Пропозициональная логика 1

Пропозициональная логика - это раздел фрагмент логики, в котором новые операторы строятся из заданных операторов, используя логические связки, такие как «нет» «или» «и». Значение истинности такого утверждения затем полностью определяется наборами значений истинности переменных, входящих в него.

Логические связки есть описание простых логических операций в логике высказываний. В логике высказываний применяют следующие основные логические связки: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, неравнозначность, стрелка Пирса, штрих Шеффера

Высказыванием **называется любое повествовательное предложение, про которое известно, что оно или истинно, или ложно.**

Вопросительные, повелительные и бессмысленные предложения не являются логическими высказываниями.

Противоречивые предложения также не являются логическими высказываниями

Например:

- **Слоны летят на север. -** ***Ложное высказывание.***
- **Треугольник - это геометрическая фигура. -** ***Истинное высказывание***
- **Число 8 не делится на 4. -** ***Ложное высказывание.***
- **Посмотрите на потолок. –**

  Не высказывание.

Высказывание считается ***простым***, если никакую его часть нельзя рассматривать как отдельное высказывание

Высказывание, которое можно разложить на части называется ***сложным (составным).***

В математической логике высказывания обозначают *<u>большими латинскими буквами.</u>*

Например:

А = Новосибирск – не столица России.

С = Все растения не ядовиты.

Любое высказывание может быть *ложно* (0 или $\perp$) или *истинно* (1 или T).

Простые высказывания **называются**

логическими переменными

Например:

A = «Луна является спутником Земли.»

→ A = 1

B = «Москва – столица Гималаев.»

→ B = 0

- ***<u>Сложные высказывания</u>*** называются ***логическими формулами или логическими функциями***,

Значение логической функции может принимать значения только 0 или 1.

Составные (сложные) высказывания
строятся из простых с помощью логических связок:

*"**и**«* $\wedge$,

*"**или**«* $\vee$,

*"**не**",* $\neg$

«если ..., то...»,$\rightarrow$

«...***тогда и только тогда, когда...***»$\oplus$

и др.$\sim \equiv \leftrightarrow \supset \neq \perp \downarrow |$

Например

I. ОПЕРАЦИЯ – ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно при помощи союза *«и»* называется *операцией логического умножения или конъюнкцией*

В алгебре логики конъюнкция обозначается значком «&» либо «Λ»

Высказывание вида **А & В (А конъюнкция В)** истинно тогда и только тогда, когда

истинны оба высказывания и А и В

Таблица истинности для **А & В**

	A	B	A & B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

II. ОПЕРАЦИЯ – ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно при помощи союза *«или»* называется *операцией логического сложения или дизъюнкцией*

В алгебре логики дизъюнкция обозначается значком «**V**» либо «+»

Высказывание вида **A V B (A дизъюнкция B)** истинно тогда и только тогда, когда ***истинно хотя бы одно из входящих в него простых (элементарных) высказываний***

Таблица истинности для **A V B**

A	B	A V B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Союз **«или»** употребляется в неисключающих друг друга случаях.

III. ОПЕРАЦИЯ – ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ

Присоединение частицы _«не»_ к высказыванию называется _операцией логического отрицания или инверсией_

В алгебре логики инверсия обозначается значком « ¬ » либо чертой над высказыванием «**Ā**»

Рассмотренные выше операции были двуместные, т.е. выполнялись над двумя высказываниями. В алгебре логики широко применяется и одноместная операция – операция *отрицание.*

Высказывание вида **Ā (инверсия А)** делает ***истинное*** высказывание ***ложным*** и , наоборот, ***ложное* - *истинным***

Таблица истинности для **Ā**

A	Ā
0	1
1	0

Например

IV. ОПЕРАЦИЯ – ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ

Объединение двух высказываний с помощью оборота речи *«если …, то …»* называется *операцией логического следования или импликация*

В алгебре логики импликация обозначается значком **« → » или ⊃**

Высказывание вида **A → B (A импликация B)** ***ложно*** тогда и только тогда, ***когда A – истинно, а B – ложно*** (т.е. из истинного высказывания следует ложное)

Таблица истинности для **A → B**

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \to B = \overline{A} + B$$

V. ОПЕРАЦИЯ – ЛОГИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО

Объединение двух высказываний с помощью оборота речи *«…тогда и только тогда, когда …»* называется *операцией логического равенства или эквивалентность*

В алгебре логики высказываний эквивалентность обозначается значком **« ↔ »** **или** ~

Эквивалентность формул в алгебре логики обозначается знаком тождественного равенства ≡ и знаком ~.

Символ ~ является символом формального языка, с помощью которого строятся формулы. Символ ≡ обозначает отношение на множестве формул

Высказывание вида **A ↔ B** **(A эквивалентность B)** ***истинно*** тогда и только тогда, когда ***оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны***

Таблица истинности для **A** ↔ **B**

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

VI. ОПЕРАЦИЯ – ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ «ИЛИ»

Неравнозначностью двух высказываний A и B называется высказывание, истинное, когда истинностные значения A и B не совпадают, и ложное — в противном случае. Обозначается A⊕ B

Таблица истинности для A⊕ B

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

VII. ОПЕРАЦИЯ –
ШТРИХ ШЕФФЕРА

Логическая операция A|B, которая ложна, когда оба выражения - истина. Таблица истинности для *Штриха Шеффера* имеет вид

A	B	A | B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

VI. ОПЕРАЦИЯ –
СТРЕЛКА ПИРСА

Логическая операция A↓B, которая ложна, когда истинно хотя бы одно из выражений. Таблица истинности для стрелки Пирса имеет вид:

Таблица истинности для A↓ B

A	B	A ↓ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Применяя логические операции, можно построить и решить логические выражения или логические формулы:

- **Для построения простые логические высказывания обозначают как логические переменные – *буквами*;**
- **Связывают их с помощью знаков логических операций.**

Если сопоставить логическому выражению некую функцию F, то такая запись называется логической формулой.

Такая запись позволяет определить значение логической функции для любого набора значений логических переменных.

Например: $F\ (X,Y,Z) = \overline{X} + Y \wedge Z$

Для определения значения логической функции

<u>необходимо помнить</u>

порядок выполнения логических операций

по иерархии

Операции в логическом выражении выполняются слева направо с учетом скобок в следующем порядке:

1. ( )
2. ¬,
3. &, |, ↓
4. ∨,
5. ⊕, ~

Для построения таблицы истинности любой логической функции

следует соблюдать:

1. определить кол-во строк таблицы – 2^n , где n = кол-ву логических переменных; Для двух переменных 4 строки, для трех 8.

2. определить кол-во столбцов таблицы- оно равно кол-ву логических переменных + кол-во логических операций;

Для построения таблицы истинности любой логической функции

следует соблюдать:

3. построить таблицу истинности с найденным кол-вом строк и столбцов + строка с названием столбцов;

4. заполнить столбцы таблицы, выполняя логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности.

Вернёмся к нашему примеру:

$F\ (X,Y,Z) = \overline{X} + Y \wedge Z$

1. **Количество входных переменных равно трем *(X,Y,Z)*, а значит строк**

   $Q = 2^3 = 8 + 1 = 9$ (заголовки столбцов).

2. Количество столбцов равно 6

(3 переменные + 3 операции).

ОПРЕДЕЛИМ ЗНАЧЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

$$F\ (X, Y, Z) = \overline{X} + Y \land Z$$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$Y \land Z$	$\overline{X} + Y \land Z$

ЗНАЧЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

$$F\,(X,Y,Z) = \overline{X} + Y \wedge Z$$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$Y \wedge Z$	$\overline{X} + Y \wedge Z$
0	0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	0	**1**
0	1	0	1	0	**1**
0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	0	0	**0**
1	1	0	0	0	**0**
1	1	1	0	1	**1**

Математическая логика - решение задач

Найти значения логических формул на заданных логических значениях:

1) $F = (0 \lor 0) \lor (1 \lor 1)$

2) $F = (1 \lor 1) \lor (1 \lor 0)$

3) $F = (0 \land 0) \land (1 \land 1)$

4) $F = \neg 1 \lor (1 \land 1) \land (\neg 0 \land 1)$

Найти значения логических формул на заданных логических значениях:

0 1 1

1)$F= (0 \vee 0) \vee (1 \vee 1)$

2)$F= (1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$

3)$F= (0 \wedge 0) \wedge (1 \wedge 1)$

0 1 1 1 1 1

4)$F= \neg 1 \vee (1 \wedge 1) \wedge (\neg 0 \wedge 1)$

Найдём значения логических выражений:

0 1 1

1) $F = (0 \vee 0) \vee (1 \vee 1)$

Ответ: 1

2) $F = (1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$

Ответ: 1

3) $F = (0 \wedge 0) \wedge (1 \wedge 1)$

Ответ: 0

0 1 1 1 1 1

4) $F = \neg 1 \vee (1 \wedge 1) \wedge (\neg 0 \wedge 1)$

Ответ: 1

Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание $\neg((X > 3) \rightarrow (X > 4))$

1) 1 2)2 3) 3 4) 4

Решение:

В записи логического высказывания стоит отрицание сложного высказывания.

Если $\neg((X > 3) -> (X > 4)) = 1$ (истинно),

то $(X > 3) -> (X > 4) = 0$ (ложно)

Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание $\neg((X > 3) \rightarrow (X > 4))$

1) 1 **2)2** **3) 3** **4) 4**

Решение:

Импликация ложна в единственном случае - ***когда из истинного высказывания следует ложное,***
тогда (X > 3) = 1, а (X > 4) = 0.
Получаем, что X должно быть задано в диапазоне:
X > 3 и X ≤ 4.
Только одно число входит в этот промежуток – это **4**

Правильный ответ – 4.