

1.10. Вывод формулы Резерфорда для вероятности обратного рассеяния альфа-частиц

В качестве упражнения, выведем формулу Резерфорда.

$$dN = Nnh \left(\frac{Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

dN – число частиц, рассеянных в телесный угол $d\Omega$;

N – число падающих частиц;

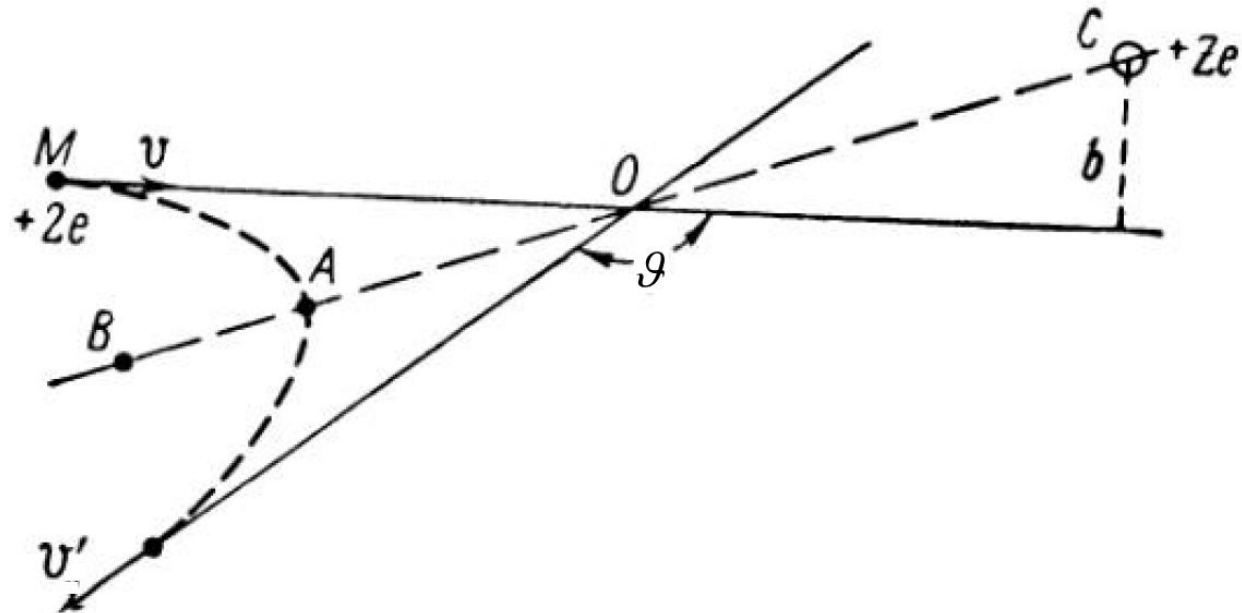
ϑ – угол рассеяния;

M и v – (приведенная) масса и скорость α -частицы;

Z и n – заряд и концентрация атомов в рассеивающей фольге;

h – ее толщина.

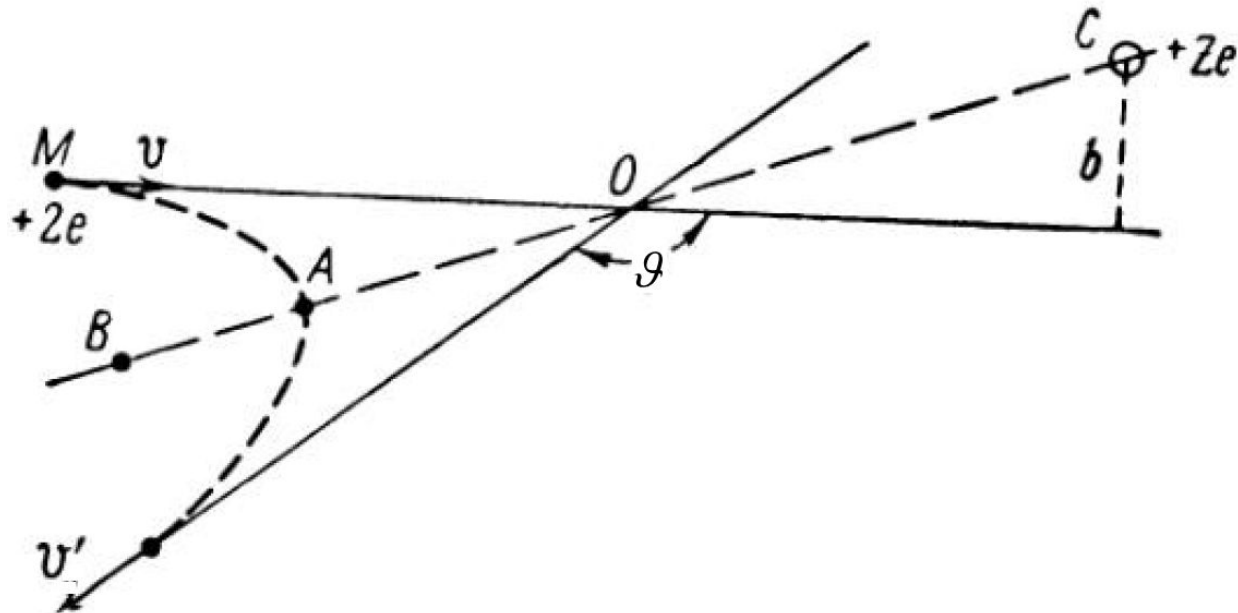
- Рассмотрим задачу двух тел, взаимодействующих посредством кулоновской силы, квадратично спадающей с расстоянием.
- Это – основное содержание гипотезы Резерфорда, подтвержденной по итогам сопоставления результатов последующих расчетов с полученными им экспериментальными данными.
- Математически постановка задачи сходна с задачей небесной механики, только знак взаимодействия противоположный.
- Решение для траектории – кривая второго порядка. Гипербола.



- Ее параметры определяются начальными условиями (скорость, заряды, приведенная масса, ...), а также прицельным параметром « b » – расстоянием между рассеивающей частицей и прямолинейным продолжением невозмущенной траектории налетающей частицы.
- Будем использовать решение поставленной задачи в виде зависимости угла рассеяния ϑ (угол между асимптотами ветвей гиперболы) от прицельного параметра b :

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{2Ze^2}{Mv^2} \cdot \frac{1}{b}$$

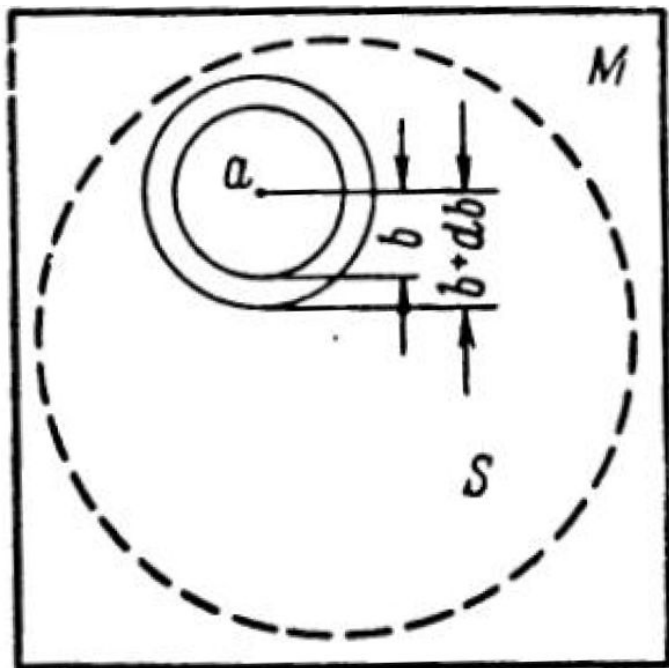
- Большим значениям прицельного параметра соответствуют малые углы рассеяния.



- Вычислим вероятность того, что прицельный параметр пробной α -частицы, случайно «запущенной» в пределах участка мишени площадью S , по отношению к одной конкретной рассеивающей частице будет принадлежать интервалу $[b; b+db]$.

- Из рисунка, эта вероятность равна отношению площадей: $\frac{2\pi b \cdot db}{S}$

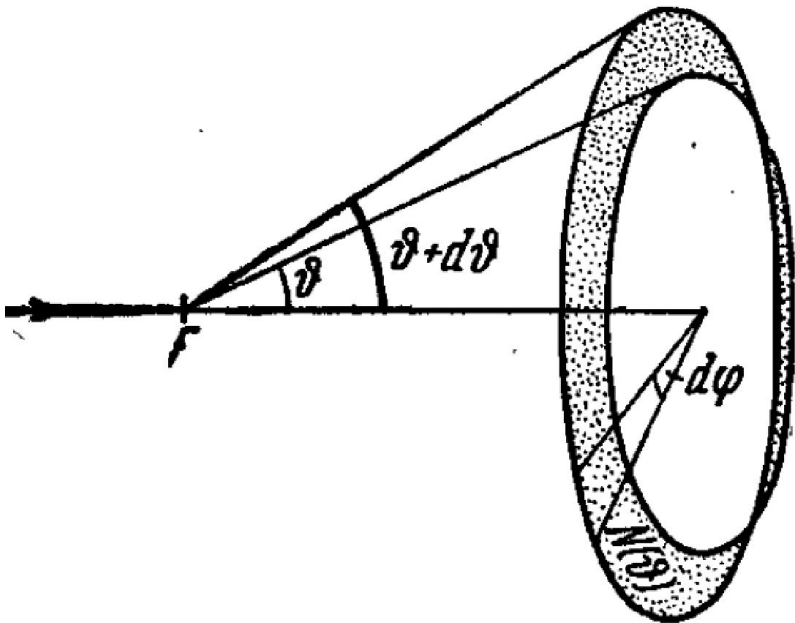
- Умножив полученное значение на число рассеивающих частиц в рассматриваемой части мишени, получим вероятность $d\omega$ того, что прицельный параметр пробной частицы окажется в интервале $[b; b+db]$ по отношению к одной из частиц мишени.



$$d\omega = \frac{2\pi b \cdot db}{S} nhS = 2\pi nhb \cdot db$$

- В этом случае, угол рассеяния будет близок к \mathcal{G} , удовлетворяющему условию

$$\operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} = \frac{2Ze^2}{Mv^2} \cdot \frac{1}{b}$$



- В этом случае, угол рассеяния будет близок к ϑ , удовлетворяющему условию:

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{2Ze^2}{Mv^2} \cdot \frac{1}{b}$$

- «Близок» – значит в пределах $[\vartheta; \vartheta + d\vartheta]$
- В пространстве этому условию соответствует телесный угол $d\Omega$:

$$d\Omega = 2\pi \sin \vartheta \cdot d\vartheta$$

- Чтобы избавиться от неизмеримого в эксперимента прицельного параметра в ранее полученной формуле

$$dw = 2\pi n h b \cdot db$$

и перейти к измеримой вероятности рассеяния в от телесный угол, поделим два последних выражения друг на друга:

$$\frac{dw}{d\Omega} = nh \cdot \frac{b}{\sin \vartheta} \cdot \frac{db}{d\vartheta}$$

$$\frac{dw}{d\Omega} = nh \cdot \frac{b}{\sin \vartheta} \cdot \frac{db}{d\vartheta}$$

- Сюда можно подставить зависимость b от угла рассеяния

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{2Ze^2}{Mv^2} \cdot \frac{1}{b} \quad \square \quad b = \frac{2Ze^2}{Mv^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}$$

Отсюда же вычислим и нужную нам производную (она отрицательна, но нам это неважно):

$$\left| \frac{db}{d\vartheta} \right| = \frac{2Ze^2}{Mv^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

- Подставив b и $db/d\vartheta$ в верхнюю формулу, получим для вероятности рассеяния в телесный угол:

$$\frac{dw}{d\Omega} = nh \left(\frac{2Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

для вероятности рассеяния в телесный угол:

$$\frac{dw}{d\Omega} = nh \left(\frac{2Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

Используя тригонометрическое тождество

$$\sin \vartheta = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2}$$

получим

$$\frac{dw}{d\Omega} = nh \left(\frac{Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

- Вероятность dw связывает число падающих α -частиц N с числом dN частиц, рассеянных в телесный угол $d\Omega$ вблизи угла рассеяния ϑ :

$$dN = N \cdot dw$$

- Окончательно:

$$dN = Nnh \cdot \left(\frac{Ze^2}{Mv^2} \right)^2 \cdot \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

- Это и есть формула Резерфорда.