

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ЛОГАРИФМЫ И ИХ СВОЙСТВА

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени x , в которую нужно возвести число a , чтобы получить b .

Обозначение: $\log_a b = x$.

Запись $\log_a b = x$ равносильна $a^x = b$, где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$\log_2 8 = 3$	\Leftrightarrow	$2^3 = 8$
$\log_3 \frac{1}{9} = -2$	\Leftrightarrow	$3^{-2} = \frac{1}{9}$
$\log_7 7 = 1$	\Leftrightarrow	$7^1 = 7$
$\log_4 1 = 0$	\Leftrightarrow	$4^0 = 1$

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

$$4^{\log_4 5} = 5; \quad 2^{\log_2 8} = 8$$

Свойства логарифмов ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$)

- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \rightarrow \log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 18 \cdot 2 = \log_6 36 = 2$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \rightarrow \log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$
- $\log_a b^r = r \log_a b \rightarrow \log_2 8^4 = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1)$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\log_{\sqrt{2}} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 16}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = 4 : \frac{1}{2} = 8$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e ($e = 2,718\dots$) и пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Свойства логарифмов

при любом $a > 0$ ($a \neq 1$) и любых $x > 0$, $y > 0$, любых действительных p и $k \neq 0$ выполнены равенства:

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

Логарифм произведения $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

Логарифм частного $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

Логарифм степени $\log_a x^p = p \log_a x$

Основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x} = x$

Формула перехода $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_{a^k} a^p = \frac{p}{k}$$

$$\log_{a^k} x^p = \frac{p}{k} \log_a x$$

$$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x ; \log_b a^{2k} = 2k \log_b |a|$$

«ХИТРОСТИ»

свойств логарифмов:

$$\log_a b^2 = 2 \log_a |b|$$

при $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$;

$$\log_a bc = \log_a (-b) + \log_a (-c)$$

при $a > 0, a \neq 1, b < 0, c < 0$;

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a (-b) - \log_a (-c)$$

при $a > 0, a \neq 1, b < 0, c < 0$;

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

при $a > 0, b > 0, b \neq 0, c > 0$

Способы сравнения логарифмов.

① Свойство монотонности

• Сравнить $\log_a b$ и $\log_a c$ основания равны a

1) Если $a > 1$, то $y = \log_a t$ – возрастающая, тогда из $b > c \Rightarrow \log_a b > \log_a c$;

2) Если $0 < a < 1$, то $y = \log_a t$ – убывающая, тогда из $b > c \Rightarrow \log_a b < \log_a c$;

• Примеры: $\log_3 7 < \log_3 8$;

$$\log_{1/3} 7 > \log_{1/3} 8;$$

Способы сравнения логарифмов.

⑧ Введение
вспомогательного
числа

$$\log_5 6/5 < \log_2 3/2$$

$$\log_2 3/2 > \log_5 3/2$$

$$\log_5 3/2 > \log_2 6/5$$

$$3/2 = 15/10 > 6/5 = 12/15$$

⑨ Вычитание
единицы

$$\log_5 6 < \log_2 3$$

$$\log_5 6 - 1 < \log_2 3 - 1$$

$$\log_5 6/5 < \log_2 3/2$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

$$\log_3(1-2x) = 1$$

$$1-2x > 0$$

$$2x < 1$$

$$x < \frac{1}{2}$$

I способ

$$1-2x = 3^1$$

$$-2x = 2$$

$$x = -1$$

$$-1 < \frac{1}{2} \quad \text{В.}$$

II способ

$$\log_3(1-2x) = \log_3 3$$

$$1-2x = 3$$

$$x = -1$$

$$-1 < \frac{1}{2} \quad \text{В.}$$

Ответ: -1 .

$$x \lg x = 0$$

$$x > 0.$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ \lg x = 0 \end{cases}$$

$$0 > 0 \text{ H.}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 1 \end{cases}$$

$$1 > 0 \text{ B.}$$

Ombem: 1.

$$\lg x = 2 - \lg 5$$

$$x > 0$$

$$\lg x = \lg 100 - \lg 5$$

$$\lg x = \lg(100 : 5)$$

$$\lg x = \lg 20$$

$$x = 20, \quad 20 > 0 \text{ B.}$$

Ombem: 20

$$\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1$$

$$x > 0$$

$$\lg^2 x + 2 \lg x - (\lg^2 2 - 1) = 0$$

$$\lg x = t$$

$$t^2 + 2t - (\lg^2 2 - 1) = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + (\lg^2 2 - 1) = 1 + \lg^2 2 - 1 = \lg^2 2$$

$$t_1 = -1 - \sqrt{\lg^2 2} = -1 - \lg 2$$

$$t_2 = -1 + \lg 2$$

$$\begin{cases} \lg x = -(1 + \lg 2), \\ \lg x = \lg 2 - 1, \\ \lg x = -(\lg 10 + \lg 2), \\ \lg x = \lg 2 - \lg 10, \\ \lg x = -\lg 20, \\ \lg x = \lg \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$x = 20^{-1}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$20^{-1} > 0 \text{ B.}$$

$$\frac{1}{5} > 0 \text{ B.}$$

Ombem: $\frac{1}{20}, \frac{1}{5}$

$$\lg(7x-9)^2 + \lg(3x-4)^2 = 2$$

$$7x-9 \neq 0 \quad 3x-4 \neq 0$$

$$x \neq \frac{9}{7} \quad x \neq \frac{4}{3}$$

$$2 \lg|7x-9| + 2 \lg|3x-4| = 2$$

$$\lg|7x-9| + \lg|3x-4| = 1$$

$$\lg(|7x-9| \cdot |3x-4|) = 1$$

$$\lg|21x^2 - 27x - 28x + 36| = 1$$

$$\lg|21x^2 - 55x + 36| = 1$$

$$|21x^2 - 55x + 36| = 10$$

$$21x^2 - 55x + 36 = 10$$

$$21x^2 - 55x + 36 = -10$$

$$21x^2 - 55x + 26 = 0$$

$$21x^2 - 55x + 46 = 0$$

$$D = 55^2 - 21 \cdot 26 \cdot 4 = 841$$

$$D = 3025 - 3864 < 0$$

$$x_1 = \frac{55 + 29}{42} = 2$$

корень нет

$$x_2 = \frac{55 - 29}{42} = \frac{26}{42} = \frac{13}{21}$$

Ответ: $2; \frac{13}{21}$

$$\frac{\lg(x-9)}{6} = \frac{3}{\lg(x-9)^2}$$

$$x-9 > 0 \quad x > 9$$

$$\frac{\lg(x-9)}{6} = \frac{3}{2 \lg(x-9)}$$

$$2 \lg^2(x-9) = 18$$

$$\lg^2(x-9) = 9$$

$$\lg(x-9) = 3$$

$$\lg(x-9) = -3$$

$$\lg(x-9) = \lg 10^3$$

$$\lg(x-9) = \lg 10^{-3}$$

$$x-9 = 10^3$$

$$x-9 = 10^{-3}$$

$$x = 10^3 + 9$$

$$x = 9 + 0,001$$

$$x = 1009$$

$$x = 9,001$$

$$1009 > 9 \text{ B.}$$

$$9,001 > 9 \text{ B.}$$

Ответ: $1009; 9,001$

$$\frac{1 + \lg(x-1)}{1 - \lg^2(x-1)} + \frac{1}{1 - \lg(x-1)} = 1.$$

$$x-1 > 0 \quad x > 1.$$

$$\lg(x-1) = t.$$

$$\frac{1+t}{1-t^2} + \frac{1}{1-t} = 1.$$

$$t \neq 1, \quad t \neq -1.$$

$$\frac{1+t}{(1-t)(1+t)} + \frac{1}{1-t} = 1.$$

$$\frac{2}{1-t} = 1 \quad 2 = 1-t.$$

$$t = -1.$$

$t \neq -1 \Rightarrow$ пересечения нет.

Ответ: \emptyset

$$x^{\lg x} = 100x$$

$$x > 0$$

$$\lg x \cdot \lg x = \lg 100x$$

$$\lg x \cdot \lg x = \lg 100 + \lg x$$

$$\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$$

$$\lg x = t$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_1 = -1$$

$$t_2 = 2$$

$$\lg x = -1$$

$$x = \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{10} > 0 \quad B$$

$$\lg x = 2$$

$$x = 100, \quad 100 > 0 \quad B$$

Om bärn: $0, 1, 100$

$$\sqrt[5]{x^{\log_3 x}} = 243$$

$$x > 0, \quad x \neq 1$$

$$\left(x^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{5}} = 243$$

$$\log_3 \left(x^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{5}} = \log_3 243$$

$$\frac{1}{5} \log_3 x \cdot \log_3 x = 5$$

$$\log_3^2 x = 25$$

$$\log_3 x = 5$$

$$x = 243$$

$$243 > 0$$

$$243 \neq 1$$

$$\log_3 x = -5$$

$$x = \frac{1}{243}$$

$$\frac{1}{243} > 0$$

$$\frac{1}{243} \neq 1$$

Om bärn: $243, \frac{1}{243}$

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$$

$x > 0$

$$\log_3 x + 2 \log_3 x - \log_3 x = 6$$

$$2 \log_3 x = 6$$

$$\log_3 x = 3$$

$$x = 27$$

$$27 > 0 - \text{B.}$$

Omsvar: 27

$$3 \log_3^2 x + x \log_3 x = 6$$

$$x > 0, x \neq 1$$

$$3 \log_3 x \cdot \log_3 x = (3 \log_3 x)^{\log_3 x}$$

$$= x \log_3 x$$

$$x \log_3 x + x \log_3 x = 6$$

$$2x \log_3 x = 6$$

$$x \log_3 x = 3$$

$$\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 3$$

$$\log_3^2 x = 1$$

$$\log_3 x = 1$$

$$\log_3 x = -1$$

$$x = 3$$

$$x = +\frac{1}{3}$$

$$3 > 0$$

$$\frac{1}{3} > 0 \quad \frac{1}{3} \neq 1$$

$$3 \neq 1$$

Omboran: $3; \frac{1}{3}$

$$x \log^2 x + \log x^3 + 3 = \frac{2}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$x > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}+1 - \sqrt{x+1}-1}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{2}{x+1-1} = \frac{2}{x}$$

$$x \log^2 x + 3 \log x + 3 = x$$

$$\log x \cdot \log^2 x + 3 \log x + 3 = \log x$$

$$(\log^2 x + 3 \log x + 3) \log x = \log x$$

$$\log x = t$$

$$(t^2 + 3t + 3)t - t = 0$$

$$t(t^2 + 3t + 3 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t^2 + 3t + 2 = 0 \end{cases}$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = -1 \quad t_3 = -2$$

$$\log x = 0$$

$$\log x = -1$$

$$\log x = -2$$

$$x = 1$$

$$x = \frac{1}{10}$$

$$x = \frac{1}{100}$$

$$1 > 0$$

$$\frac{1}{10} > 0$$

$$\frac{1}{100} > 0$$

Omboran: $1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}$

$$\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1.$$

$$\begin{cases} \sin(\pi \lg x) = 1, \\ \cos(\pi \lg x) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi \lg x) = 0, \\ \cos(\pi \lg x) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi \lg x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \pi \lg x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \pi \lg x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \pi \lg x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\pi \lg x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\lg x = \frac{1}{2} + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 10^{\frac{1}{2} + 2n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$10^{\frac{1}{2} + 2n} > 0. \quad B.$$

$$\pi \lg x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\lg x = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 10^{2n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$10^{2n} > 0. \quad B.$$

Ответ: $10^{\frac{1}{2} + 2n}, 10^{2n}$.

$$\log_3 x^3 + \log_2 x^2 = \frac{2 \lg 6}{\lg 2} + 1.$$

$$x > 0.$$

$$3 \log_3 x + 2 \log_2 x = 2 \log_2 6 + 1.$$

$$3 \frac{\log_2 x}{\log_2 3} + 2 \log_2 x = 2 \log_2 6 + 1.$$

$$\log_2 x = t.$$

$$\frac{3t}{\log_2 3} + 2t = \log_2 36 + \log_2 2.$$

$$t(3 + 2 \log_2 3) = \log_2 3 \cdot \log_2 72$$

$$t(\log_2 8 + \log_2 9) = \log_2 3 \cdot \log_2 72$$

$$t \cdot \log_2 72 = \log_2 3 \cdot \log_2 72$$

$$t = \log_2 3$$

$$\log_2 x = \log_2 3$$

$$x = 3.$$

$$3 > 0.$$

Ответ: 3

ЛИТЕРАТУРА

- ❖ Алгебра и начала анализа , 10 класс: учеб.для общеобразовательных организаций /М.В. Ткачев и др. : Просвещение, 2018 год
- ❖ Сканави М.Сборник задач для втузов (любое издание)
- ❖ Алгебра и начала анализа ,11 класс. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) под ред А. Г. Мордковича
- ❖ Сайт «Решу ЕГЭ»