = 2$, $y = 3$.

Ответ: (2; 3).

Вычисление определителя 3-го порядка

Определитель третьего порядка можно вычислить через определители второго порядка.

$$(*)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Определители второго порядка, входящие в выражение (1), составлены следующим образом. Вычеркнем из таблицы (*) ту строку, и тот столбец, где стоит a_{11}. Остающийся определитель входит в (1) множителем при вычеркнутой букве a_{11}. Аналогично получаются два других определителя формулы. Смотри схему.

a_{11} (1+1 = 2 – четное) $\qquad$ $-a_{12}$ (1 + 2 = 3 - нечетное) $\qquad$ a_{13} (1 + 3 = 4 – четное)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Пример вычисления определителя 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3 \cdot 5 - (-2) \cdot (-1)) - 2 \cdot (4 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)) + 6 \cdot (4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) =$$

$$= (15 - 2) - 2 \cdot (20 + 2) + 6 \cdot (-8 - 6) = 13 - 44 - 84 = -115.$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЁХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя переменными.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \quad (\bigstar)$$

Запишем главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Составим еще три определителя:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Согласно формулам Крамера, если $\Delta \neq 0$, то система $(\bigstar)$ имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ТРЁХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

Решение: при решении данной системы применяем формулы Крамера:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=14, \quad D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=14,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}=28, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}=42$$

отсюда, $x = \frac{14}{14} = 1$; $y = \frac{28}{14} = 2$; $z = \frac{42}{14} = 3$

Ответ: (1; 2; 3)