ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ЛОГАРИФМЫ И ИХ СВОЙСТВА

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени x, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b.

Обозначение: $\log_a b = x$.

Запись $\log_a b = x$ равносильна $a^x = b$, где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$\log_2 8 = 3$	$\Leftrightarrow$	$2^3 = 8$
$\log_3 \frac{1}{9} = -2$	$\Leftrightarrow$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$
$\log_7 7 = 1$	$\Leftrightarrow$	$7^1 = 7$
$\log_4 1 = 0$	$\Leftrightarrow$	$4^0 = 1$

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$

$$4^{\log_4 5} = 5;\quad 2^{\log_2 8} = 8$$

Свойства логарифмов ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$)

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \rightarrow \log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 18 \cdot 2 = \log_6 36 = 2$
2. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \rightarrow \log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$
3. $\log_a b^r = r \log_a b \rightarrow \log_2 8^4 = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1)$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\log_{\sqrt{2}} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 16}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = 4 : \frac{1}{2} = 8$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e ($e = 2{,}718\ldots$) и пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Свойства логарифмов

при любом a>0 (a≠1) и любых x>0, y>0, любых действительных p и k≠0 выполнены равенства:

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

Логарифм произведения $$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

Логарифм частного $$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

Логарифм степени $$\log_a x^p = p \log_a x$$

Основное логарифмическое тождество $$a^{\log_a x} = x$$

Формула перехода $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_{a^k} a^p = \frac{p}{k}$$

$$\log_{a^k} x^p = \frac{p}{k} \log_a x$$

$$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x \; ; \log_b a^{2k} = 2k \log_b |a|$$

«ХИТРОСТИ» свойств логарифмов:

$$\log_a b^2 = 2\log_a |b|$$

$$при \quad a > 0, a \neq 1, b \neq 0;$$

$$\log_a bc = \log_a(-b) + \log_a(-c)$$

$$при \ a > 0, a \neq 1, b < 0, c < 0;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a(-b) - \log_a(-c)$$

$$при \ a > 0, a \neq 1, b < 0, c < 0;$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$при \ a > 0, b > 0, b \neq 0, c > 0$$

Способы сравнения логарифмов.

① Свойство монотонности

- Сравнить $\log_a b$ $\log_a c$ основания равны a

1)Если $a>1$, то $y=\log_a t$ – возрастающая, тогда из $b>c \Rightarrow \log_a b > \log_a c$;

2)Если $0<a<1$, то $y=\log_a t$ – убывающая, тогда из $b>c \Rightarrow \log_a b < \log_a c$;

- Примеры: $\log_3 7 < \log_3 8$;

$$\log_{1/3} 7 > \log_{1/3} 8;$$

Способы сравнения логарифмов.

⑧ Введение вспомогательного числа

$\log_5 6/5 < \log_2 3/2$

$\log_2 3/2 > \log_5 3/2$

$\log_5 3/2 > \log_2 6/5$

$3/2=15/10 > 6/5=12/15$

⑨ Вычитание единицы

$\log_5 6 < \log_2 3$

$\log_5 6 - 1 < \log_2 3 - 1$

$\log_5 6/5 < \log_2 3/2$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

$$\log_3(1-2x) = 1$$

$1-2x > 0 \qquad 2x < 1 \qquad x < \frac{1}{2}$

I способ

$1-2x = 3^1$

$-2x = 2$

$x = -1$

$-1 < \frac{1}{2}$ В.

II способ

$\log_3(1-2x) = \log_3 3$

$1-2x = 3$

$x = -1$

$-1 < \frac{1}{2}$ В.

Ответ: -1.

$x \lg x = 0$

$x > 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \lg x = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1 \end{array}\right.$

$0 > 0$ Н. $1 > 0$ В.

Ответ: 1.

$\lg x = 2 - \lg 5$

$x > 0$

$\lg x = \lg 100 - \lg 5$

$\lg x = \lg (100 : 5)$

$\lg x = \lg 20$

$x = 20$, $20 > 0$ В.

Ответ: 20

$\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1$

$x > 0$

$\lg^2 x + 2\lg x - (\lg^2 2 - 1) = 0$

$\lg x = t$

$t^2 + 2t - (\lg^2 2 - 1) = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + (\lg^2 2 - 1) = 1 + \lg^2 2 - 1 =$

$= \lg^2 2$

$t_1 = -1 - \sqrt{\lg^2 2} = -1 - \lg 2$

$t_2 = -1 + \lg 2$

$\left[\begin{array}{l} \lg x = -(1 + \lg 2), \\ \lg x = \lg 2 - 1; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \lg x = -(\lg 10 + \lg 2), \\ \lg x = \lg 2 - \lg 10; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \lg x = -\lg 20, \\ \lg x = \lg \frac{1}{5} \end{array}\right.$

$x = 20^{-1}$ $x = \frac{1}{5}$

$20^{-1} > 0$ В $\frac{1}{5} > 0$ В.

Ответ: $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{5}$

$$\lg(7x-9)^2+\lg(3x-4)^2=2$$

$$7x-9\neq 0 \qquad 3x-4\neq 0.$$

$$x\neq \frac{9}{7} \qquad x\neq\frac{4}{3}.$$

$$2\lg|7x-9|+2\lg|3x-4|=2$$

$$\lg|7x-9|+\lg|3x-4|=1.$$

$$\lg(|7x-9|\cdot|3x-4|)=1$$

$$\lg|21x^2-27x-28x+36|=1$$

$$\lg|21x^2-55x+36|=1$$

$$|21x^2-55x+36|=10.$$

$$\left[\begin{array}{l}21x^2-55x+36=10,\\ 21x^2-55x+36=-10.\end{array}\right.$$

$$21x^2-55x+26=0 \qquad 21x^2-55x+46=0.$$

$$D=55^2-21\cdot 26\cdot 4=841. \qquad D=3025-3864<0$$

$$x_1=\frac{55+29}{42}=2 \qquad \text{корнев нет}$$

$$x_2=\frac{55-29}{42}=\frac{26}{42}=\frac{13}{21}$$

Ответ: $2;\ \frac{13}{21}$

$$\frac{\lg(x-9)}{6}=\frac{3}{\lg(x-9)^2}$$

$$x-9>0 \qquad x>9.$$

$$\frac{\lg(x-9)}{6}=\frac{3}{2\lg(x-9)}$$

$$2\lg^2(x-9)=18.$$

$$\lg^2(x-9)=9$$

$$\left[\begin{array}{l}\lg(x-9)=3,\\ \lg(x-9)=-3.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\lg(x-9)=\lg 10^3,\\ \lg(x-9)=\lg 10^{-3};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x-9=10^3,\\ x-9=10^{-3}.\end{array}\right.$$

$$x=10^3+9 \qquad x=9+0{,}001$$

$$x=1009 \qquad x=9{,}001$$

$$1009>9 \text{ В.} \qquad 9{,}001>9 \text{ В.}$$

Ответ: $1009,\ 9{,}001.$

$$\frac{1+\lg(x-1)}{1-\lg^2(x-1)}+\frac{1}{1-\lg(x-1)}=1.$$

$x-1>0 \qquad x>1.$

$\lg(x-1)=t.$

$$\frac{1+t}{1-t^2}+\frac{1}{1-t}=1.$$

$t\neq 1, \qquad t\neq -1.$

$$\frac{1+t}{(1-t)(1+t)}+\frac{1}{1-t}=1.$$

$\frac{2}{1-t}=1 \qquad 2=1-t.$

$t=-1.$

$t\neq -1 \Rightarrow$ решений нет.

Ответ: $\varnothing$.

$$x^{\lg x} = 100x$$

$x > 0$

$$\lg x^{\lg x} = \lg 100x$$

$$\lg x \cdot \lg x = \lg 100 + \lg x$$

$$\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$$

$\lg x = t$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$t_1 = -1 \qquad t_2 = 2$

$\lg x = -1 \qquad x = \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{10} > 0$ В

$\lg x = 2 \qquad x = 100, \quad 100 > 0$ В

Ответ: 0,1; 100

$$\sqrt[5]{x^{\log_3 x}} = 243$$

$x > 0, \quad x \neq 1.$

$$\left(x^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{5}} = 243$$

$$\log_3\left(x^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{5}} = \log_3 243$$

$$\frac{1}{5}\log_3 x \cdot \log_3 x = 5$$

$$\log_3^2 x = 25$$

$\log_3 x = 5 \qquad \log_3 x = -5$

$x = 243 \qquad x = \frac{1}{243}$

$243 > 0 \qquad \frac{1}{243} > 0$

$243 \neq 1 \qquad \frac{1}{243} \neq 1$

Ответ: $243, \ \frac{1}{243}$

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$$

$x > 0$

$$\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x = 6$$

$$2\log_3 x = 6$$

$$\log_3 x = 3$$

$x = 27$, $27 > 0$ – В.

Ответ: 27

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 6$$

$x > 0\ ,\quad x \neq 1$

$$3^{\log_3 x \cdot \log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} =$$

$$= x^{\log_3 x}$$

$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 6$$

$$2x^{\log_3 x} = 6$$

$$x^{\log_3 x} = 3$$

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 3$$

$$\log_3^2 x = 1.$$

$\log_3 x = 1$ $\qquad$ $\log_3 x = -1$

$x = 3$ $\qquad$ $x = +\frac{1}{3}$

$3 > 0$ $\qquad$ $\frac{1}{3} > 0$ $\quad$ $\frac{1}{3} \neq 1.$

$3 \neq 1.$

Ответ: $3;\ \frac{1}{3}$

$$x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$$

$x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{2}{x+1-1} = \frac{2}{x}$$

$$x^{\lg^2 x + 3\lg x + 3} = x.$$

$$\lg x^{\lg^2 x + 3\lg x + 3} = \lg x.$$

$$(\lg^2 x + 3\lg x + 3)\lg x = \lg x.$$

$\lg x = t.$

$$(t^2 + 3t + 3)t - t = 0$$

$$t(t^2 + 3t + 3 - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t^2 + 3t + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$t_1 = 0$	$t_2 = -1$	$t_3 = -2$
$\lg x = 0$	$\lg x = -1$	$\lg x = -2$
$x = 1$	$x = \frac{1}{10}$	$x = \frac{1}{100}$
$1 > 0$	$\frac{1}{10} > 0$	$\frac{1}{100} > 0$

Ответ: $1;\ 0{,}1;\ 0{,}01.$

$\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(\pi \lg x) = 1, \\ \cos(\pi \lg x) = 0.\end{cases} \\ \begin{cases}\sin(\pi \lg x) = 0, \\ \cos(\pi \lg x) = 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\pi \lg x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z \\ \pi \lg x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z\end{cases} \\ \begin{cases}\pi \lg x = \pi n, \ n \in Z, \\ \pi \lg x = 2\pi n, \ n \in Z\end{cases}\end{array}\right.$$

$\pi \lg x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\lg x = \frac{1}{2} + 2n, \ n \in Z$

$x = 10^{\frac{1}{2} + 2n}, n \in Z.$

$10^{\frac{1}{2} + 2n} > 0.$ В.

$\pi \lg x = 2\pi n, \ n \in Z$

$\lg x = 2n, \ n \in Z$

$x = 10^{2n}, \ n \in Z$

$10^{2n} > 0.$ В.

Ответ: $10^{\frac{1}{2} + 2n}$; 10^{2n}.

$\log_3 x^3 + \log_2 x^2 = \frac{2 \lg 6}{\lg 2} + 1.$

$x > 0.$

$3 \log_3 x + 2 \log_2 x = 2 \log_2 6 + 1.$

$3 \frac{\log_2 x}{\log_2 3} + 2 \log_2 x = 2 \log_2 6 + 1.$

$\log_2 x = t.$

$\frac{3t}{\log_2 3} + 2t = \log_2 36 + \log_2 2.$

$t(3 + 2\log_2 3) = \log_2 3 \cdot \log_2 72$

$t(\log_2 8 + \log_2 9) = \log_2 3 \cdot \log_2 72$

$t \cdot \log_2 72 = \log_2 3 \cdot \log_2 72$

$t = \log_2 3$

$\log_2 x = \log_2 3$

$x = 3.$ $\quad 3 > 0.$

Ответ: 3

ЛИТЕРАТУРА

- Алгебра и начала анализа , 10 класс: учеб.для общеобразовательных организаций /М.В. Ткачев и др. : Просвещение, 2018 год
- Сканави М.Сборник задач для втузов

  (любое издание)
- Алгебра и начала анализа ,11 класс. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) под ред А. Г. Мордковича
- Сайт «Решу ЕГЭ»