Исследование функции на монотонность

Урок 10.04.2020

10 класс

1. Производная широко используется для исследования функций, т. е. для изучения различных свойств функций. Например, с помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции, её наибольшие и наименьшие значения.

Рассмотрим *применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.* Пусть значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке, т. е. $f'(x) > 0$. Тогда угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что касательная образует острый угол с осью Ox, и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т. е. функция $f(x)$ возрастает (рис. 120).

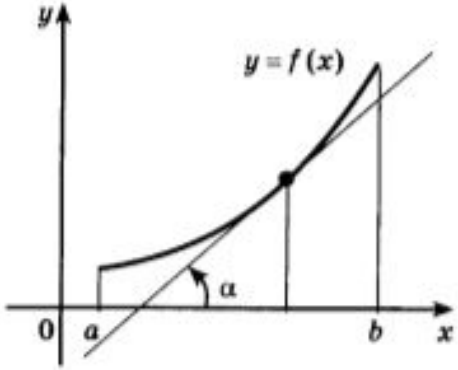


Рис. 120

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ к графику функции $y = f(x)$ отрицателен.

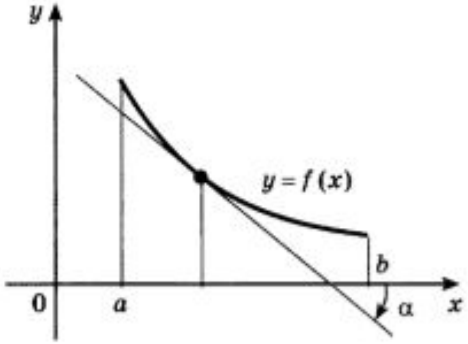


Рис. 121

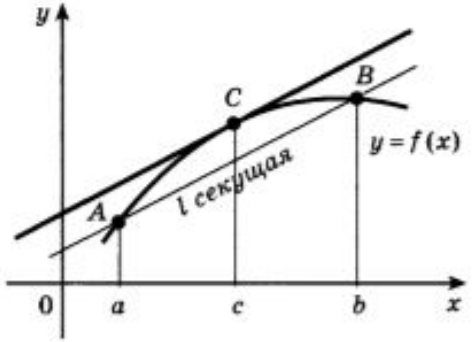


Рис. 122

Это означает, что касательная образует тупой угол с осью Ox, и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т. е. функция $f(x)$ убывает (рис. 121).

Итак, если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *возрастает* на этом промежутке.
Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке.

<u>Теорема о достаточном условии возрастания функции</u>

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция возрастает на интервале $(a; b)$.

Возрастание и убывание функции на интервале – монотонность функции.

Задача 2 Найти интервалы монотонности функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2.$$

▶ Найдём производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Решая неравенство $f'(x) > 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x > 0$, находим интервалы возрастания: $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$.

Решая неравенство $f'(x) < 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x < 0$, находим интервал убывания $(0; 2)$. ◁

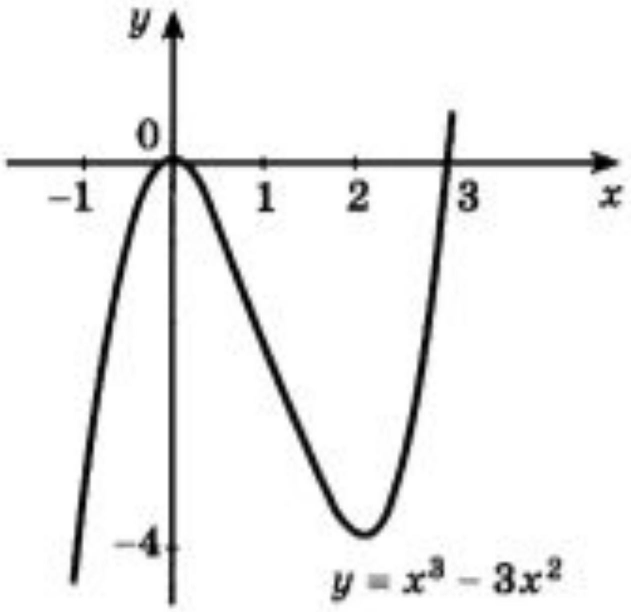


Рис. 123

График функции $y = x^3 - 3x^2$ изображён на рисунке 123. Из этого рисунка видно, что функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает не только на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, но и на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$; убывает не только на интервале $(0; 2)$, но и на отрезке $[0; 2]$.

Найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - x$;
2) $y = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $y = x^2 + 2x$;
4) $y = x^2 + 12x - 100$;
5) $y = x^3 - 3x$;
6) $y = x^4 - 2x^2$;
7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;
8) $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

Домашнее задание

Выучить определения монотонности функции сделать задания

Найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - x$;
2) $y = 5x^2 - 3x - 1$;
3) $y = x^2 + 2x$;
4) $y = x^2 + 12x - 100$;
5) $y = x^3 - 3x$;
6) $y = x^4 - 2x^2$;
7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;
8) $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

Экстремумы функции.

Урок 13.04.2020

10 класс

Определение:

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Определение:

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

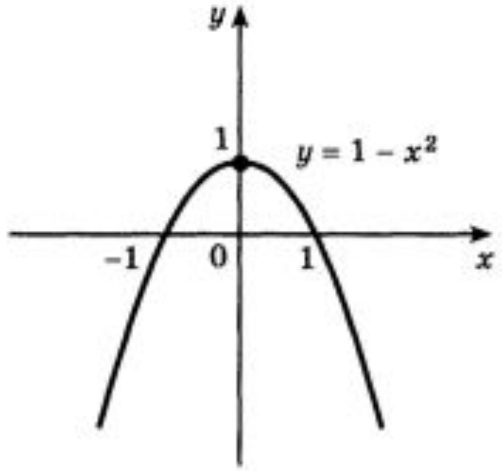


Рис. 124

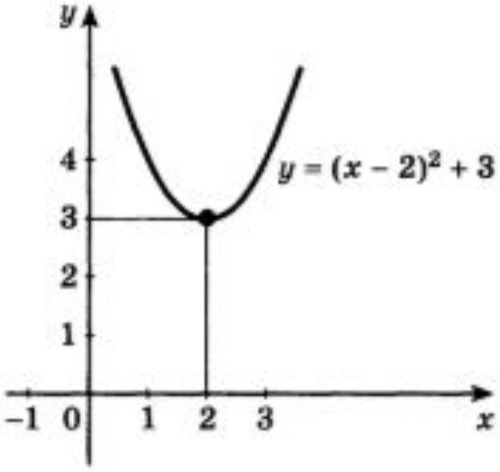


Рис. 125

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $f(x) = 1 - x^2$, так как $f(0) = 1$ и при всех значениях $x \neq 0$ верно неравенство $f(x) < 1$ (рис. 124).

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума.*

Теорема. Если x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Это утверждение называют *теоремой Ферма*[1]. Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, где x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, параллельна оси абсцисс, и поэтому её угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 126).

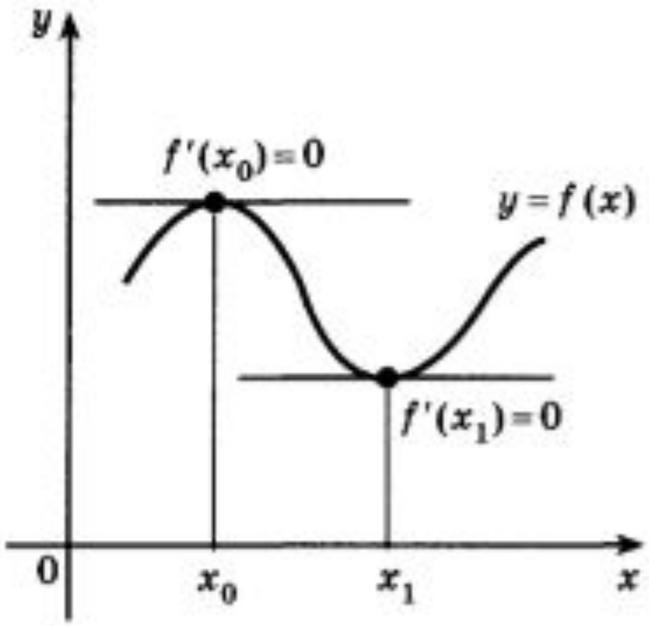


Рис. 126

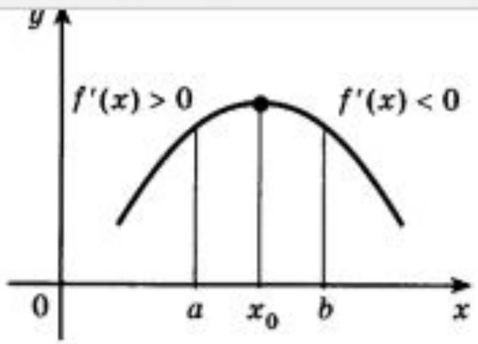


Рис. 128

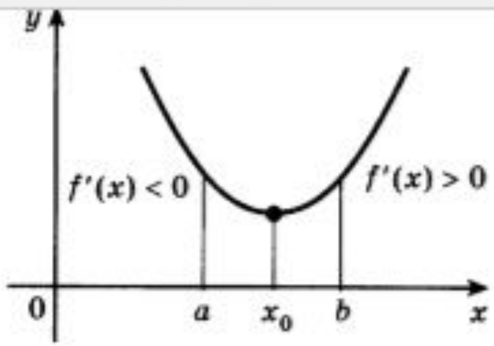


Рис. 129

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$, и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «плюса» на «минус», т. е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$ (рис. 128);

2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 — точка минимума функции $f(x)$ (рис. 129).

Задача 1 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

1. Находим производную
2. Приравниваем производную к нулю
3. На числовой прямой отмечаем эти точки в порядке возрастания
4. Выделяем интервалы
5. Находим знак (+ или -) на каждом интервале по функции производной
6. По определению находим точки экстремума

Задача 2 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x$ и значения функции в этих точках.

Домашнее задание № 914(1,3), 915(1,3)

914 Найти точки экстремума функции:

1) $y = 2x^2 - 20x + 1$; 2) $y = 3x^2 + 36x - 1$;

3) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$.

915 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = x^3 - 3x^2$; 2) $y = x^4 - 8x^2 + 3$;

3) $y = x + \sin x$; 4) $y = 2\cos x + x$.

Построение графиков функций с применением производной.

Урок 13.04.2020

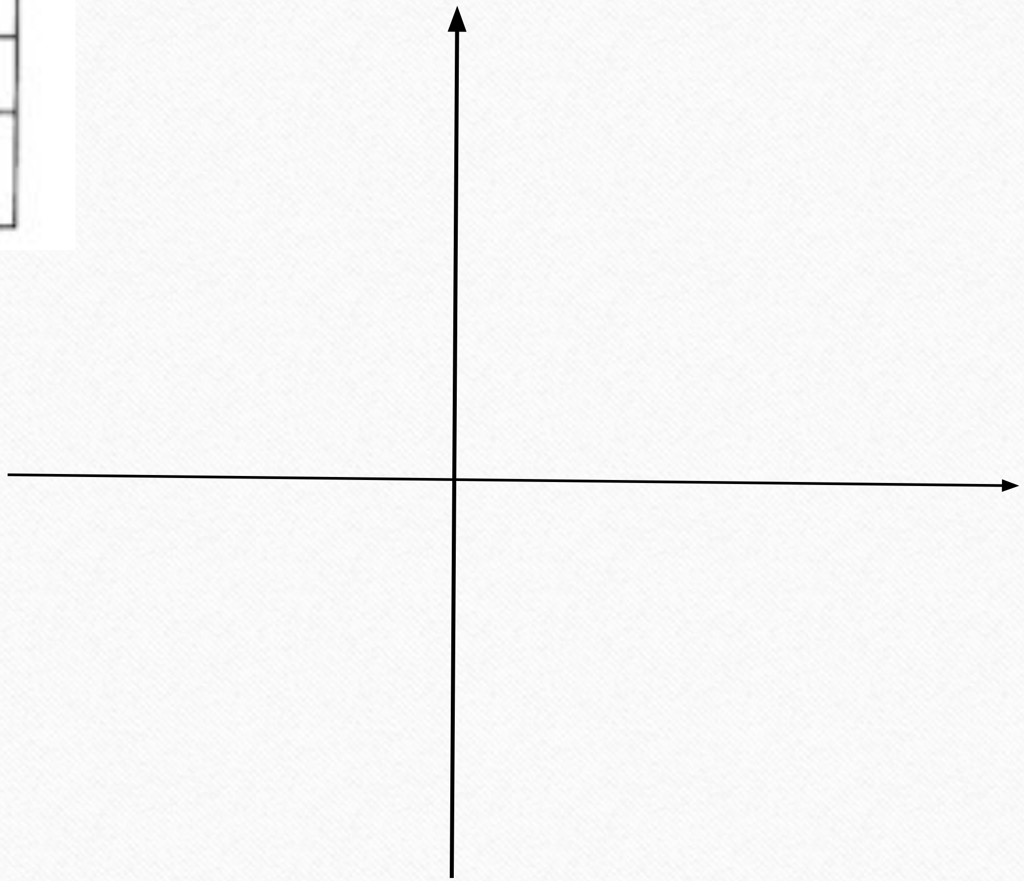
10 класс

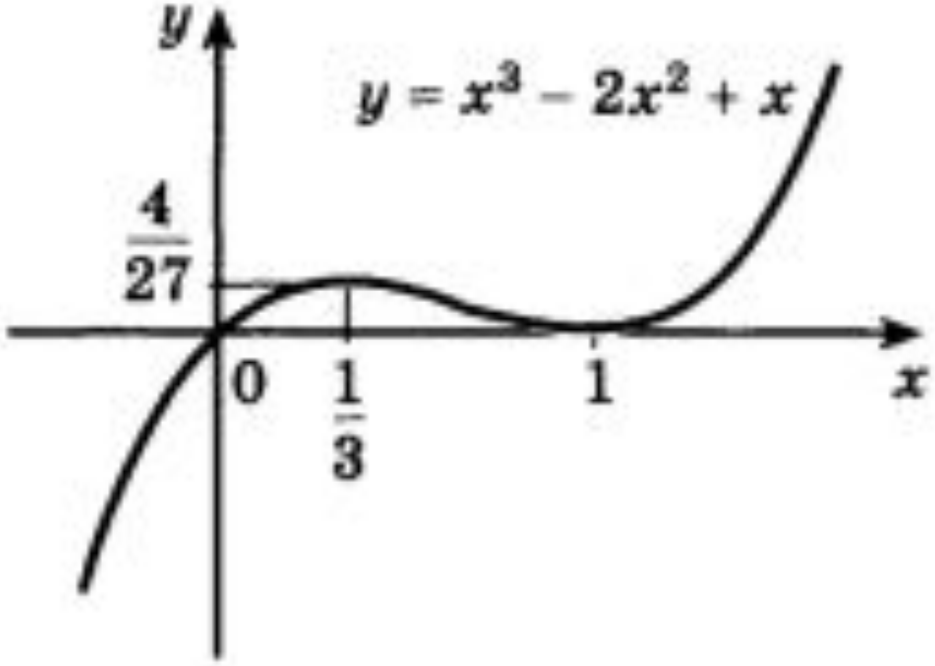
Задача 1 Построить график функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

▶ Эта функция определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$. С помощью производной найдём промежутки монотонности этой функции и её точки экстремума.

x	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

x	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$




y
$y = x^3 - 2x^2 + x$
$\frac{4}{27}$
0
$\frac{1}{3}$
1
x

При исследовании свойств функции полезно найти:

1) область её определения;
2) производную;
3) стационарные точки;
4) промежутки возрастания и убывания;
5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Результаты исследования удобно записать в виде таблицы. Затем, используя таблицу, строят график функции. Для более точного построения графика обычно находят точки его пересечения с осями координат и, быть может, ещё несколько точек графика.

Домашнее задание

Построить график функции $f(x) = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$.