Пропозициональная логика 1

Пропозициональная логика - это раздел фрагмент логики, в котором новые операторы строятся из заданных операторов, используя логические связки, такие как «нет» «или» «и». Значение истинности такого утверждения затем полностью определяется наборами значений истинности переменных, входящих в него.

Логические связки есть описание простых логических операций в логике высказываний. В логике высказываний применяют следующие основные логические связки: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, неравнозначность, стрелка Пирса, штрих Шеффера

Высказыванием **называется любое повествовательное предложение, про которое известно, что оно или истинно, или ложно.**

Вопросительные, повелительные и бессмысленные предложения не являются логическими высказываниями.

Противоречивые предложения также не являются логическими высказываниями

Например:

- **Слоны летят на север.** - ***Ложное высказывание.***
- **Треугольник - это геометрическая фигура.** - ***Истинное высказывание***
- **Число 8 не делится на 4.** - ***Ложное высказывание.***
- **Посмотрите на потолок.** – ***Не высказывание.***

Высказывание считается ***простым***, если никакую его часть нельзя рассматривать как отдельное высказывание

Высказывание, которое можно разложить на части называется ***сложным (составным).***

В математической логике высказывания обозначают *большими латинскими буквами.*

Например:

А = Новосибирск – не столица России.

С = Все растения не ядовиты.

Любое высказывание может быть *ложно* (0 или $\perp$) или *истинно* (1 или T).

Простые высказывания **называются**

логическими переменными

Например:

A = «Луна является спутником Земли.»

→ A = 1

B = «Москва – столица Гималаев.»

→ B = 0

• ***Сложные высказывания*** называются ***логическими формулами или логическими функциями***,

Значение логической функции может принимать значения только 0 или 1.

Составные (сложные) высказывания

строятся из простых с помощью логических связок:

"***и***« $\wedge$,

"***или***« $\vee$,

"***не***", $\neg$

«***если …, то…***»,$\rightarrow$

«…***тогда и только тогда, когда…***»$\oplus$

и др.$\sim\equiv\leftrightarrow\supset\neq\perp\downarrow|$

Например

I. ОПЕРАЦИЯ – ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно при помощи союза *«и»* называется *операцией логического умножения или конъюнкцией*

В алгебре логики конъюнкция обозначается значком «&» либо «$\wedge$»

Высказывание вида **A & B (A конъюнкция B)** истинно тогда и только тогда, когда

истинны оба высказывания и A и B

Таблица истинности для **A & B**

	A	B	A & B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

II. ОПЕРАЦИЯ – ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно при помощи союза *«или»* называется *операцией логического сложения или дизъюнкцией*

В алгебре логики дизъюнкция обозначается значком «**V**» либо «+»

Высказывание вида **A V B (A дизъюнкция B)** истинно тогда и только тогда, когда ***истинно хотя бы одно из входящих в него простых (элементарных) высказываний***

Таблица истинности для **A V B**

A	B	A v B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Союз **«или»** употребляется в неисключающих друг друга случаях.

III. ОПЕРАЦИЯ – ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ

Присоединение частицы *«не»* к высказыванию называется *операцией логического отрицания или инверсией*

В алгебре логики инверсия обозначается значком « ¬ » либо чертой над высказыванием **«Ā»**

Рассмотренные выше операции были двуместные, т.е. выполнялись над двумя высказываниями. В алгебре логики широко применяется и одноместная операция – операция *отрицание.*

Высказывание вида **Ā (инверсия А)** делает ***истинное*** высказывание ***ложным*** и , наоборот, ***ложное - истинным***

Таблица истинности для **Ā**

A	Ā
0	1
1	0

Например

IV. ОПЕРАЦИЯ – ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ

Объединение двух высказываний с помощью оборота речи *«если …, то …»* называется *операцией логического следования или импликация*

В алгебре логики импликация обозначается значком **« → » или ⊃**

Высказывание вида **A → B (A импликация B)** ***ложно*** тогда и только тогда, ***когда A – истинно, а B – ложно*** (т.е. из истинного высказывания следует ложное)

Таблица истинности для **A → B**

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \to B = \overline{A} + B$$

V. ОПЕРАЦИЯ – ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО

Объединение двух высказываний с помощью оборота речи *«…тогда и только тогда, когда …»* называется *операцией логического равенства или эквивалентность*

В алгебре логики высказываний эквивалентность обозначается значком « ↔ » **или** ~

Эквивалентность формул в алгебре логики обозначается знаком тождественного равенства ≡ и знаком ~.

Символ ~ является символом формального языка, с помощью которого строятся формулы. Символ ≡ обозначает отношение на множестве формул

Высказывание вида **A ↔ B** **(А эквивалентность В)** ***истинно*** тогда и только тогда, когда ***оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны***

Таблица истинности для **A** ↔ **B**

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

VI. ОПЕРАЦИЯ – ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ «ИЛИ»

Неравнозначностью двух высказываний A и B называется высказывание, истинное, когда истинностные значения A и B не совпадают, и ложное — в противном случае. Обозначается A⊕ B

Таблица истинности для A⊕ B

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

VII. ОПЕРАЦИЯ – ШТРИХ ШЕФФЕРА

Логическая операция A|B, которая ложна, когда оба выражения - истина. Таблица истинности для *Штриха Шеффера* имеет вид

A	B	A | B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

VI. ОПЕРАЦИЯ –

СТРЕЛКА ПИРСА

Логическая операция A↓B, которая ложна, когда истинно хотя бы одно из выражений. Таблица истинности для стрелки Пирса имеет вид:

Таблица истинности для A↓ B

A	B	A ↓ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Применяя логические операции, можно построить и решить логические выражения или логические формулы:

Для построения простые логические высказывания обозначают как логические переменные – *буквами*;

Связывают их с помощью знаков логических операций.

Если сопоставить логическому выражению некую функцию F, то такая запись называется логической формулой.

Такая запись позволяет определить значение логической функции для любого набора значений логических переменных.

Например: $F\ (X,Y,Z) = \overline{X} + Y \land Z$

Для определения значения логической функции

<u>необходимо помнить</u>

порядок выполнения логических операций

по иерархии

Операции в логическом выражении выполняются слева направо с учетом скобок в следующем порядке:

1. ( )
2. ¬,
3. &, |, ↓
4. ∨,
5. ⊕, ~

Для построения таблицы истинности любой логической функции

следует соблюдать:

1. определить кол-во строк таблицы – 2^n , где n = кол-ву логических переменных; Для двух переменных 4 строки, для трех 8.

2. определить кол-во столбцов таблицы- оно равно кол-ву логических переменных + кол-во логических операций;

Для построения таблицы истинности любой логической функции

следует соблюдать:

3. построить таблицу истинности с найденным кол-вом строк и столбцов + строка с названием столбцов;

4. заполнить столбцы таблицы, выполняя логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности.

Вернёмся к нашему примеру:

$F\ (X, Y, Z) = \overline{X} + Y \wedge Z$

1. **Количество входных переменных равно трем *(X,Y,Z)*, а значит строк**

   Q= 2^3 = 8 +1 =9 (заголовки столбцов).

2. Количество столбцов равно 6

(3 переменные + 3 операции).

ОПРЕДЕЛИМ ЗНАЧЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

$$F\ (X,Y,Z) = \overline{X} + Y \wedge Z$$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$Y \wedge Z$	$\overline{X} + Y \wedge Z$

ЗНАЧЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

$$F\ (X, Y, Z) = \overline{X} + Y \wedge Z$$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$Y \wedge Z$	$\overline{X} + Y \wedge Z$
0	0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	0	**1**
0	1	0	1	0	**1**
0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	0	0	**0**
1	1	0	0	0	**0**
1	1	1	0	1	**1**

Математическая логика - решение задач

Найти значения логических формул на заданных логических значениях:

1)F= $(0 \vee 0) \vee (1 \vee 1)$

2)F= $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$

3)F= $(0 \wedge 0) \wedge (1 \wedge 1)$

4)F= $\neg 1 \vee (1 \wedge 1) \wedge (\neg 0 \wedge 1)$

Найти значения логических формул на заданных логических значениях:

0 1 1

1)F= (0 ∨ 0) ∨ (1 ∨ 1)

2)F= (1 ∨ 1) ∨ (1 ∨ 0)

3)F= (0 ∧ 0) ∧ (1 ∧ 1)

0 1 1 1 1 1

4)F= ¬1 ∨ (1 ∧ 1) ∧ (¬0 ∧ 1)

Найдём значения логических выражений:

$$1)\ F = \underbrace{(0 \vee 0)}_{0} \underbrace{\vee}_{1} \underbrace{(1 \vee 1)}_{1}$$

Ответ: 1

$$2)\ F = (1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$$

Ответ: 1

$$3)\ F = (0 \wedge 0) \wedge (1 \wedge 1)$$

Ответ: 0

$$4)\ F = \underbrace{\neg 1}_{0} \underbrace{\vee}_{1} (1 \underbrace{\wedge}_{1} 1) \wedge (\underbrace{\neg 0}_{1} \underbrace{\wedge}_{1} 1)$$

1

Ответ: 1

Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание $\neg((X > 3) \rightarrow (X > 4))$

1) 1 2)2 3) 3 4) 4

Решение:

В записи логического высказывания стоит отрицание сложного высказывания. Если $\neg((X > 3) \text{ –> } (X > 4)) = 1$ (истинно),

то $(X > 3) \text{ –> } (X > 4) = 0$ (ложно)

Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание $\neg((X > 3) \rightarrow (X > 4))$

1) 1 **2)2** **3) 3** **4) 4**

Решение:

Импликация ложна в единственном случае - ***когда из истинного высказывания следует ложное,*** тогда $(X > 3) = 1$, а $(X > 4) = 0$.

Получаем, что X должно быть задано в диапазоне:

$X > 3$ и $X \leq 4$.

Только одно число входит в этот промежуток – это **4**

Правильный ответ – 4.