

**ФОРМУЛ  
Ы**

**ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ  
С2**

**КООРДИНАТНО - ВЕКТОРН  
ЫМ**

**СПОСОБО  
М**

**Г.  
Новороссийск  
МОУ СОШ №  
10  
учитель  
математики  
Волкова О.  
А.**

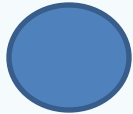
# СОДЕРЖАНИЕ



НУЖНЫЕ ФОРМУЛ  
Ы



УГЛЫ в ПРОСТРАНС  
ТВЕ



РАССТОЯНИЕ в ПРОСТРАН  
СТВЕ



ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛ

# НУЖНЫЕ ФОРМУЛЫ

ы

Векторное  
произведение 2  
векторов

Объем  
параллелепипеда,  
построенного  
на 3 векторах

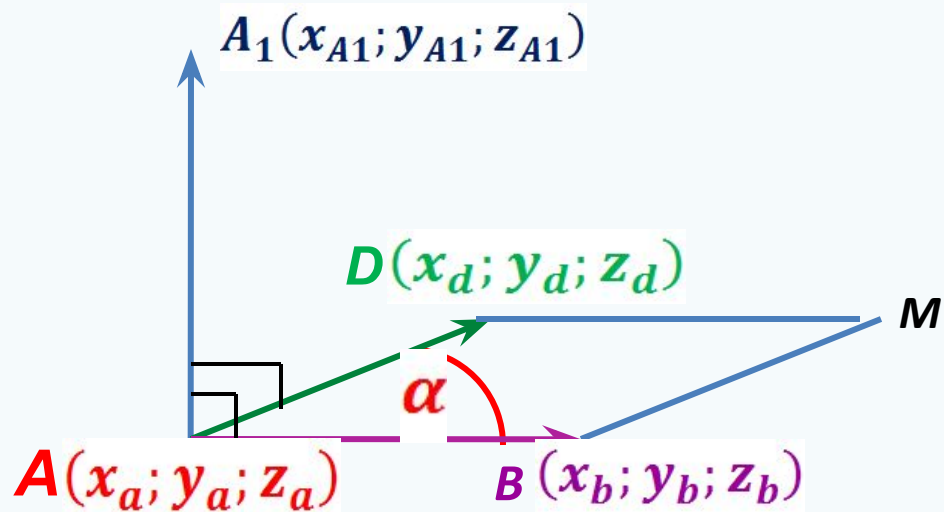
Уравнение  
плоскости,  
проходящей  
через 3 точки

Объем  
тетраэдра,  
построенного на  
3 векторах

Уравнение  
прямой,  
проходящей  
через 2 точки



# ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ



$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1}$$

$$1) \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AA_1} \quad \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AA_1}$$

$$2) |\overrightarrow{AA_1}| = S_{\text{пар-ма } ABMD}$$

$$|\overrightarrow{AA_1}| = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin \alpha$$

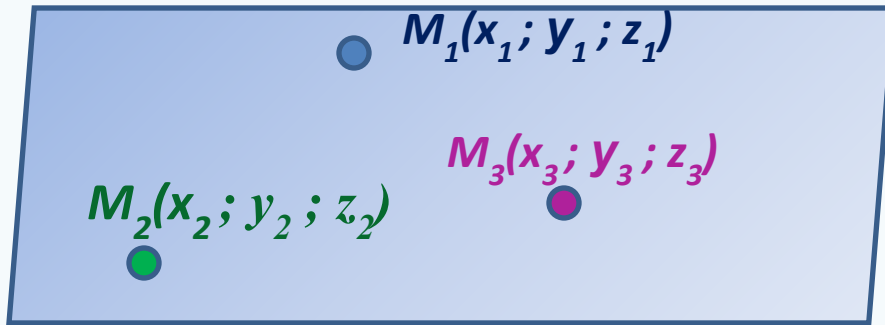
$$3) \overrightarrow{AB} \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}$$

$$\overrightarrow{AD} \{x_d - x_a; y_d - y_a; z_d - z_a\}$$

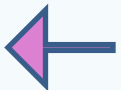
$$\overrightarrow{AA_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a & z_d - z_a \end{vmatrix}$$



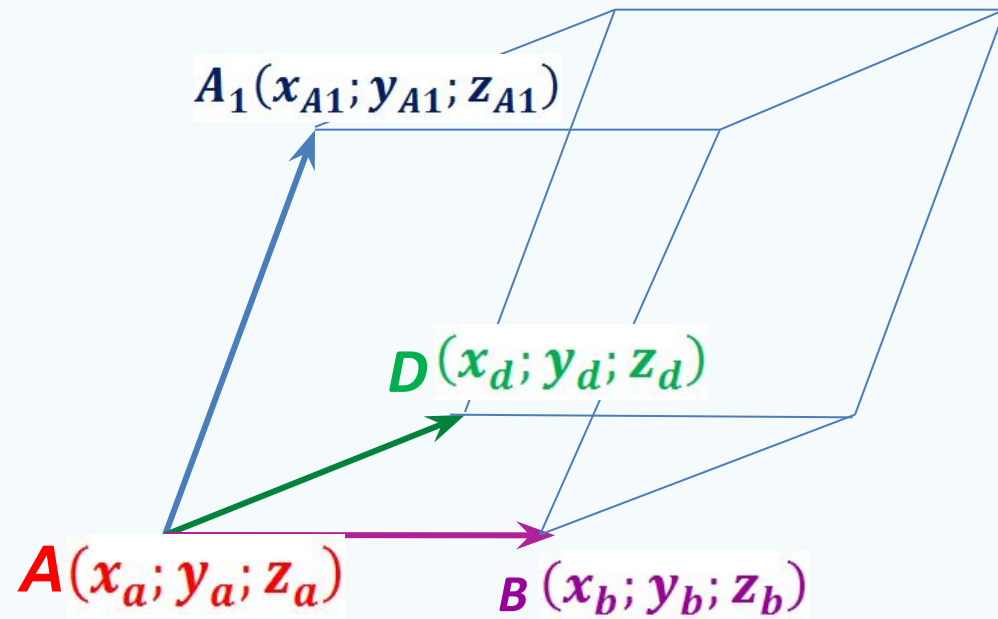
# УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ 3 ТОЧКИ



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



# Объем параллелепипеда, построенного на 3 векторах



$$\overrightarrow{AB} \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}$$

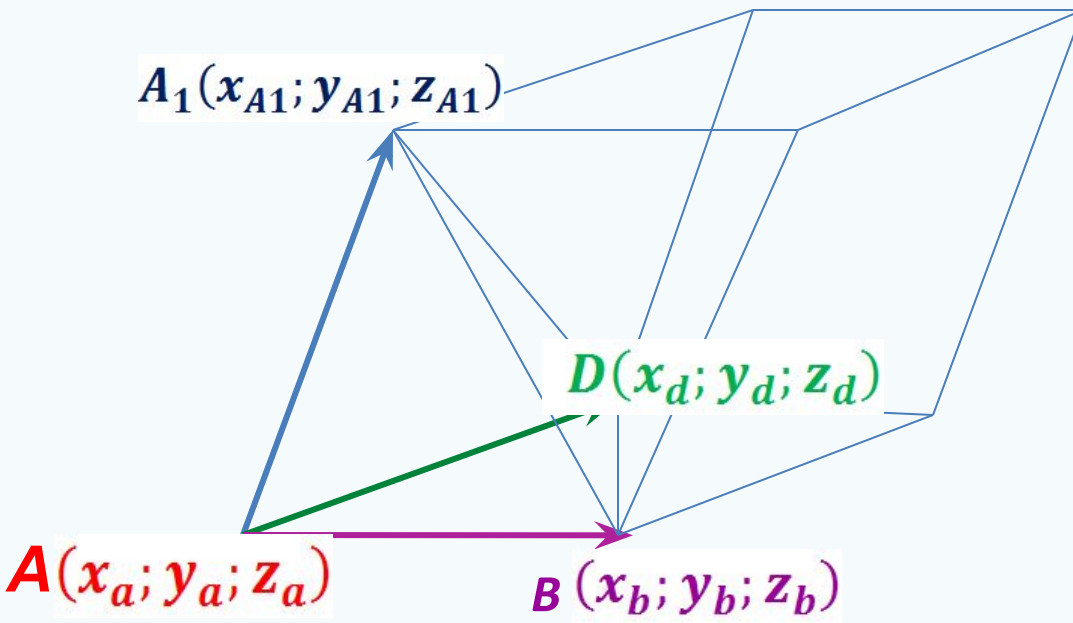
$$\overrightarrow{AA_1} \{x_{a1} - x_a; y_{a1} - y_a; z_{a1} - z_a\}$$

$$\overrightarrow{AD} \{x_d - x_a; y_d - y_a; z_d - z_a\}$$

$$V = \text{mod} \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_{a1} - x_a & y_{a1} - y_a & z_{a1} - z_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a & z_d - z_a \end{vmatrix}$$



# ОБЪЕМ ТЕТРАЭДРА, ПОСТРОЕННОГО на 3 векторах



$$\overrightarrow{AB} \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}$$

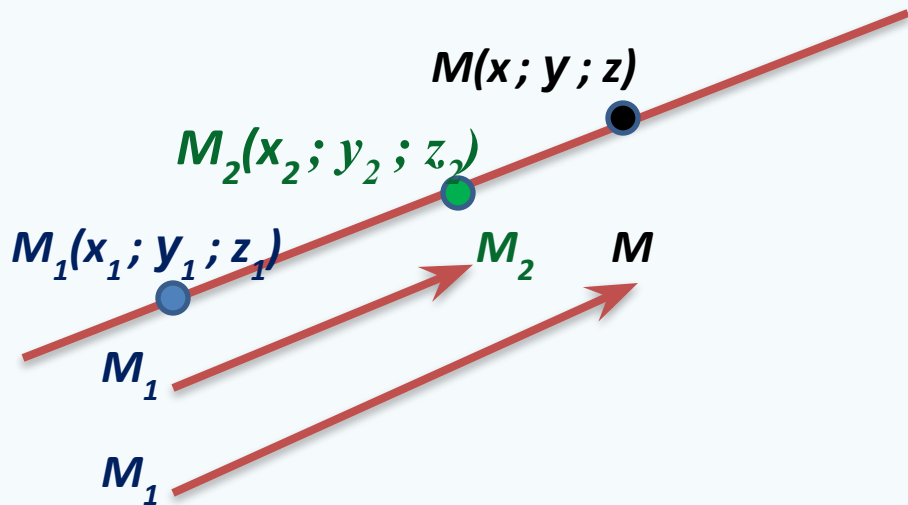
$$\overrightarrow{AA_1} \{x_{a1} - x_a; y_{a1} - y_a; z_{a1} - z_a\}$$

$$\overrightarrow{AD} \{x_d - x_a; y_d - y_a; z_d - z_a\}$$

$$V = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_{a1} - x_a & y_{a1} - y_a & z_{a1} - z_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a & z_d - z_a \end{vmatrix}$$



# УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ через 2 ТОЧКИ



$$\overrightarrow{M_1 M_2} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1 M} \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$





# УГЛ В ПР<sup>Ы</sup>ОСТРАНСТ В Е

Угол между  
плоскостями

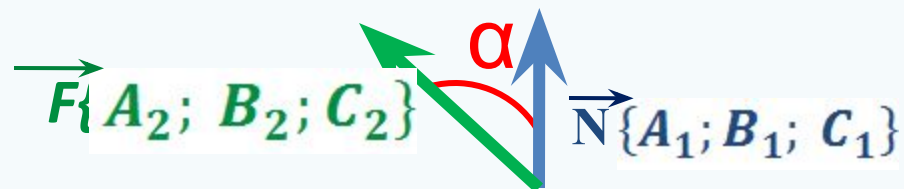
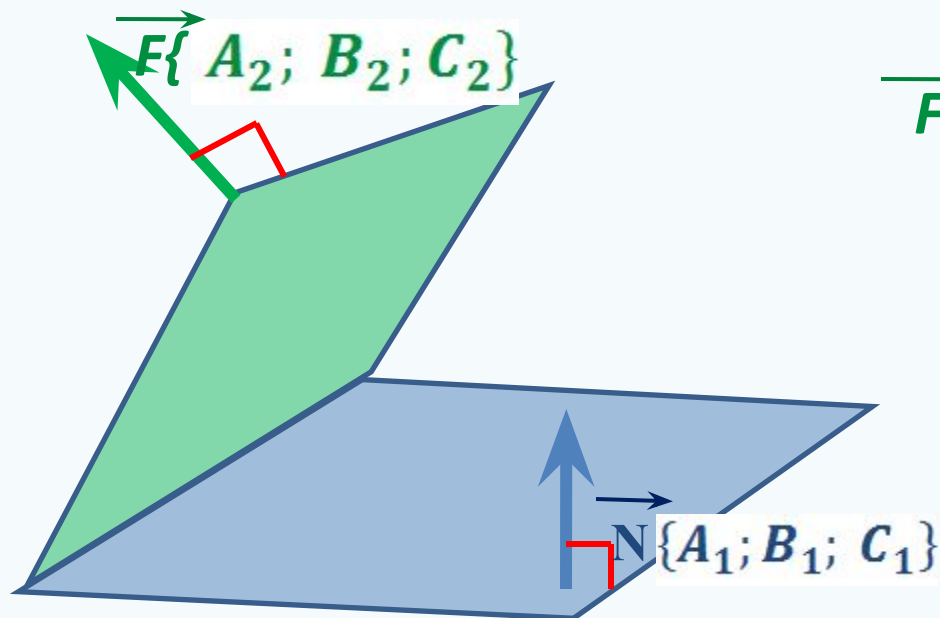
Угол между  
прямыми

Угол между  
прямой и  
плоскостью



УГОЛ МЕЖДУ  
ПЛОСКОСТЯМИ

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



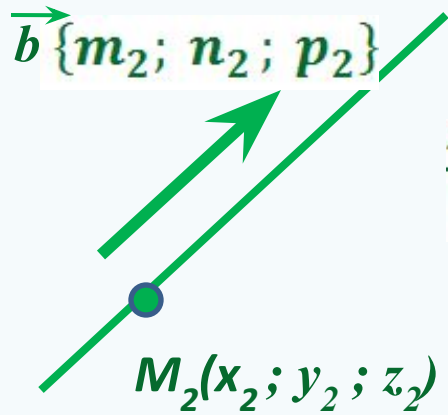
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\left(\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\right) \cdot \left(\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}\right)}$$

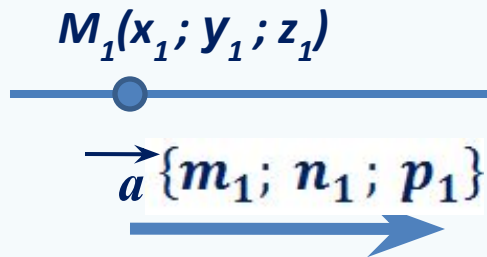
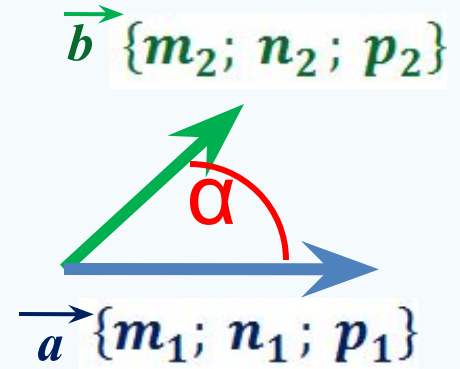


# УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

## И

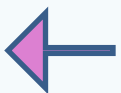


$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$



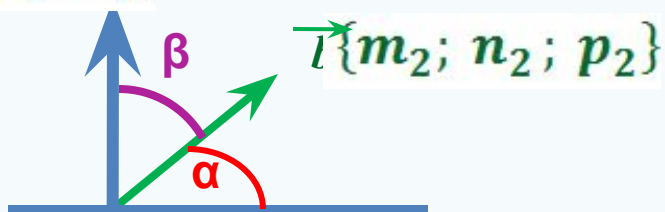
$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\left(\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\right) \cdot \left(\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}\right)}$$



# УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

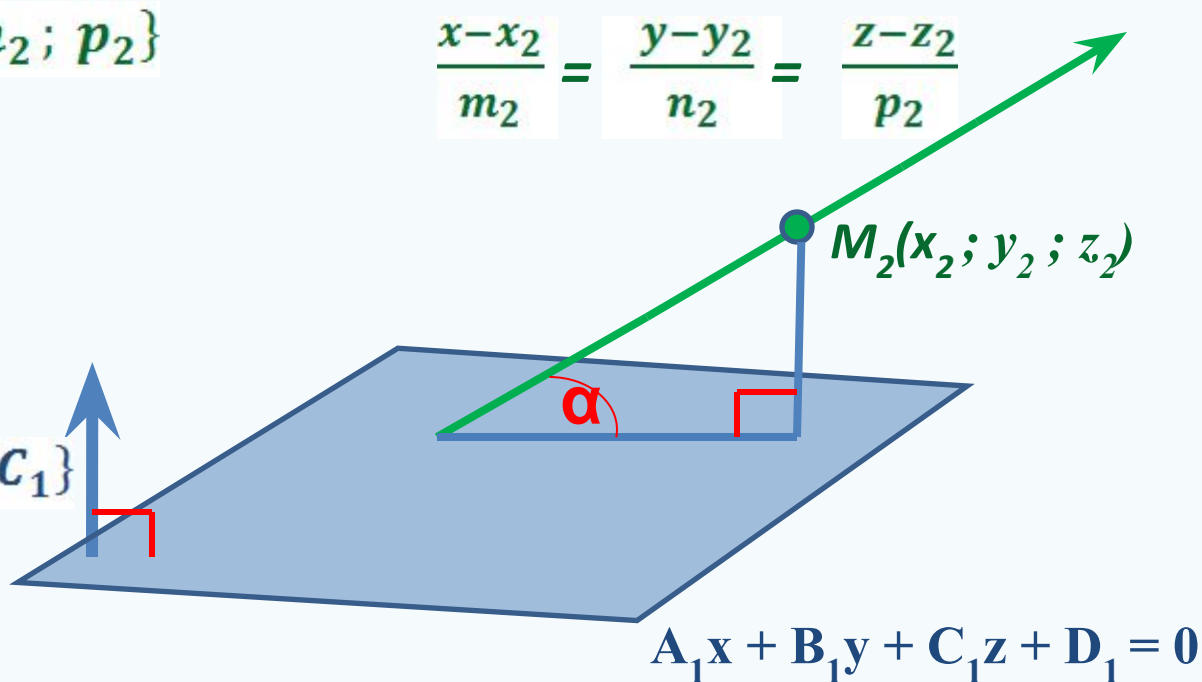
$$\vec{N}\{A_1; B_1; C_1\}$$



$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

$$\vec{b}\{m_2; n_2; p_2\}$$

$$\vec{N}\{A_1; B_1; C_1\}$$



$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$= \frac{|A_1 \cdot m_2 + B_1 \cdot n_2 + C_1 \cdot p_2|}{\left(\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\right) \cdot \left(\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}\right)}$$



# РАССТОЯНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Расстояние  
между 2  
точками

Расстояние от  
точки до прямой

Расстояние  
между  
скрещивающимися  
прямыми

Расстояние от  
точки до  
плоскости



# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

$M_2(x_2; y_2; z_2)$



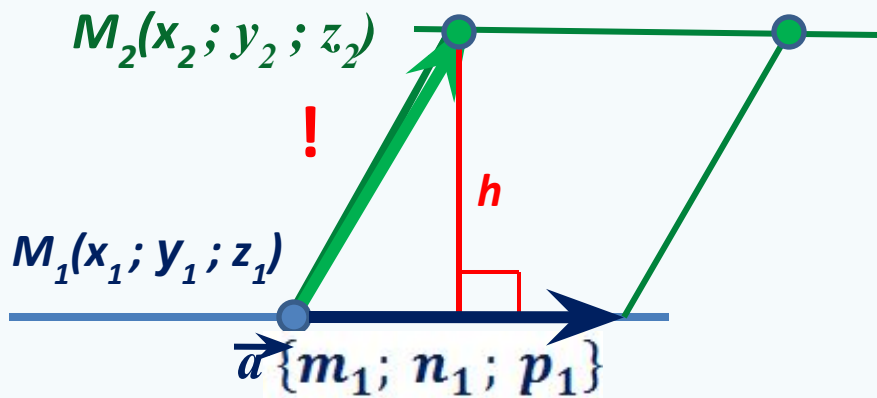
$M_1(x_1; y_1; z_1)$



$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$



# РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ



$$d = h = \frac{S_{\text{пар-ма}}}{|\vec{a}|}$$

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

$$1) \vec{M_1M_2} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$2) \vec{a} \times \vec{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}$$

$$3) S_{\text{пар-ма}} = |\vec{a} \times \vec{M_1M_2}|$$

$$4) |\vec{a}| = \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}$$

$$5) d = \frac{|\vec{a} \times \vec{M_1M_2}|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}$$

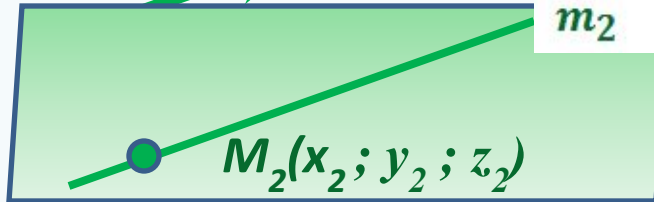


# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯ

МЫМИ

$$\vec{b} \{m_2; n_2; p_2\}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$



$$\vec{a} \{m_1; n_1; p_1\}$$

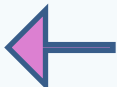


$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

$$1) \Delta_1 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

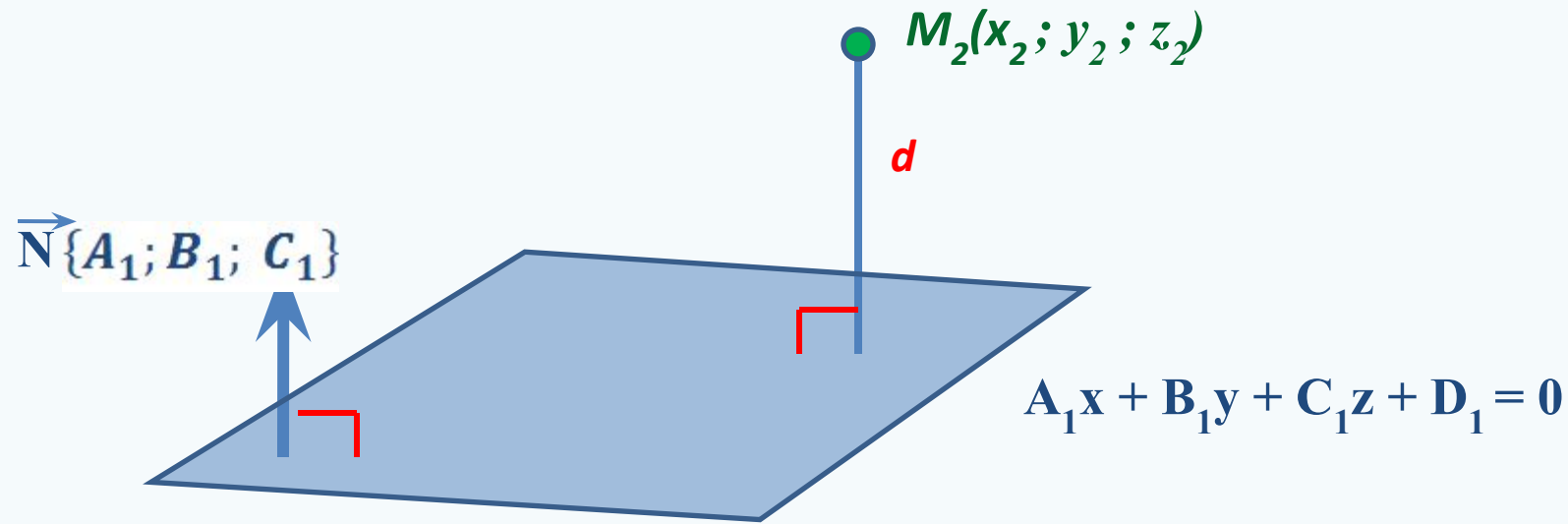
$$2) \Delta_2 = \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$3) d = \left| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right|$$





# РАССТОЯНИЕ от ТОЧКИ до ПЛОСКОСТИ



$$d = \frac{|A_1 \cdot x_2 + B_1 \cdot y_2 + C_1 \cdot z_2 + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

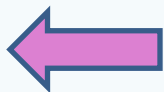


# ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛ

Л

РЕШЕНИЕ  
ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ  
ДВУМЯ СПОСОБАМИ

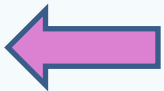


# 1. Найти векторное произведение векторов

$\vec{a} \{2; 3; 5\}$  и его модуль  
и  $\vec{b} \{1; 2; 1\}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \vec{i} + 2 \cdot 2 \vec{k} + 5 \cdot 1 \vec{j} - 1 \cdot 3 \vec{k} - 2 \cdot 5 \vec{i} - 1 \cdot 2 \vec{j} =$$
$$= -7 \vec{i} + 3 \vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-7)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{59} = S_{\text{пар-ма}}$$



**СОСТАВИТЬ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ  
ЧЕРЕЗ ТОЧКИ**

$$M_1(2;2;2)$$

$$M_2(4;0;3)$$

$$M_3(0;1;0)$$

$$1) \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 4-2 & 0-2 & 3-2 \\ 0-2 & 1-2 & 0-2 \end{vmatrix} = 0$$

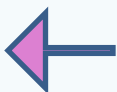
$$2) \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$3) 4(x-2) - 2(z-2) - 2(y-2) - 4(z-2) + 1(x-2) + 4(y-2) = 0$$

$$5x + 2y - 6z - 2 = 0$$

нормаль  $\vec{N}\{5; 2; -6\}$

ь



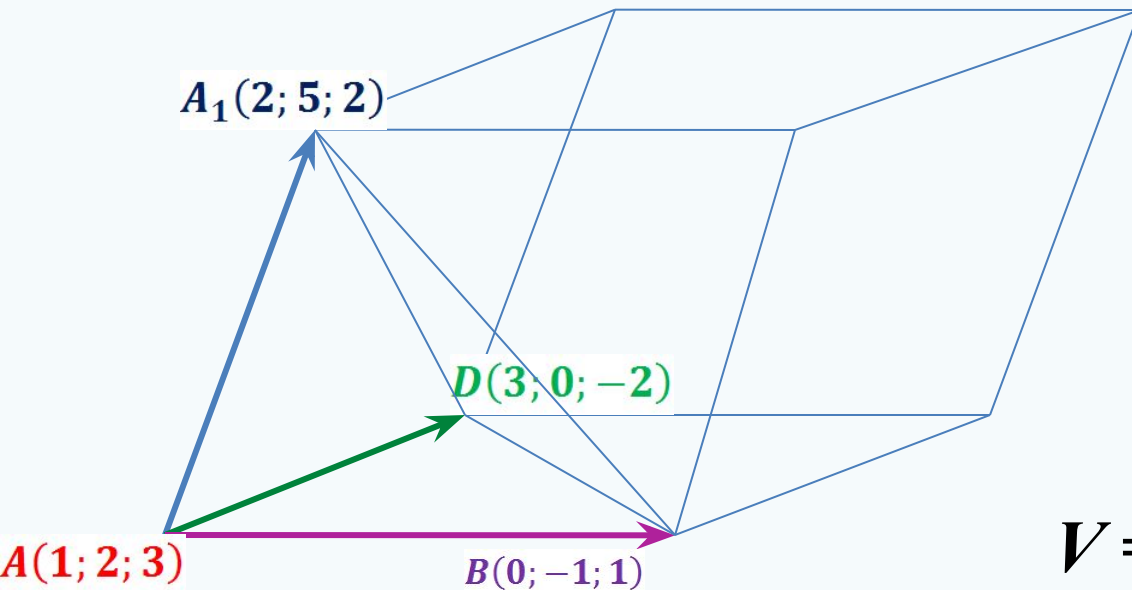
Найти объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , если

$$A(1; 2; 3)$$

$$B(0; -1; 1)$$

$$D(3; 0; -2)$$

$$A_1(2; 5; 2)$$



$$\overrightarrow{AB} \{-1; -3; -2\}$$

$$\overrightarrow{AA_1} \{1; 3; -1\}$$

$$\overrightarrow{AD} \{2; -2; -2\}$$

$$V = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 15 + 4 + 6 + 12 + 2 - 15 = 24$$

$$V_{ABDA_1} = \frac{1}{6} V = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$$



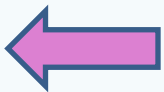
## УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ 2 ТОЧКИ

$A(1; 2; 3)$

$B(4; 5; 6)$

$$\frac{X - 1}{4 - 1} = \frac{Y - 2}{5 - 2} = \frac{Z - 3}{6 - 3}$$

$$\frac{X - 1}{3} = \frac{Y - 2}{3} = \frac{Z - 3}{3}$$



НАЙТИ УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТ  
ЯМИ

$$4x - 5y + 3z - 1 = 0$$

$$\vec{N}\{4; -5; 3\}$$

$$x - 4y - z + 9 = 0$$

$$\vec{F}\{1; -4; -1\}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 4 - 5 \cdot (-4) - 1 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = 0,7$$

$$\alpha = \arccos 0,7$$



НАЙТИ УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

$$\frac{X}{2} = \frac{Y-3}{9} = \frac{Z+1}{6}$$

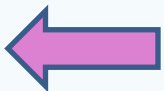
$$\vec{a} \{2; 9; 6\}$$

$$\frac{X-1}{3} = \frac{Y+2}{6} = \frac{Z-5}{2}$$

$$\vec{b} \{3; 6; 2\}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 3 + 9 \cdot 6 + 6 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 9^2 + 6^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{72}{77}$$

$$\alpha = \arccos \frac{72}{77}$$





НАЙТИ УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ и ПЛОСКОС  
ТЬЮ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

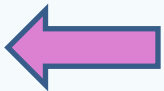
$$2x+y-z+4=0$$

$$\vec{a} \{2; 1; 2\}$$

$$\vec{N} \{2; 1; -1\}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$$



# НАЙТИ РАССТОЯНИЕ от ТОЧКИ до ПРЯМОЙ

$$D(7; 9; 7)$$

$$\frac{X - 2}{4} = \frac{Y - 1}{3} = \frac{Z - 0}{2}$$

$$1) A(2; 1; 0)$$

$$2) \overrightarrow{AD} \{5; 8; 7\}$$

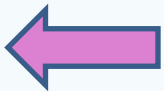
$$3) \vec{a} \{4; 3; 2\}$$

$$4) \vec{a} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 18\vec{j} - 17\vec{k}$$

$$5) |\vec{a} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-5)^2 + 18^2 + (-17)^2} = \sqrt{638}$$

$$6) |\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$7) d = \frac{\sqrt{638}}{\sqrt{29}} = \sqrt{22}$$

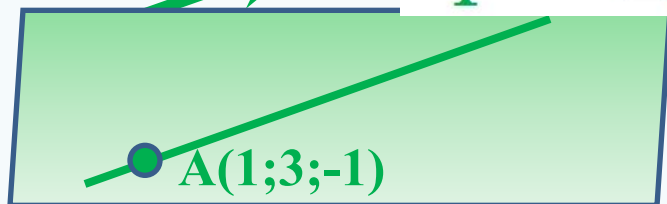


# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$

$$\vec{a} \{1; -2; -1\} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$



$$1) \vec{OA} \{1; 3; -1\}$$

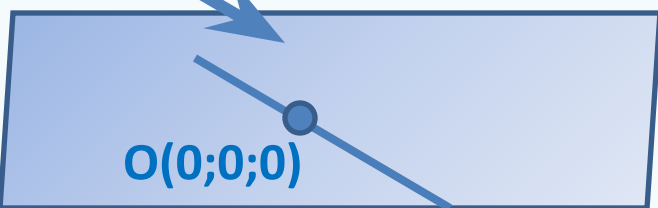
$$2) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 35$$

$$3) \Delta_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 7\vec{j} - 14\vec{k}$$

$$4) |\Delta_2| = \sqrt{7^2 + (-14)^2} = \sqrt{245}$$

$$5) d = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta_2|} = \frac{35}{\sqrt{245}} = \sqrt{5}$$

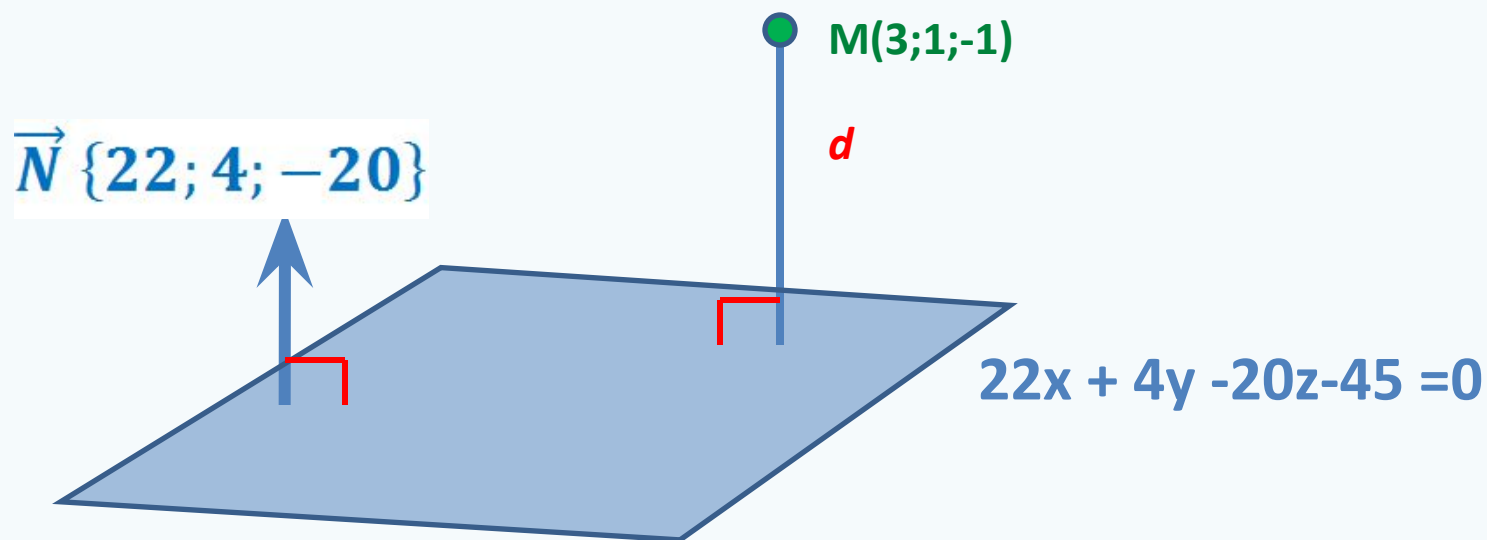
$$\vec{b} \{6; 2; 1\}$$



$$\frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{1}$$



РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ  $M(3;1;-1)$  ДО  
ПЛОСКОСТИ  $22x + 4y - 20z - 45 = 0$



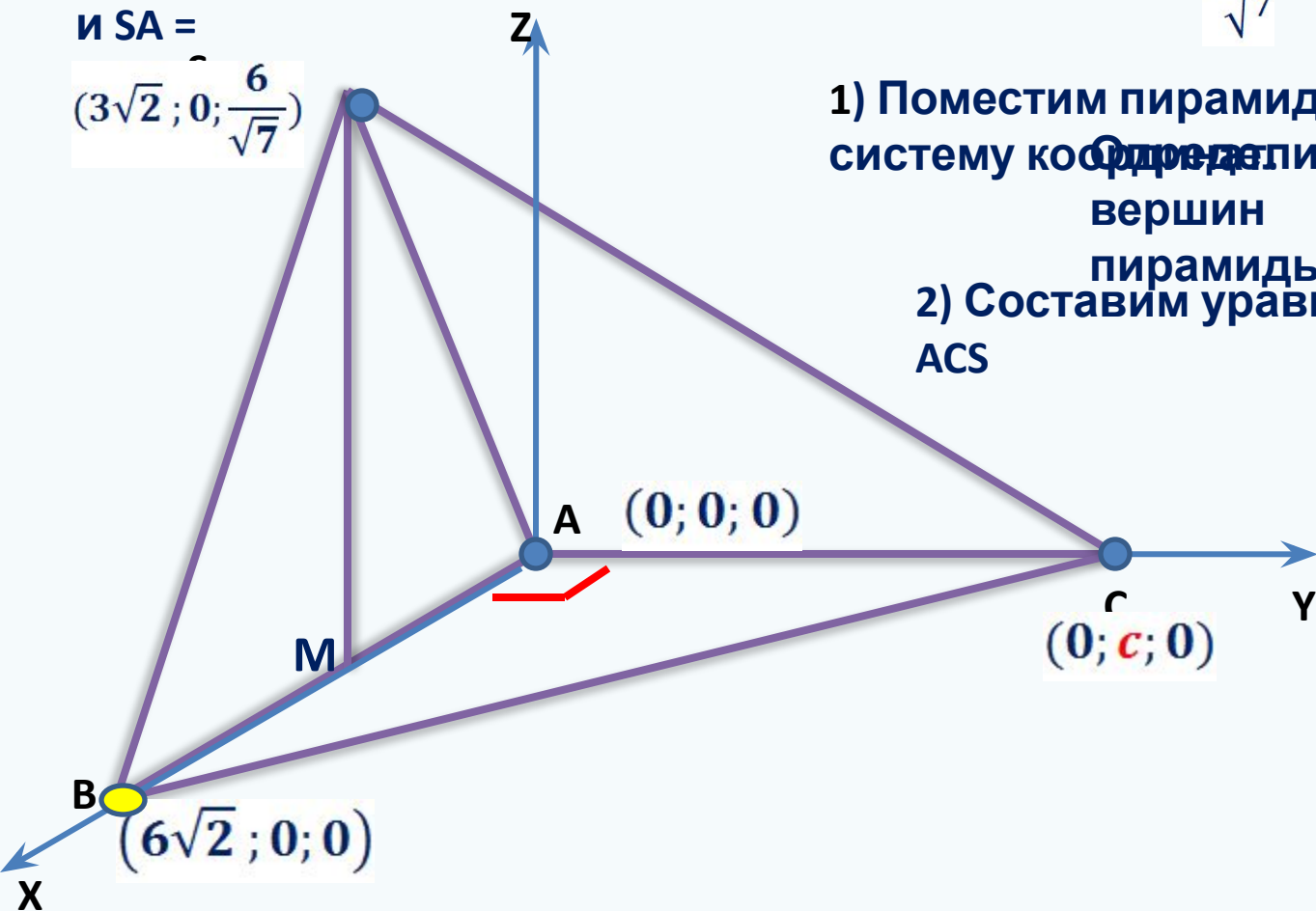
$$d = \frac{|22 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 20 \cdot (-1) - 45|}{\sqrt{22^2 + 4^2 + (-20)^2}} = 1,5$$



В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник с катетами  $AB$  и  $AC$ . Найти расстояние от точки  $B$  до грани  $ASC$ , если

вершина пирамиды проектируется в середину ребра  $AB$  и  $SA = 9\sqrt{\frac{2}{7}}$

и  $SA = (3\sqrt{2}; 0; \frac{6}{\sqrt{7}})$



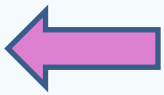
- 1) Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат. Определим координаты вершин пирамиды.
- 2) Составим уравнение плоскости  $ACS$

$$-\frac{6}{\sqrt{7}}xc + 3\sqrt{2}zc = 0$$

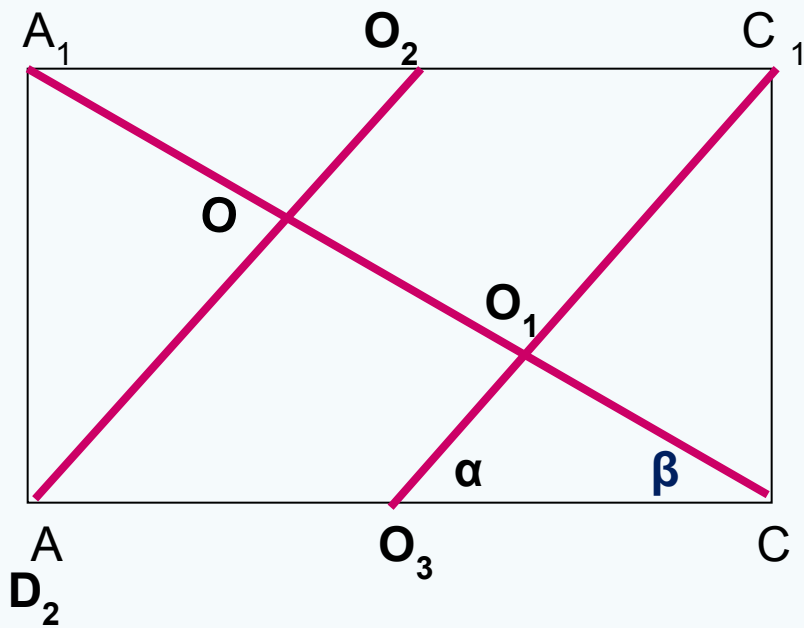
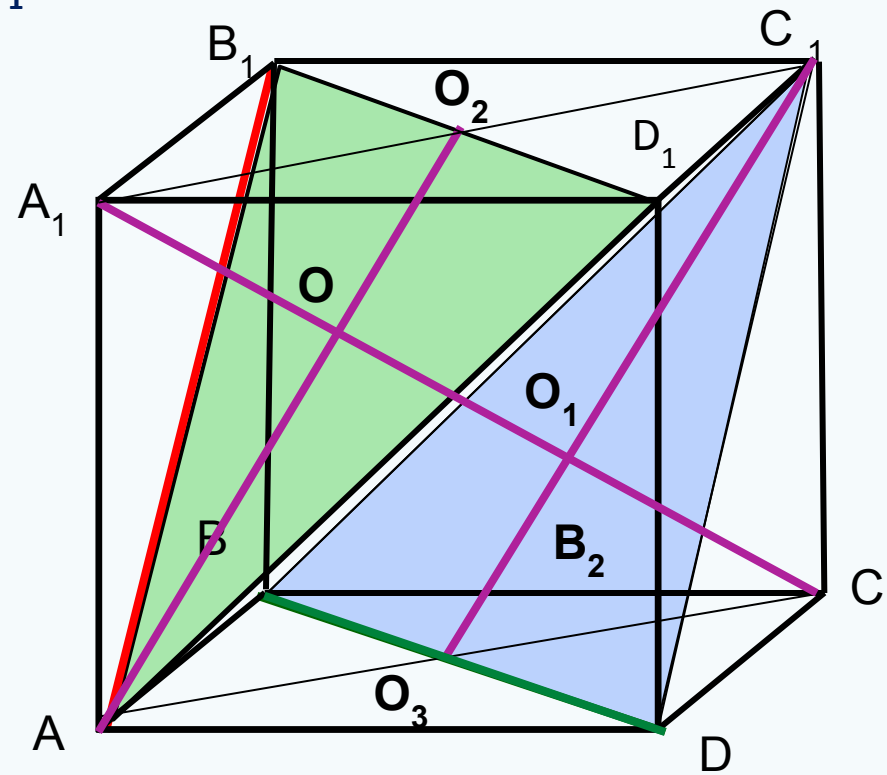
$$-\frac{6}{\sqrt{7}}x + 3\sqrt{2}z = 0$$

3) Найдем по формуле расстояние  $d$  от точки  $B$  до плоскости  $ACS$

Ответ:  $d = 4$



В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $AB = 3$  найти расстояние между диагоналями  $B_1$  и  $BD$



$$\left. \begin{array}{l} 1) B_2 D_2 \parallel BD, \\ A_1 C \perp B_2 D_2 \end{array} \right\} A_1 C \perp BD$$

$$2) A_1 O_2 = O_2 C_1 = A O_3 = O_3 C = 1,5$$

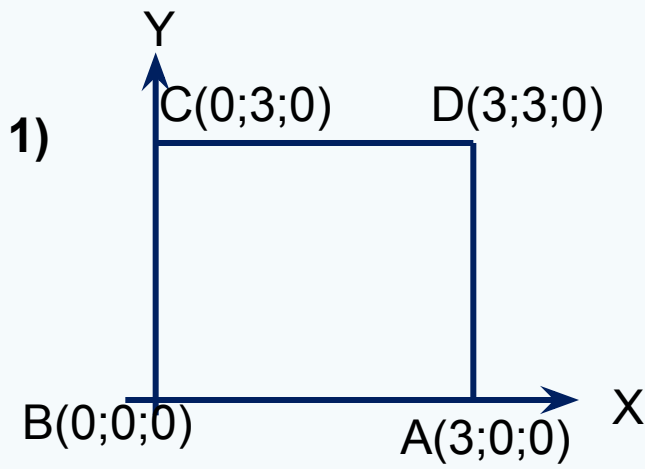
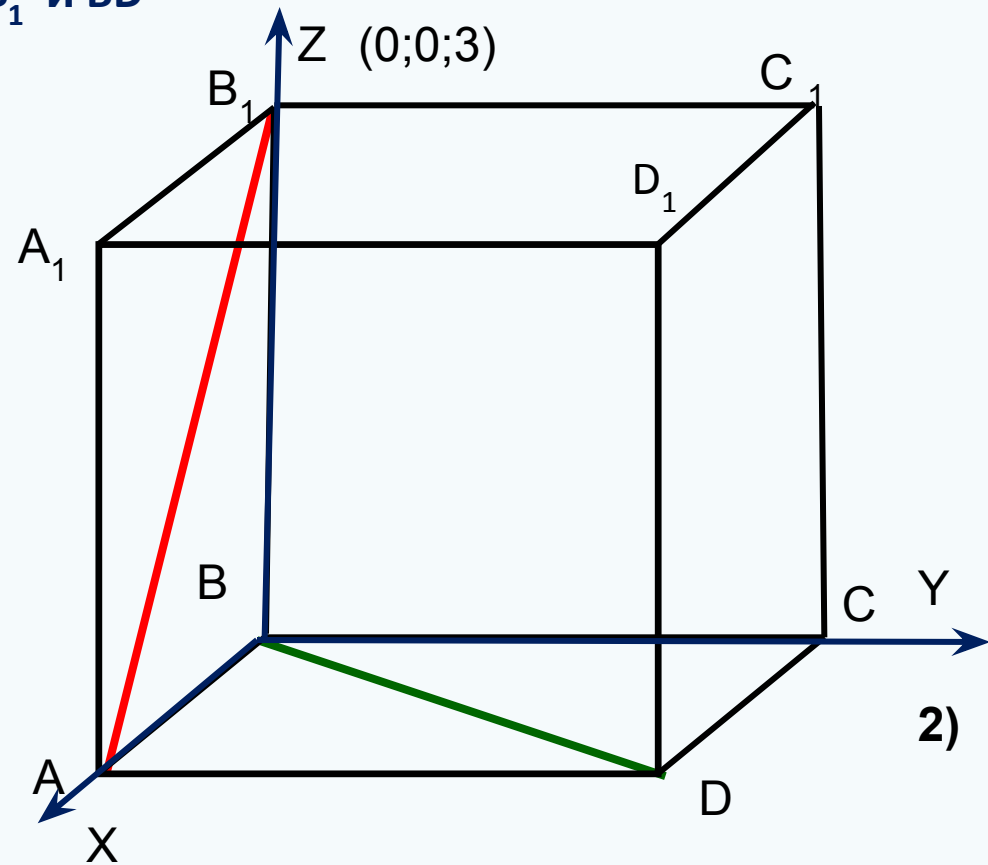
$$A_1 O = O O_1 = O_1 C = \sqrt{3}$$

$$3) \left. \begin{array}{l} \cos \beta = \frac{AC}{A_1 C} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \sin \alpha = \frac{CC_1}{OC_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle O_3 O_1 C = 90^\circ \\ A_1 C \perp O_3 C_1 \end{array}$$

$$4) \left. \begin{array}{l} A_1 C \perp O_3 C_1 \\ A_1 C \perp BD \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_1 C \perp (BDC_1) \\ A_1 C \perp (B_1 D_1 A) \end{array}$$

$$5) \rho(AB; BD) = \rho((BDC_1); (B_1 D_1 A)) = O O_1 = \sqrt{3}$$

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $AB = 3$  найти расстояние между диагоналями  $AB_1$  и  $BD$



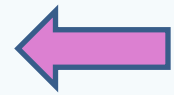
2)  $\overrightarrow{AB_1} \{-3; 0; 3\}$   $\overrightarrow{BD} \{3; 3; 0\}$   $\overrightarrow{BB_1} \{0; 0; 3\}$

3)  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -27$

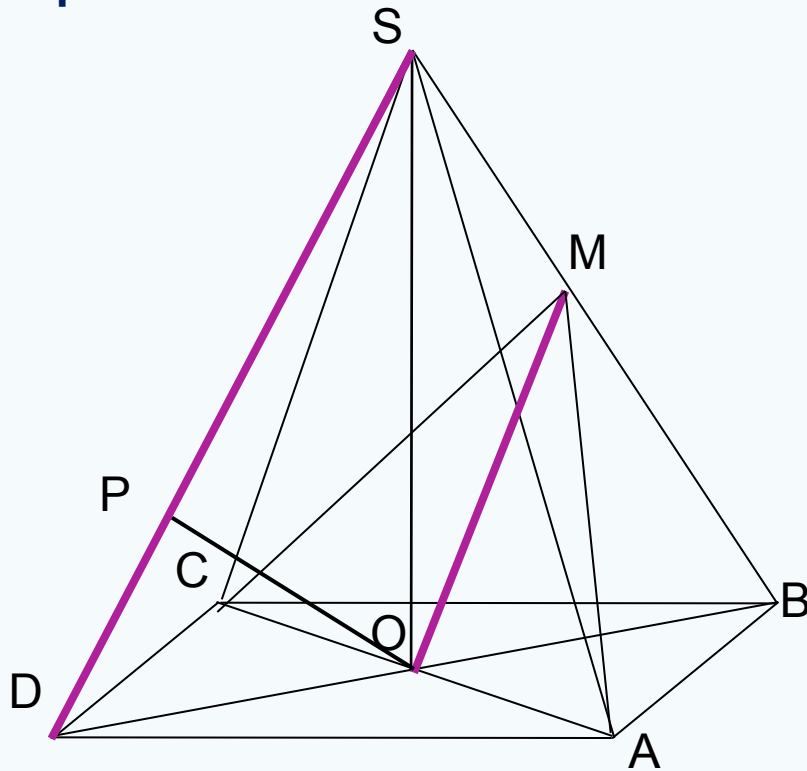
5)  $|\vec{c}| = 9\sqrt{3}$

4)  $\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9i + 9j - 9k$

6)  $\rho(AB; BD) = \frac{27}{9\sqrt{3}} = \sqrt{3}$



В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания равна 3, а высота равна 6. Найти расстояние между медианой  $AM$  боковой грани  $ASB$  и ребром  $SD$



1)  $OM \parallel SD \longrightarrow SD \parallel (ACM)$

2) Проведем  $OP \perp SD$

3)  $\left. \begin{array}{l} OM \parallel SD \\ OP \perp SD \end{array} \right\} OM \perp OP$

4)  $\left. \begin{array}{l} AC \perp BD \\ AC \perp OS \end{array} \right\} \begin{array}{l} AC \perp (BSD) \\ AC \perp OP \end{array}$

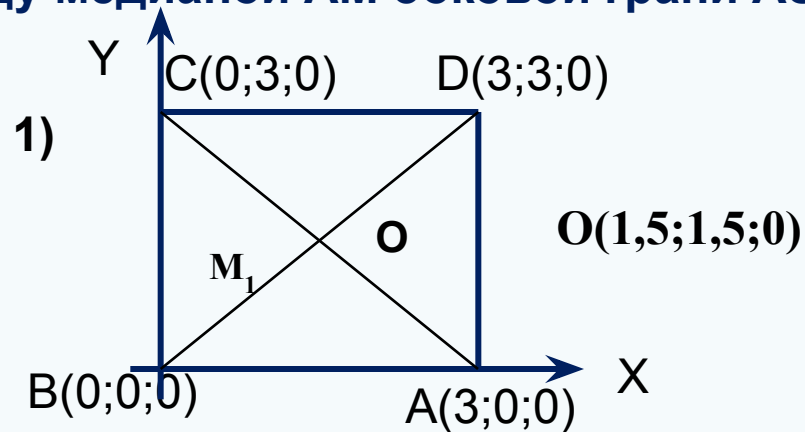
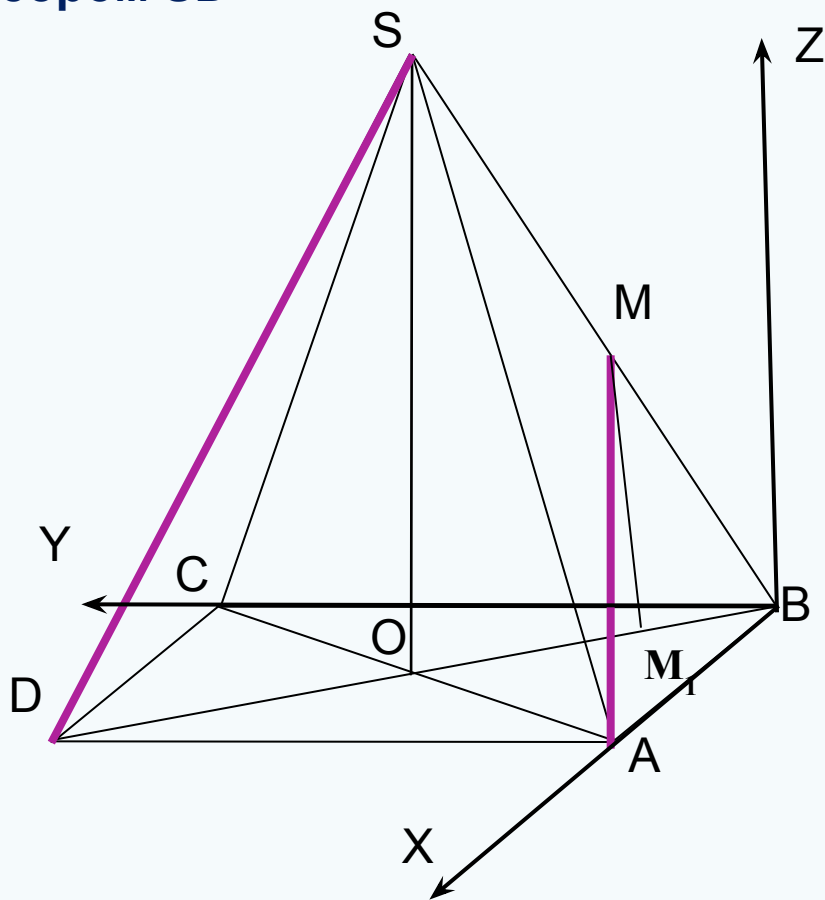
5)  $\left. \begin{array}{l} AC \perp OP \\ OP \perp OM \end{array} \right\} \begin{array}{l} OP \perp (ACM) \\ SD \perp OP \\ OP = \rho(AM; SD) \end{array}$

6) В  $\triangle DOS$ :  $DO = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ;  $SO = 6$ ;  $SD = \frac{9}{\sqrt{2}}$

$OP = \frac{OD \cdot SO}{DS} = 2$



В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания равна 3, а высота равна 6. Найти расстояние между медианой  $AM$  боковой грани  $ASB$  и ребром  $SD$



$$M_1(0,75;0,75;0) \quad M(0,75;0,75;3) \quad S(1,5;1,5;6)$$

$$2) \overline{AM} \{-2,25; 0,75; 3\} \quad \overline{SD} \{1,5; 1,5; -6\}$$

$$\overline{AD} \{0; 3; 0\}$$

$$3) \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2,25 & 0,75 & 3 \\ 1,5 & 1,5 & -6 \end{vmatrix} = -27$$

$$4) \Delta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2,25 & 0,75 & 3 \\ 1,5 & 1,5 & -6 \end{vmatrix} = -9i - 9j - 4,5k$$

$$|\vec{c}| = 13,5$$

$$\rho(AM; SD) = \frac{27}{13,5} = 2$$

