

Логические основы компьютеров

1. Логические выражения и операции
2. Диаграммы
3. Преобразование логических выражений
4. Синтез логических выражений
5. Логические элементы компьютера
6. Логические задачи

Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

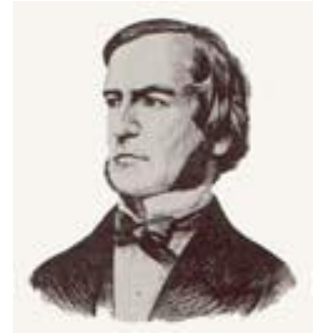
Тема 1. Логические выражения и операции

Булева алгебра

Двоичное кодирование – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

Задача – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

Джордж Буль разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).



Почему "логика"?

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

Логические высказывания

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- Сейчас идет дождь.
- Жирафы летят на север.
- История – интересный предмет.
- У квадрата – 10 сторон и все разные.
- Красиво!
- В городе N живут 2 миллиона человек.
- Который час?

Обозначение высказываний

A – Сейчас идет дождь. }
B – Форточка открыта. }

простые высказывания
(элементарные)



Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) "**и**", "**или**", "**не**", "**если ... то**", "**тогда и только тогда**" и др.

A и B Сейчас идет дождь и открыта форточка.

A или не B Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

если A, то B Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

не A и B Сейчас нет дождя и форточка открыта.

A тогда и только тогда, когда B Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то "**не A**" ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

также: \bar{A} ,
not A (Паскаль),
! A (Си)

**таблица
истинности
операции НЕ**

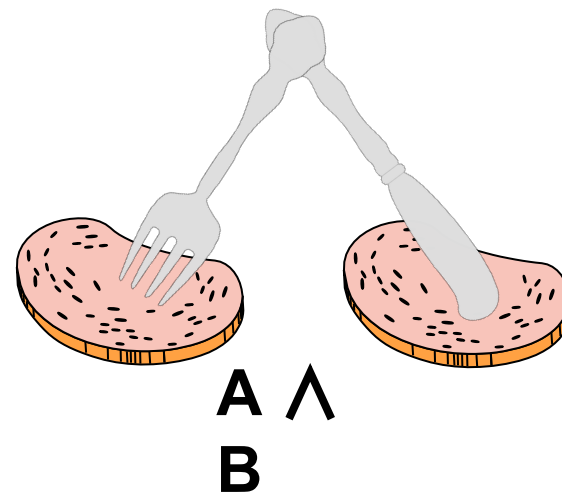
Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И (логическое умножение, конъюнкция)⁷

Высказывание "А и В" истинно тогда и только тогда, когда А и В истинны одновременно.

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также: $A \cdot B$, $A \wedge B$,
A and B (Паскаль),
A && B (Си)



КОНЪЮНКЦИЯ – от лат. *conjunctio* — соединение

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция) ⁸

Высказывание "А или В" истинно тогда, когда истинно А или В, или оба вместе.

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: $A+B$, $A \vee B$,
A or B (Паскаль),
A || B (Си)

ДИЗЪЮНКЦИЯ – от лат. *disjunctio* — разъединение

Операция "исключающее ИЛИ"

Высказывание " $A \oplus B$ " истинно тогда, когда истинно A или B , но *не оба одновременно*.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

также:
 $A \text{ xor } B$ (Паскаль),
 $A \wedge B$ (Си)

арифметическое
 сложение, $1+1=2$

остаток

сложение по модулю 2: $A \oplus B = (A + B) \bmod 2$

Свойства операции "исключающее ИЛИ"

$$A \oplus 0 = A$$

$$A \oplus A = 0$$

$$A \oplus 1 = \bar{A}$$

$$(A \oplus B) \oplus B = ?$$

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

A	B	$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot B$	$A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Импликация ("если ..., то ...")

Высказывание " $A \rightarrow B$ " истинно, если не исключено, что из A следует B .

A – "Работник хорошо работает".

B – "У работника хорошая зарплата".

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

Эквиваленция ("тогда и только тогда, ...")

Высказывание " $A \leftrightarrow B$ " истинно тогда и только тогда, когда A и B равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Базовый набор операций

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.



Сколько всего существует логических операций с двумя переменными?

Логические формулы

Прибор имеет три датчика и может работать, если два из них исправны. Записать в виде формулы ситуацию «авария».

A – "Датчик № 1 неисправен".

B – "Датчик № 2 неисправен".

C – "Датчик № 3 неисправен".

Аварийный сигнал:

X – "Неисправны два датчика".

X – "Неисправны датчики № 1 и № 2" **или**
"Неисправны датчики № 1 и № 3" **или**
"Неисправны датчики № 2 и № 3".

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

логическая
формула

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{B}$$

	A	B	$A \cdot B$	$\bar{A} \cdot B$	\bar{B}	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- вычислимыми** (зависят от исходных данных)

Составление таблиц истинности

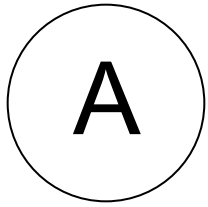
$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	A·B	A·C	B·C	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

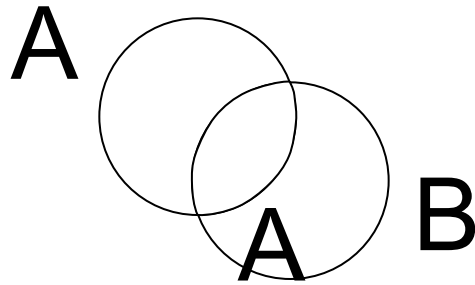
Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

Тема 2. Диаграммы

Диаграммы Вена (круги Эйлера)

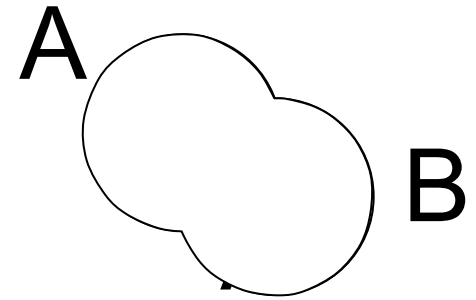


\bar{A}



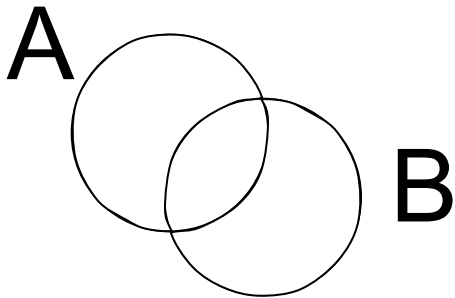
\cdot

B



$+$

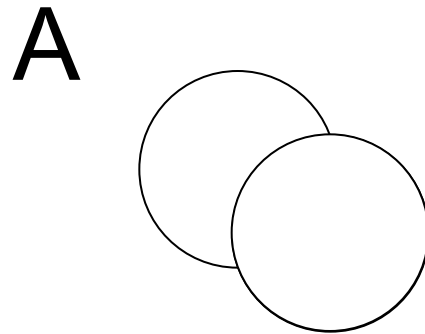
B



A

\oplus

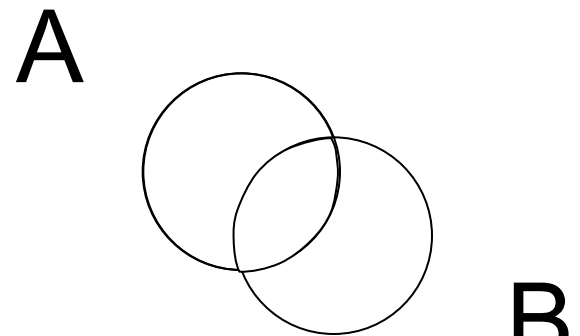
B



\dots

\rightarrow

B

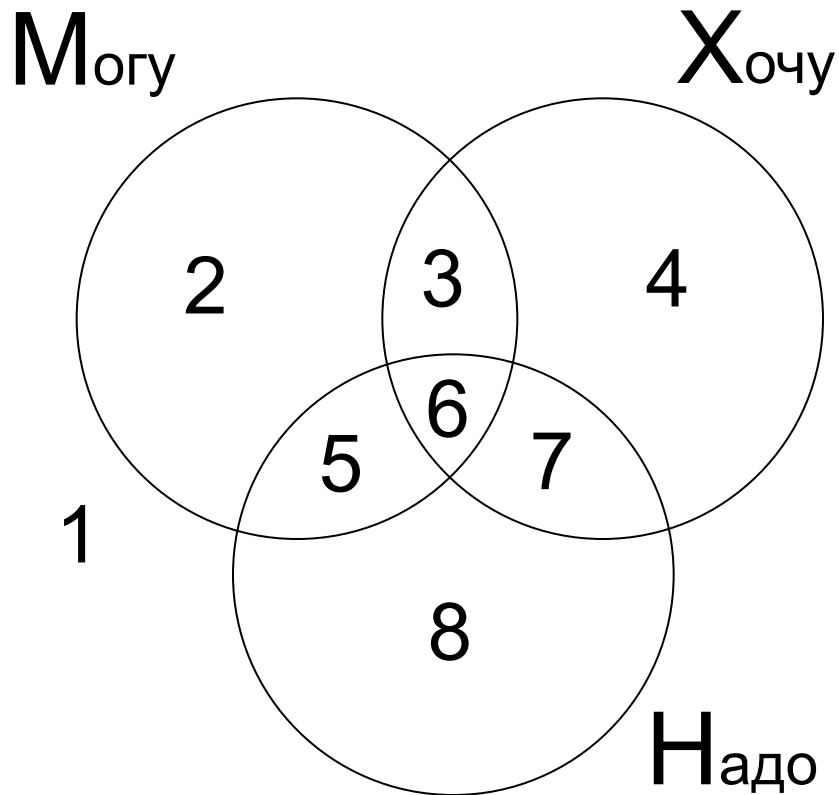


A

\leftrightarrow

B

Диаграмма МХН (Е.М. Федосеев)



$$1 = \bar{M} \cdot \bar{X} \cdot \bar{H} \quad 5 = M \cdot \bar{X} \cdot H$$

$$2 = M \cdot \bar{X} \cdot \bar{H} \quad 6 = M \cdot X \cdot H$$

$$3 = M \cdot X \cdot \bar{H} \quad 7 = \bar{M} \cdot X \cdot H$$

$$4 = \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H} \quad 8 = \bar{M} \cdot \bar{X} \cdot H$$

$$3 + 4 = M \cdot X \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H}$$

$$3 + 4 = X \cdot \bar{H}$$



Логические формулы можно упрощать!

Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

Тема 3. Преобразование логических выражений

Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
правила де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции $\oplus \rightarrow \leftrightarrow$ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

Шаг 3. Используя законы логики, упростить выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Упрощение логических выражений

$$Q = M \cdot X \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H} = (M + \bar{M}) \cdot X \cdot \bar{H} = X \cdot \bar{H}$$

$$X = (B \rightarrow A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (A \rightarrow C)$$

раскрыли \rightarrow

$$= (\bar{B} + A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (\bar{A} + C)$$

формула де Моргана

$$= (\bar{B} + A) \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

распределительный

$$= (\bar{B} \cdot \bar{A} + A \cdot \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

исключения третьего

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

повторения

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot (\bar{A} + C)$$

поглощения

$$= \bar{B} \cdot \bar{A}$$

Логические уравнения

$$\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot C = 1$$

$$A=1, B=0, C=1$$

$$\bar{A} \cdot B = 1$$

или

$$A \cdot \bar{B} \cdot C = 1$$

A=0, B=1, C – **любое**
2 решения: (0, 1, 0), (0, 1, 1)



Всего 3 решения!

$$K \cdot L + M \cdot L \cdot N + K \cdot L \cdot \bar{M} = 1$$

K=1, L=1,
M и N – **любые**
4 решения

M=1, L=1, N=1,
K – **любое**
2 решения

K=1, L=1, M=0,
N – **любое**
2 решения

$$L \cdot (K + M \cdot N) = 1$$



Всего 5 решений!

Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

Тема 4. Синтез логических выражений

Синтез логических выражений

A	B	X
0	0	1 •
0	1	1 •
1	0	0
1	1	1 •

$$\bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\bar{A} \cdot B$$

$$A \cdot B$$

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где $X = 1$.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое истинно только для этой строки.

Шаг 3. Сложить эти выражения и упростить результат.

распределительный

$$\begin{aligned} X &= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + A \cdot B = \bar{A} \cdot (\bar{B} + B) + A \cdot B \\ &= \bar{A} + A \cdot B = (\bar{A} + A) \cdot (\bar{A} + B) = \bar{A} + B \end{aligned}$$

исключения
третьего

распределительный

исключения
третьего

Синтез логических выражений (2 способ)

27

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \cdot \bar{B}$$

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где $X = 0$.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое истинно только для этой строки.

Шаг 3. Сложить эти выражения и упростить результат, который равен \bar{X} .

Шаг 4. Сделать инверсию.

$$\bar{X} = A \cdot \bar{B} \Rightarrow X = \overline{A \cdot \bar{B}} = \bar{A} + B$$



Когда удобнее применять 2-ой способ?

Синтез логических выражений

A	B	C	X
0	0	0	1 •
0	0	1	1 •
0	1	0	1 •
0	1	1	1 •
1	0	0	0
1	0	1	1 •
1	1	0	0
1	1	1	1 •

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$$

$$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

$$\bar{A} \cdot B \cdot C$$

$$A \cdot \bar{B} \cdot C$$

$$A \cdot B \cdot C$$

$$X = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$$

$$+ \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C$$

$$+ A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

$$= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{C} + C)$$

$$+ \bar{A} \cdot B \cdot (\bar{C} + C)$$

$$+ A \cdot C \cdot (\bar{B} + B)$$

$$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + A \cdot C$$

$$= \bar{A} \cdot (\bar{B} + B) + A \cdot C$$

$$= \bar{A} + A \cdot C$$

$$= (\bar{A} + A) \cdot (\bar{A} + C) = \bar{A} + C$$

Синтез логических выражений (2 способ)

A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\bar{X} = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C}$$

$$= A \cdot \bar{C} \cdot (\bar{B} + B)$$

$$= A \cdot \bar{C}$$

$$X = \overline{A \cdot \bar{C}} = \bar{A} + C$$

$$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

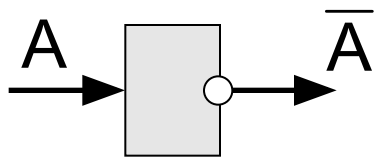
$$A \cdot B \cdot \bar{C}$$

Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

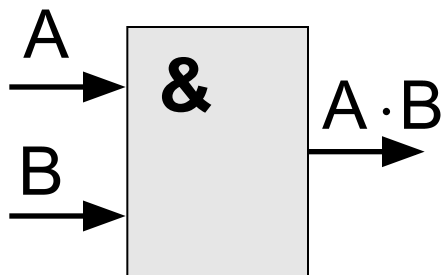
Тема 5. Логические элементы компьютера

Логические элементы компьютера

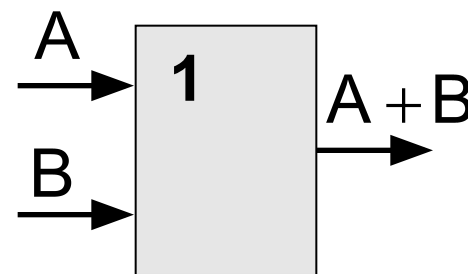
значок инверсии



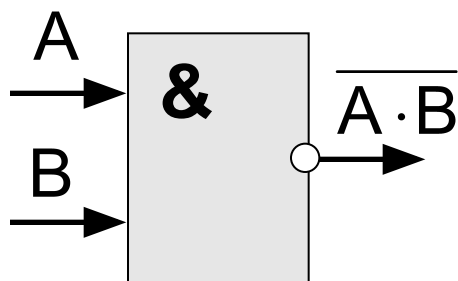
НЕ



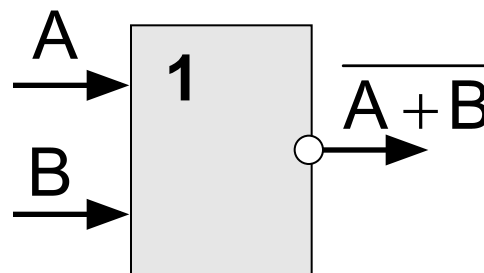
И



ИЛИ



И-НЕ

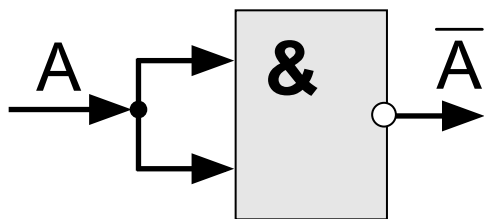


ИЛИ-НЕ

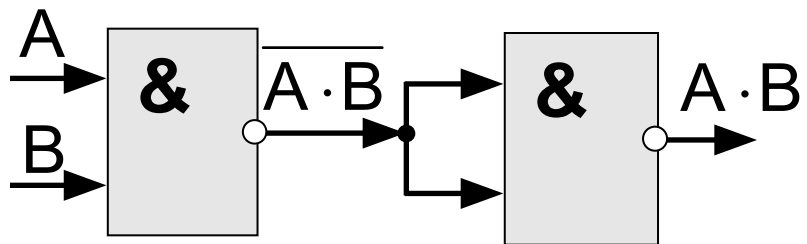
Логические элементы компьютера

Любое логическое выражение можно реализовать на элементах **И-НЕ** или **ИЛИ-НЕ**.

НЕ: $\bar{A} = \bar{A} + \bar{A} = \overline{A \cdot A}$

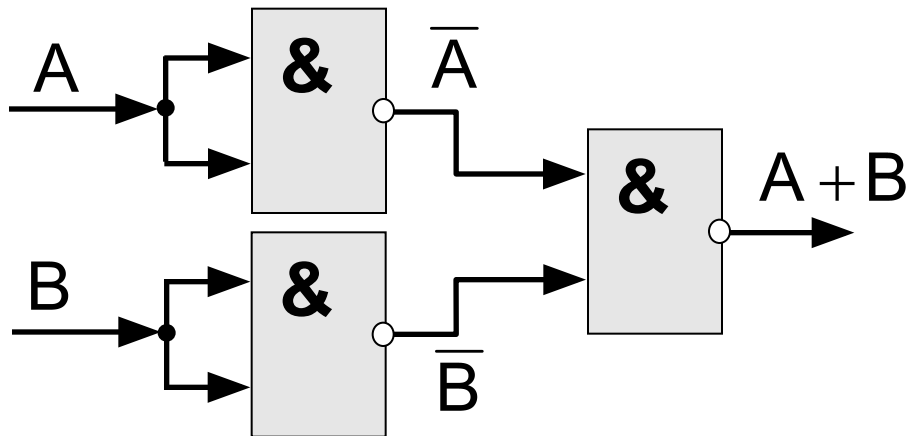


И: $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$



ИЛИ:

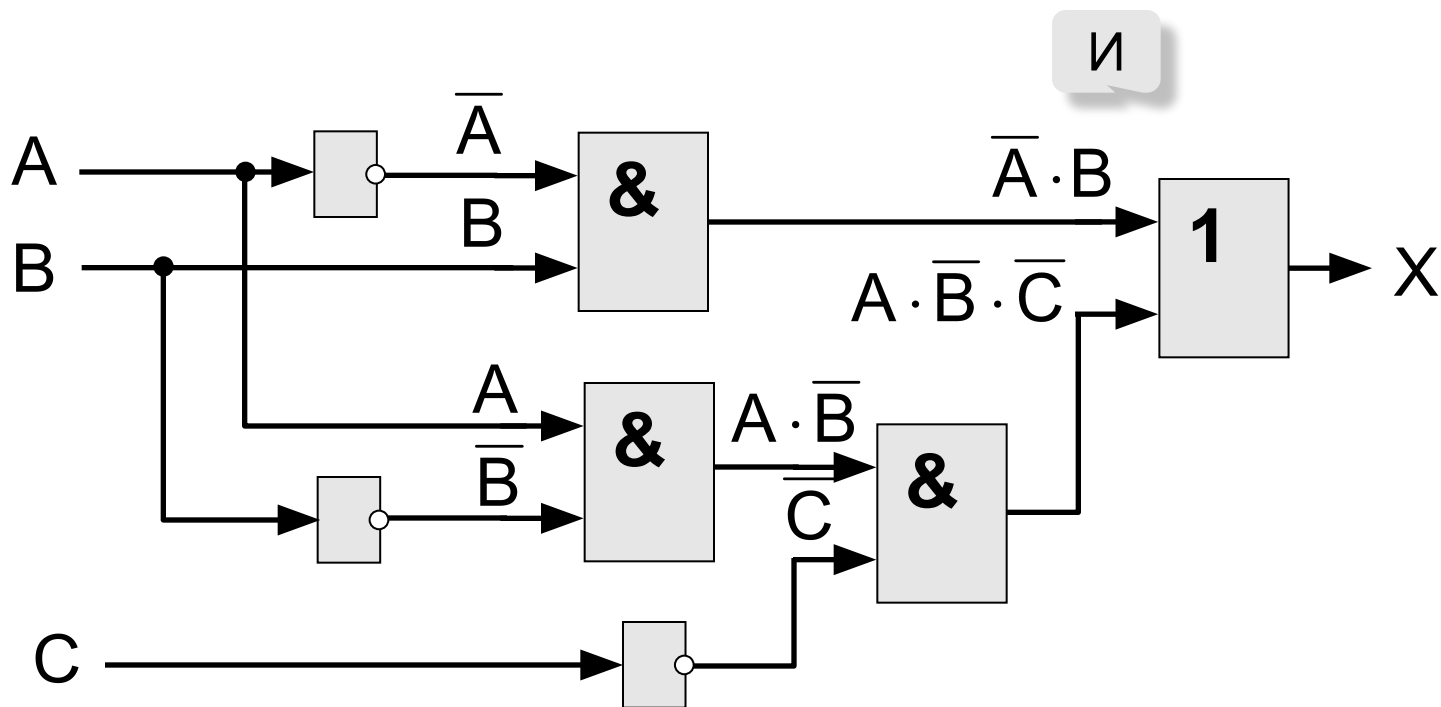
$A + B = \overline{\overline{A \cdot B}}$



Составление схем

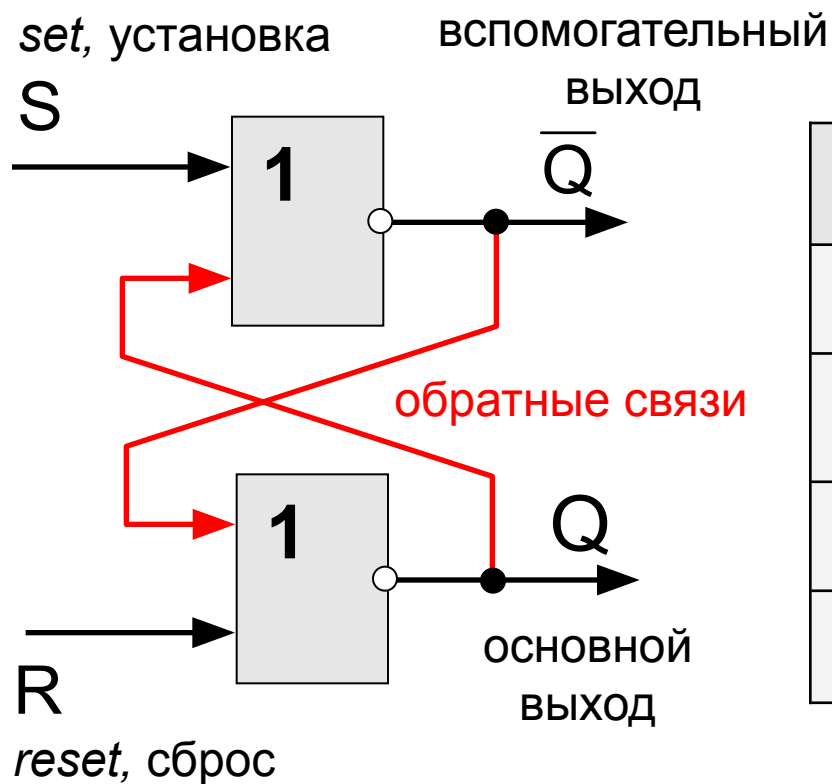
последняя операция - ИЛИ

$$X = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$



Триггер (англ. *trigger* – защёлка)

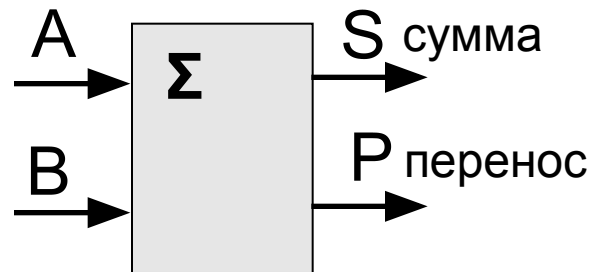
Триггер – это логическая схема, способная хранить 1 бит информации (1 или 0). Строится на 2-х элементах **ИЛИ-НЕ** или на 2-х элементах **И-НЕ**.



S	R	Q	\bar{Q}	режим
0	0	Q	\bar{Q}	хранение
0	1	0	1	сброс
1	0	1	0	установка 1
1	1	0	0	запрещен

Полусумматор

Полусумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа.



$$P = A \cdot B$$

$$S = A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

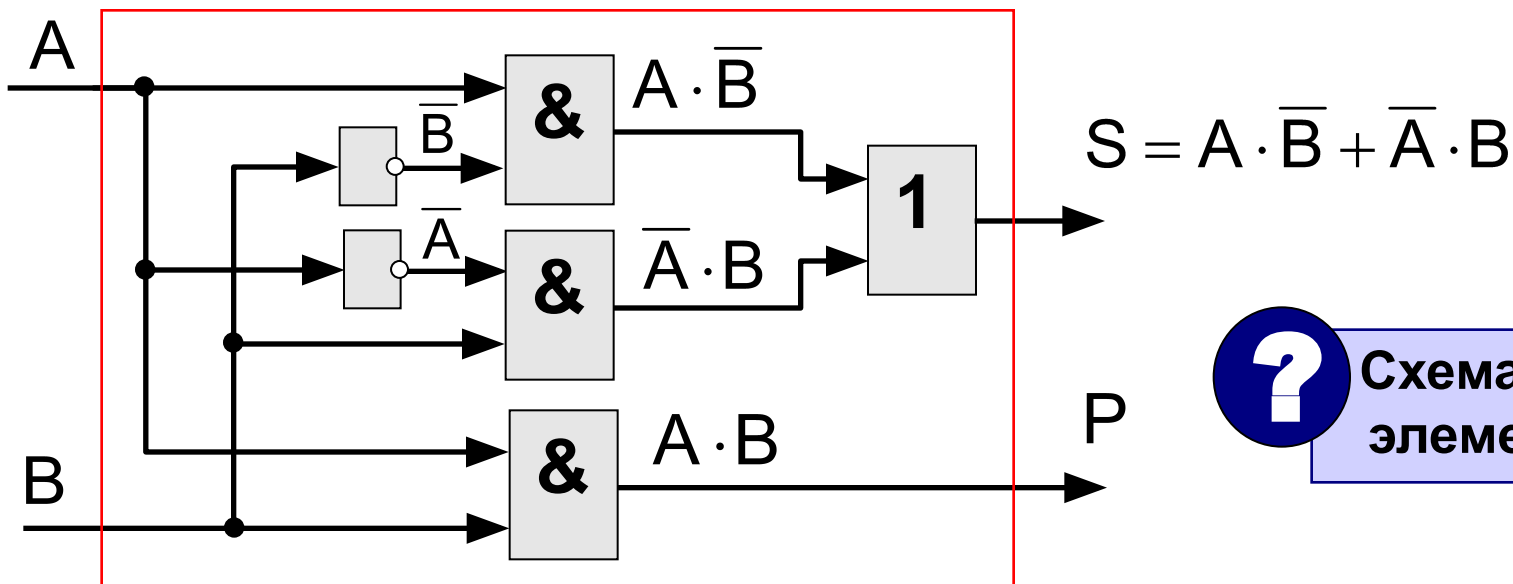
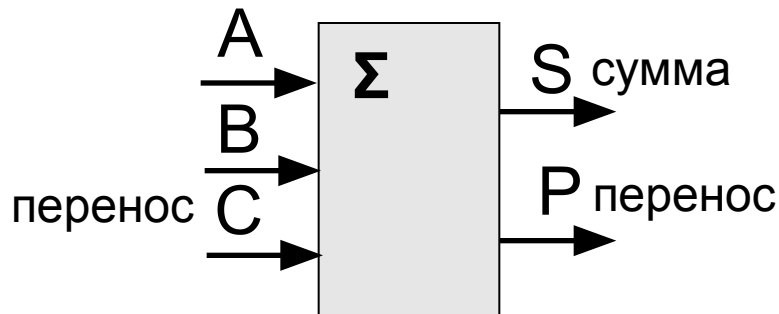


Схема на 4-х элементах?

Сумматор

Сумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа с переносом из предыдущего разряда.

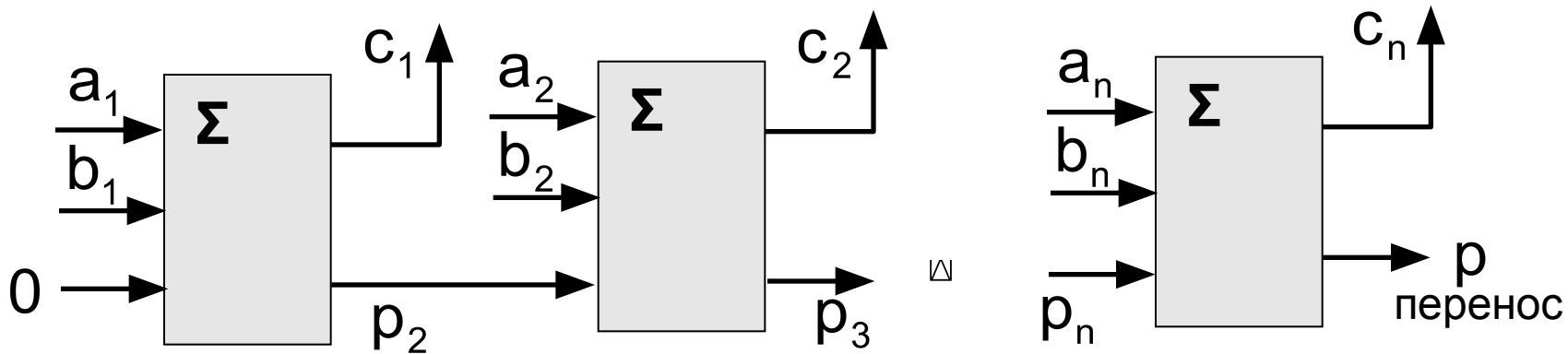


A	B	C	P	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Многоразрядный сумматор

это логическая схема, способная складывать два n -разрядных двоичных числа.

$$\begin{array}{r}
 A = \quad a_n \quad a_{n-1} \quad \boxtimes \quad a_1 \\
 + \quad B = \quad b_n \quad b_{n-1} \quad \boxtimes \quad b_1 \\
 \hline
 C = \quad \boxed{p} \quad c_n \quad c_{n-1} \quad \boxtimes \quad c_1 \\
 \text{перенос}
 \end{array}$$



Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

Тема 6. Логические задачи

Метод рассуждений

Задача 1. Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты договора, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: "Чей именно проект был принят?", министры дали такие ответы:

Россия — "Проект не наш (1), проект не США (2)";

США — "Проект не России (1), проект Китая (2)";

Китай — "Проект не наш (1), проект России (2)".

Один из них оба раза говорил правду; второй – оба раза говорил неправду, третий один раз сказал правду, а другой раз — неправду. Кто что сказал?

проект США (?)

	(1)	(2)
Россия	+	-
США	+	-
Китай		

проект Китая (?)

	(1)	(2)
Россия	+	+
США	+	+
Китай		

проект России (?)

	(1)	(2)
Россия	-	+
США	-	-
Китай	+	+

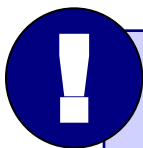
Табличный метод

Задача 2. Дочерей Василия Лоханкина зовут Даша, Анфиса и Лариса. У них разные профессии и они живут в разных городах: одна в Ростове, вторая – в Париже и третья – в Москве. Известно, что

- Даша живет не в Париже, а Лариса – не в Ростове,
- парижанка – не актриса,
- в Ростове живет певица,
- Лариса – не балерина.

- Много вариантов.
- Есть точные данные.

Париж	Ростов	Москва		Певица	Балерина	Актриса
0	1	0	Даша	1	0	0
1	0	0	Анфиса	0	1	0
0	0	1	Лариса	0	0	1



В каждой строке и в каждом столбце может быть только одна единица!

Задача Эйнштейна

Условие: Есть 5 домов разного цвета, стоящие в ряд. В каждом доме живет по одному человеку отличной от другого национальности. Каждый жилец пьет только один определенный напиток, курит определенную марку сигарет и держит животное. Никто из пяти человек не пьет одинаковые напитки, не курит одинаковые сигареты и не держит одинаковых животных.

Известно, что:

1. Англичанин живет в красном доме.
2. Швед держит собаку.
3. Датчанин пьет чай.
4. Зеленой дом стоит слева от белого.
5. Жилец зеленого дома пьет кофе.
6. Человек, который курит *Pallmall*, держит птицу.
7. Жилец среднего дома пьет молоко.
8. Жилец из желтого дома курит *Dunhill*.
9. Норвежец живет в первом доме.
10. Курильщик *Marlboro* живет около того, кто держит кошку.
11. Человек, который содержит лошадь, живет около того, кто курит *Dunhill*.
12. Курильщик *Winfield* пьет пиво.
13. Норвежец живет около голубого дома.
14. Немец курит *Rothmans*.
15. Курильщик *Marlboro* живет по соседству с человеком, который пьет воду.

Вопрос: У кого живет рыба?

Использование алгебры логики

Задача 3. Следующие два высказывания истинны:

1. Неверно, что если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет.
2. В море вышел корабль **B** или корабль **C**, но не оба вместе.

Определить, какие корабли вышли в море.

Решение:

... если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет. $A \rightarrow \bar{C} = 1$

1. Неверно, что если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет.

$$A \rightarrow \bar{C} = 0$$

$$\overline{A \rightarrow \bar{C}} = 1$$

2. В море вышел корабль **B** или корабль **C**, но не оба вместе.

$$B \oplus C = 1$$

$$\left(\overline{A \rightarrow \bar{C}} \right) \cdot (B \oplus C) = 1$$

$$\left(\overline{A + C} \right) \cdot (B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C) = 1$$

$$A \cdot C \cdot (B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C) = 1$$

$$A \cdot C \cdot \bar{B} = 1$$

$$A = 1, B = 0, C = 1$$

Использование алгебры логики

Задача 4. Когда сломался компьютер, его хозяин сказал «Память не могла выйти из строя». Его сын предположил, что сгорел процессор, а винчестер исправен. Мастер по ремонту сказал, что с процессором все в порядке, а память неисправна. В результате оказалось, что двое из них сказали все верно, а третий – все неверно. Что же сломалось?

Решение:

A – неисправен процессор, **B** – память, **C** – винчестер

хозяин: $B = 0, \bar{B} = 1$ сын: $A \cdot \bar{C} = 1$ мастер: $\bar{A} \cdot B = 1$

Если ошибся хозяин: $X_1 = \bar{B} \cdot A \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} \cdot B = 1$

Если ошибся сын: $X_2 = \bar{B} \cdot A \cdot \bar{C} \cdot A \cdot B = 1$

Если ошибся мастер: $X_3 = \bar{B} \cdot A \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} \cdot B = 1$

$$X_3 = \bar{B} \cdot A \cdot \bar{C} \cdot (A + \bar{B}) = 1$$

$$X_3 = \bar{B} \cdot A \cdot \bar{C} = 1$$

В общем случае:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$A = 1$$

$$B = 0$$

$$C = 0$$



Несколько решений!

