1.10. Вывод формулы Резерфорда для вероятности обратного рассеяния альфа-частиц

В качестве упражнения, выведем формулу Резерфорда.

$$dN = Nnh\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

dN – число частиц, рассеянных в телесный угол $d\Omega$;

N – число падающих частиц;

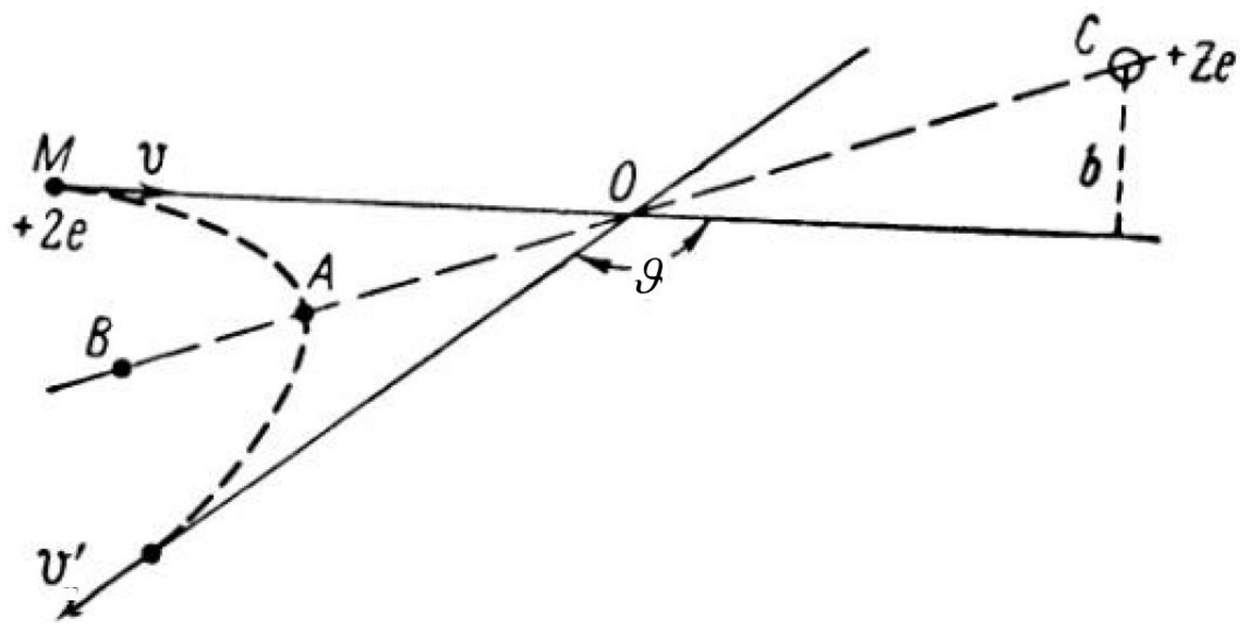
ϑ – угол рассеяния;

M и v – (приведенная) масса и скорость α-частицы;

Z и n – заряд и концентрация атомов в рассеивающей фольге;

h – ее толщина.

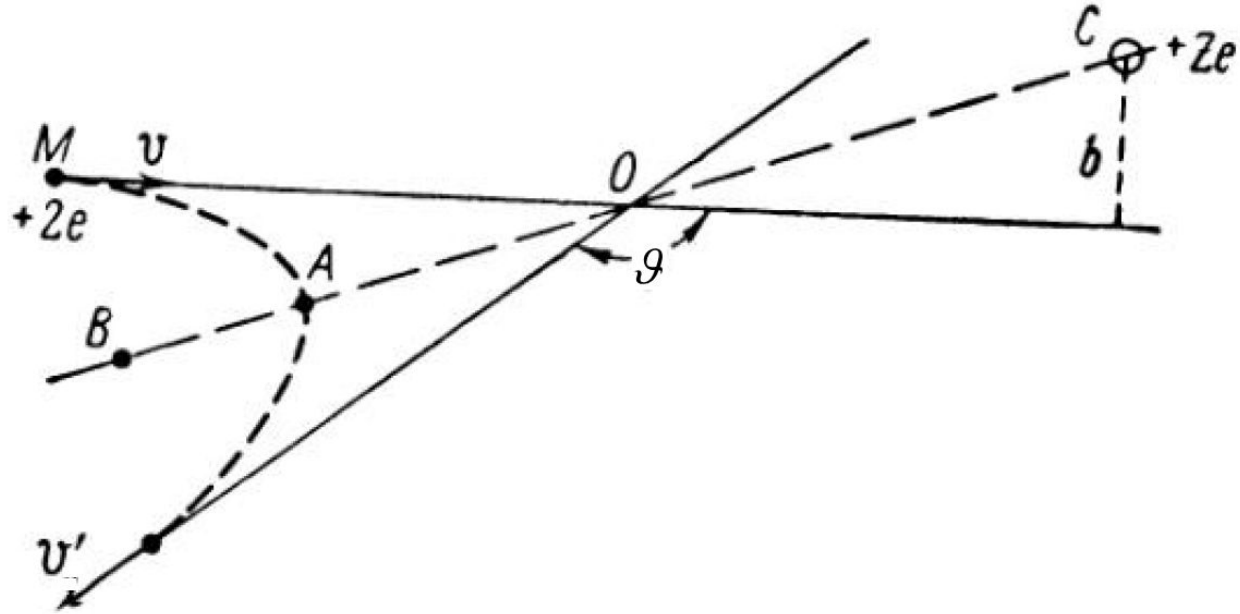
- Рассмотрим задачу двух тел, взаимодействующих посредством кулоновской силы, квадратично спадающей с расстоянием.
- Это – основное содержание гипотезы Резерфорда, подтвержденной по итогам сопоставления результатов последующих расчетов с полученными им экспериментальными данными.
- Математически постановка задачи сходна с задачей небесной механики, только знак взаимодействия противоположный.
- Решение для траектории – кривая второго порядка. Гипербола.



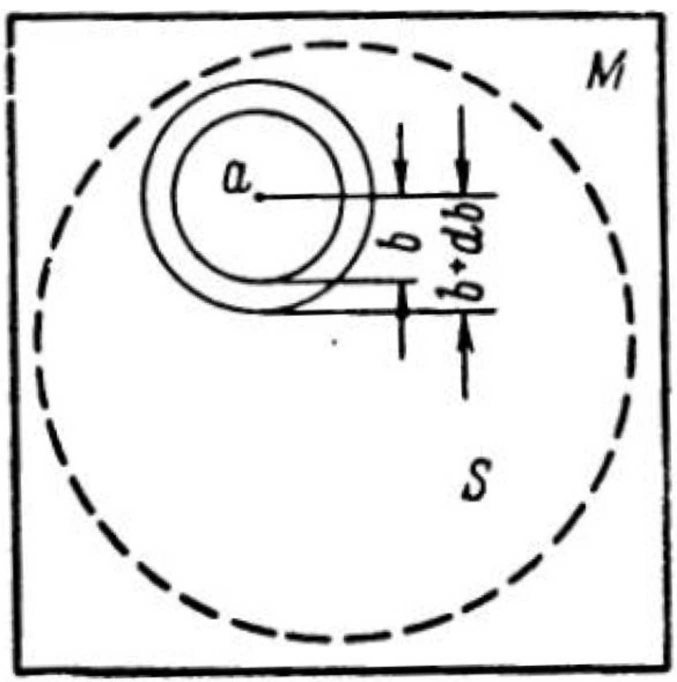
- Ее параметры определяются начальными условиями (скорость, заряды, приведенная масса, …), а также прицельным параметром «b» – расстоянием между рассеивающей частицей и прямолинейным продолжением невозмущенной траектории налетающей частицы.
- Будем использовать решение поставленной задачи в виде зависимости угла рассеяния ϑ (угол между асимптотами ветвей гиперболы) от прицельного параметра b:

$$tg\frac{\vartheta}{2} = \frac{2Ze^2}{Mv^2}\cdot\frac{1}{b}$$

- Большим значениям прицельного параметра соответствуют малые углы рассеяния.



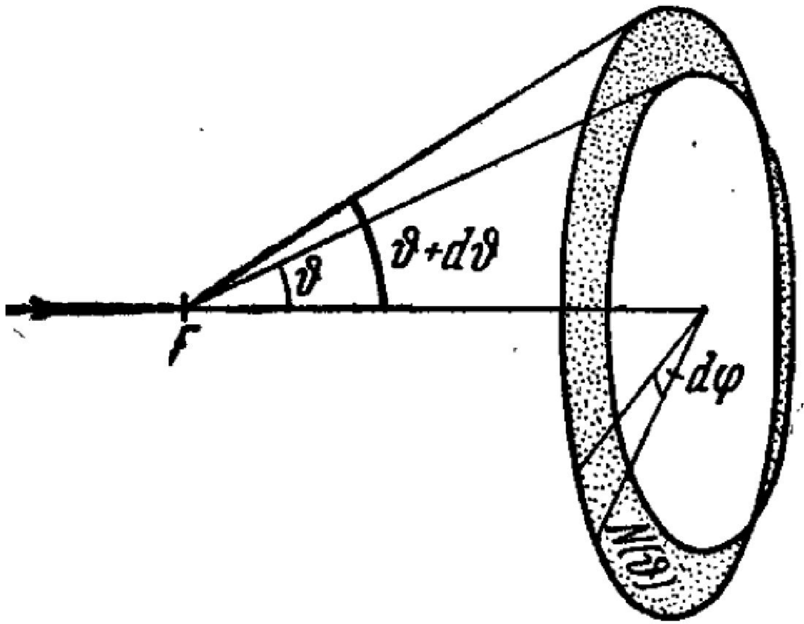
- Вычислим вероятность того, что прицельный параметр пробной α-частицы, случайно «запущенной» в пределах участка мишени площадью S, по отношению к одной конкретной рассеивающей частице будет принадлежать интервалу [b; $b+db$].
- Из рисунка, эта вероятность равна отношению площадей: $\dfrac{2\pi b \cdot db}{S}$
- Умножив полученное значение на число рассеивающих частиц в рассматриваемой части мишени, получим вероятность dw того, что прицельный параметр пробной частицы окажется в интервале $[b;\, b+db]$ по отношению к одной из частиц мишени.



$$dw = \frac{2\pi b \cdot db}{S} nhS = 2\pi nhb \cdot db$$

- В этом случае, угол рассеяния будет близок к ϑ, удовлетворяющему условию

$$tg\frac{\vartheta}{2} = \frac{2Ze^2}{Mv^2} \cdot \frac{1}{b}$$



- В этом случае, угол рассеяния будет близок к ϑ, удовлетворяющему условию:

$$tg\,\frac{\vartheta}{2} = \frac{2Ze^2}{Mv^2}\cdot\frac{1}{b}$$

- «Близок» – значит в пределах [ϑ;$\vartheta+d\vartheta$]
- В пространстве этому условию соответствует телесный угол $d\Omega$:

$$d\Omega = 2\pi\sin\vartheta\cdot d\vartheta$$

- Чтобы избавиться от неизмеримого в эксперимента прицельного параметра в ранее полученной формуле

$$dw = 2\pi nhb\cdot db$$

и перейти к измеримой вероятности рассеяния в от телесный угол, поделим два последних выражения друг на друга:

$$\frac{dw}{d\Omega} = nh\cdot\frac{b}{\sin\vartheta}\cdot\frac{db}{d\vartheta}$$

$$\frac{dw}{d\Omega} = nh \cdot \frac{b}{\sin\vartheta} \cdot \frac{db}{d\vartheta}$$

- Сюда можно подставить зависимость b от угла рассеяния

$$tg\frac{\vartheta}{2} = \frac{2Ze^2}{Mv^2} \cdot \frac{1}{b} \qquad □ \qquad b = \frac{2Ze^2}{Mv^2} \cdot \frac{1}{tg\frac{\vartheta}{2}}$$

Отсюда же вычислим и нужную нам производную (она отрицательна, но нам это неважно):

$$\left|\frac{db}{d\vartheta}\right| = \frac{2Ze^2}{Mv^2} \cdot \frac{1}{tg^2\frac{\vartheta}{2}} \cdot \frac{1}{2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}$$

- Подставив b и $db/d\vartheta$ в верхнюю формулу, получим для вероятности рассеяния в телесный угол:

$$\frac{dw}{d\Omega} = nh\left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{tg\frac{\vartheta}{2} \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{1}{2tg^2\frac{\vartheta}{2} \cdot \cos^2\frac{\vartheta}{2}}$$

для вероятности рассеяния в телесный угол:

$$\frac{dw}{d\Omega} = nh\left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{tg\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin\vartheta} \cdot \frac{1}{2tg^2\frac{\vartheta}{2}\cdot\cos^2\frac{\vartheta}{2}}$$

Использовав тригонометрическое тождество $\sin\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot\cos\frac{\vartheta}{2}$

получим $\frac{dw}{d\Omega} = nh\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$

- Вероятность dw связывает число падающих α-частиц N с числом dN частиц, рассеянных в телесный угол $d\Omega$ вблизи угла рассеяния ϑ :

$$dN = N\cdot dw$$

- Окончательно: $$dN = Nnh\cdot\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \cdot \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

- Это и есть формула Резерфорда.