ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С2 КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНЫМ СПОСОБОМ

г. Новороссийск
МОУ СОШ № 10
учитель математики
Волкова О. А.

СОДЕРЖАНИЕ

- НУЖНЫЕ ФОРМУЛЫ
- УГЛЫ в ПРОСТРАНСТВЕ
- РАССТОЯНИЕ в ПРОСТРАНСТВЕ
- ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛ

НУЖНЫЕ ФОРМУЛЫ

Векторное произведение 2 векторов

Объем параллелепипеда, построенного на 3 векторах

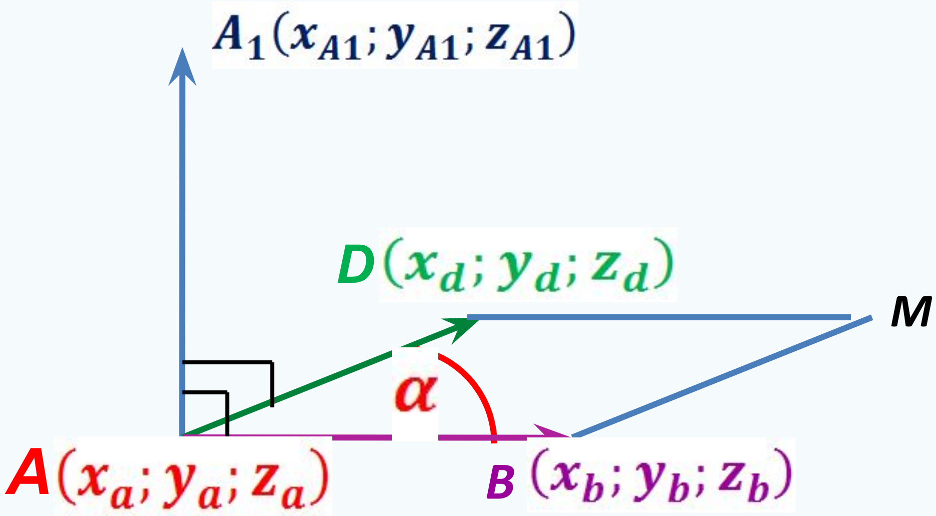
Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

Объем тетраэдра, построенного на 3 векторах

Уравнение прямой, проходящей через 2 точки

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕ НИЕ

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1}$



1) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AA_1}$ $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AA_1}$

2) $|\overrightarrow{AA_1}| = S_{\text{пар-ма } ABMD}$

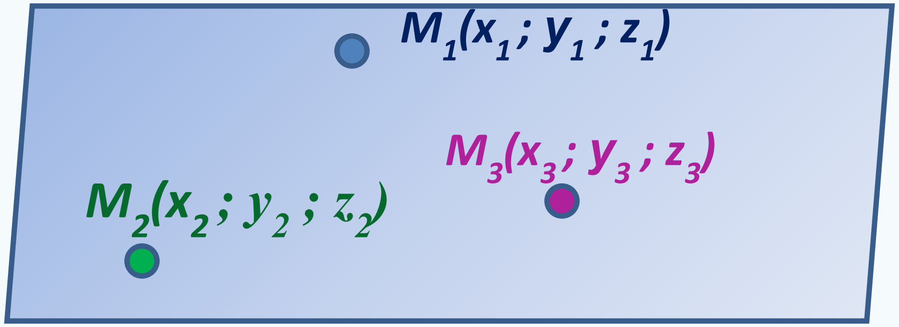
$|AA_1| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\alpha$

3) $\overrightarrow{AB}\{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}$

$\overrightarrow{AD}\{x_d - x_a; y_d - y_a; z_d - z_a\}$

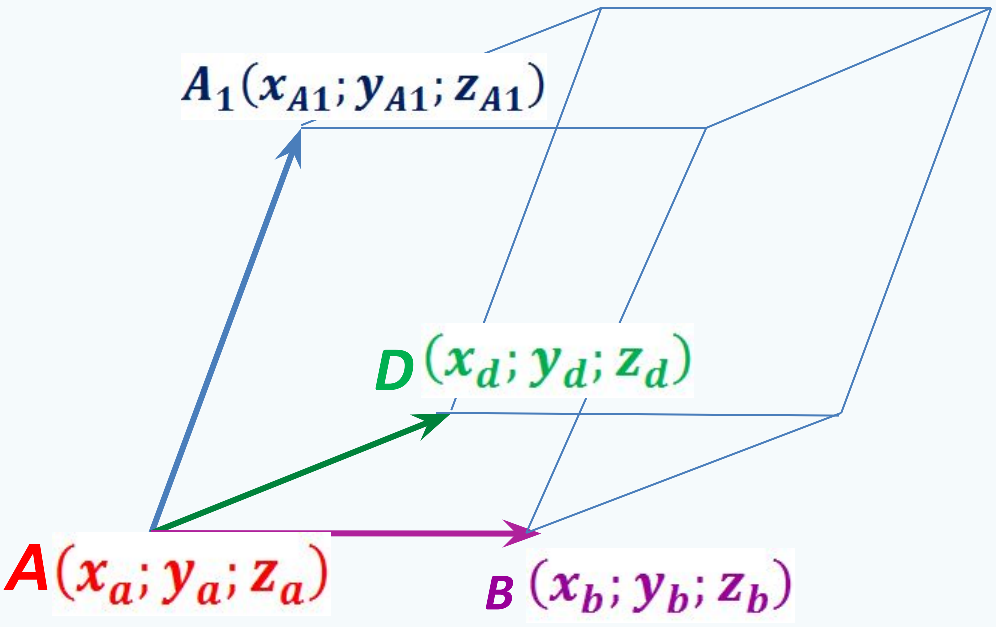
$$\overrightarrow{AA_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a & z_d - z_a \end{vmatrix}$$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ 3 ТОЧКИ



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Объем параллелепипеда, построенного на 3 векторах



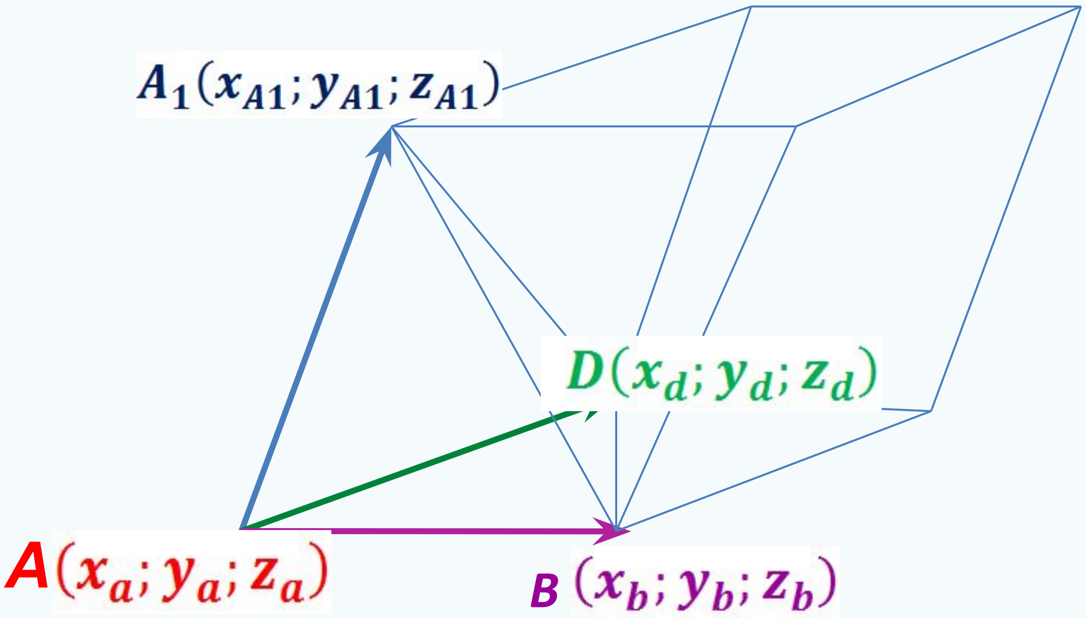
$\overrightarrow{AB}\{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}$

$\overrightarrow{AA_1}\{x_{a1} - x_a; y_{a1} - y_a; z_{a1} - z_a\}$

$\overrightarrow{AD}\{x_d - x_a; y_d - y_a; z_d - z_a\}$

$$V = mod \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_{a1} - x_a & y_{a1} - y_a & z_{a1} - z_a \\ x_d - x_a; & y_d - y_a & z_d - z_a \end{vmatrix}$$

ОБЪЕМ ТЕТРАЭДРА, ПОСТРОЕННОГО на 3 векторах



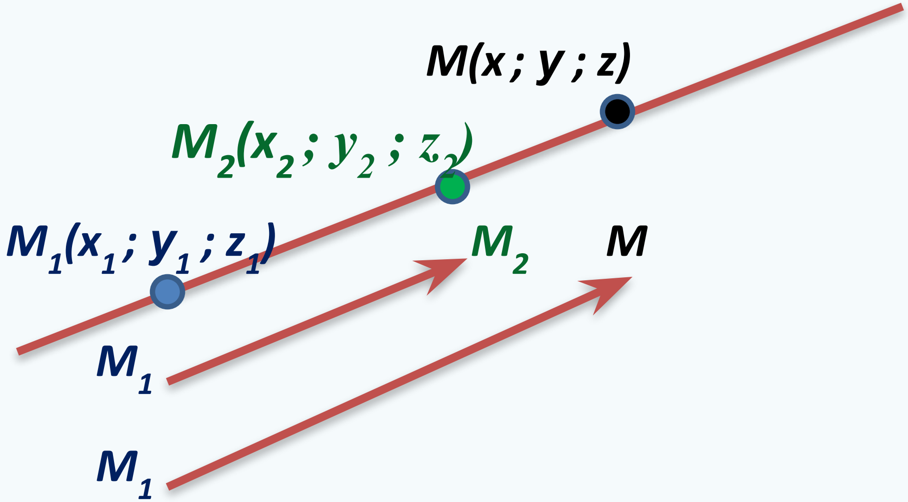
$\overrightarrow{AB}\{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}$

$\overrightarrow{AA_1}\{x_{a1} - x_a; y_{a1} - y_a; z_{a1} - z_a\}$

$\overrightarrow{AD}\{x_d - x_a; y_d - y_a; z_d - z_a\}$

$$V = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_{a1} - x_a & y_{a1} - y_a & z_{a1} - z_a \\ x_d - x_a; & y_d - y_a & z_d - z_a \end{vmatrix}$$

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ через 2 точки



$$\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M}\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

У Г Л Ы
В П Р О С Т Р А Н С Т В Е

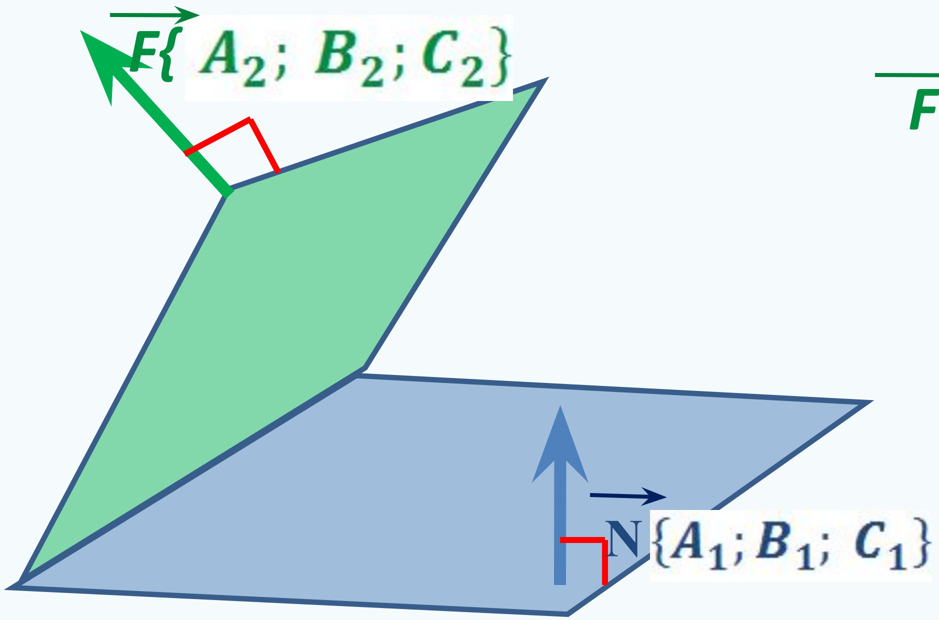
Угол между плоскостями

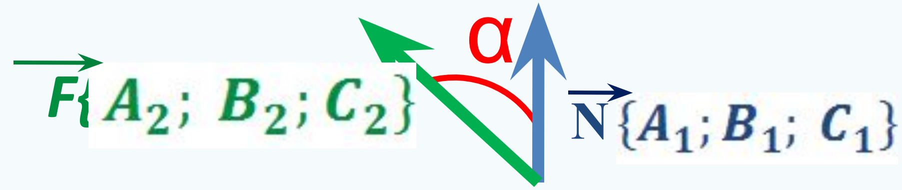
Угол между прямыми

Угол между прямой и плоскостью

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$



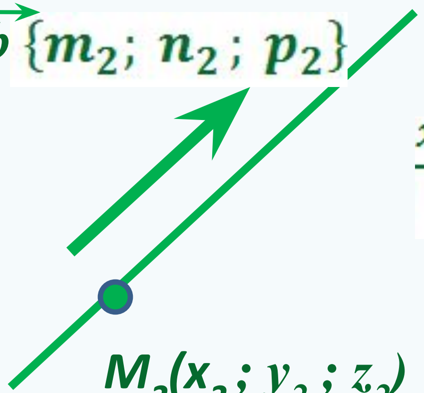


$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$\cos\alpha = \pm\frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2}{\left(\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\right)\cdot\left(\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}\right)}$$

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

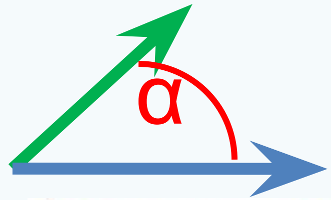
$\vec{b}\{m_2;\, n_2;\, p_2\}$



$M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$

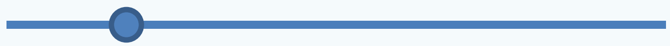
$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

$\vec{b}\{m_2;\, n_2;\, p_2\}$



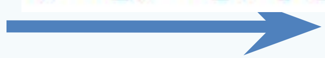
$\vec{a}\{m_1;\, n_1;\, p_1\}$

$M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$



$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

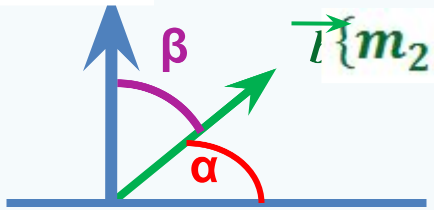
$\vec{a}\{m_1;\, n_1;\, p_1\}$



$$\text{Cos}\,\alpha = \pm\frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\left(\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\right) \cdot \left(\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}\right)}$$

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ и ПЛОСКОСТЬЮ

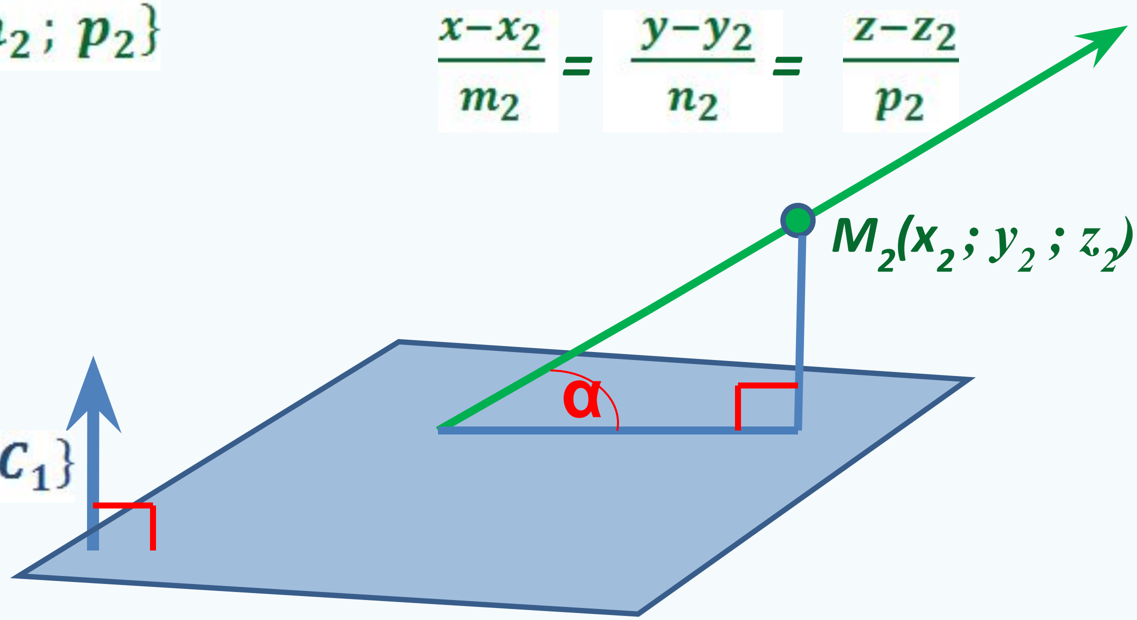
$\vec{N}\{A_1; B_1; C_1\}$



$\vec{l}\{m_2; n_2; p_2\}$

$\vec{b}\{m_2; n_2; p_2\}$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$



$M_2(x_2; y_2; z_2)$

$\vec{N}\{A_1; B_1; C_1\}$

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{|A_1\cdot m_2 + B_1\cdot n_2 + C_1\cdot p_2|}{\left(\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\right)\cdot\left(\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}\right)}$$

РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Расстояние между 2 точками

Расстояние от точки до прямой

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние от точки до плоскости

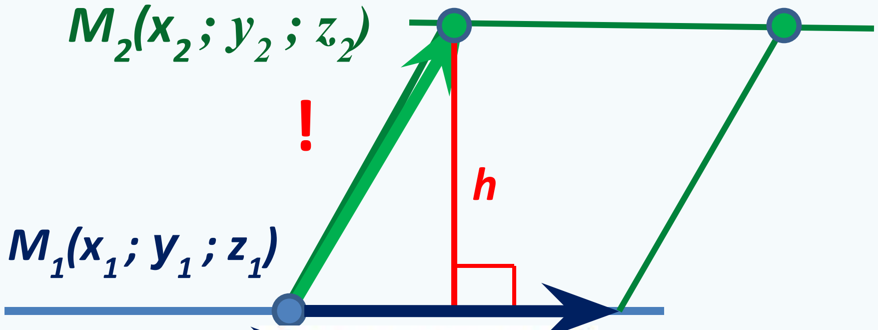
РАССТОЯНИЕ МЕЖДУДВУМЯ ТОЧКАМИ

$M_2(x_2\,;\,y_2\,;\,z_2)$

$M_1(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1)$

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

РАССТОЯНИЕ от ТОЧКИ до ПРЯМОЙ



$\vec{a}\{m_1; n_1; p_1\}$

$$d = h = \frac{S_{\text{пар-ма}}}{|\vec{a}|}$$

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

1) $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

2) $\vec{a} \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}$

3) $S_{\text{пар-ма}} = |\vec{a} \times \overrightarrow{M_1M_2}|$

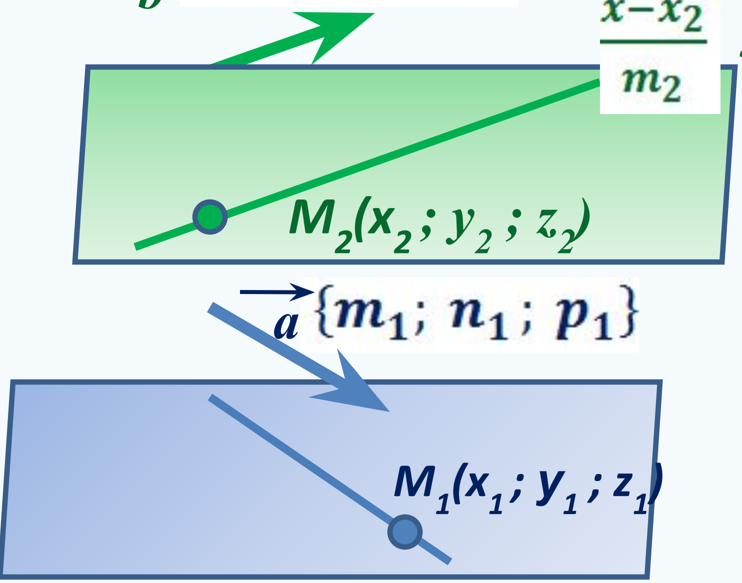
4) $|\vec{a}| = \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}$

5) $d = \dfrac{|\vec{a} \times \overrightarrow{M_1M_2}|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}$

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

$\vec{b}\{m_2;\ n_2;\ p_2\}$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$



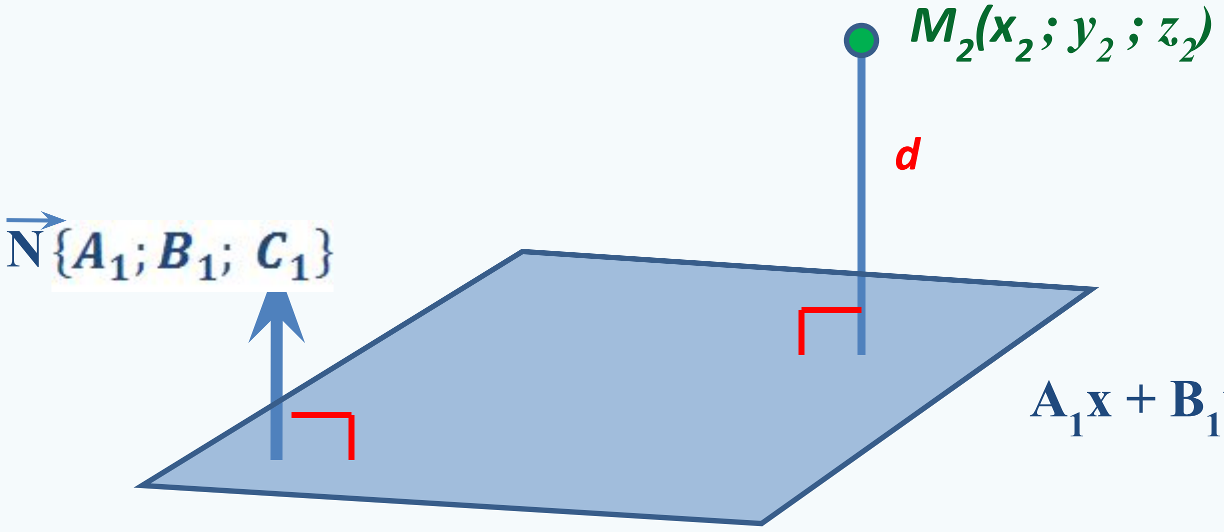
$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

1) $$\Delta_1=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

2) $$\Delta_2=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

3) $$d=\left|\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right|$$

РАССТОЯНИЕ от ТОЧКИ до ПЛОСКОСТИ



$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$d = \frac{|A_1 \cdot x_2 + B_1 \cdot y_2 + C_1 \cdot z_2 + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛ

РЕШЕНИЕ
ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ДВУМЯ СПОСОБАМИ

1. Найти векторное произведение векторов

$\vec{a}\,\{2;3;5\}$ и $\vec{b}\,\{1;2;1\}$ и его модуль

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 3\,\vec{i}+2\cdot 2\,\vec{k}+5\cdot 1\,\vec{j}-1\cdot 3\,\vec{k}-2\cdot 5\,\vec{i}-1\cdot 2\,\vec{j}=$$

$$=-7\,\vec{i}+3\,\vec{j}+\vec{k}$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{(-7)^2+3^2+1^2}=\sqrt{59}=S_{\text{пар}-\text{ма}}$$

СОСТАВИТЬ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКИ

$M_1(2;2;2)$ $M_2(4;0;3)$ $M_3(0;1;0)$

1) $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 4-2 & 0-2 & 3-2 \\ 0-2 & 1-2 & 0-2 \end{vmatrix} = 0$

2) $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

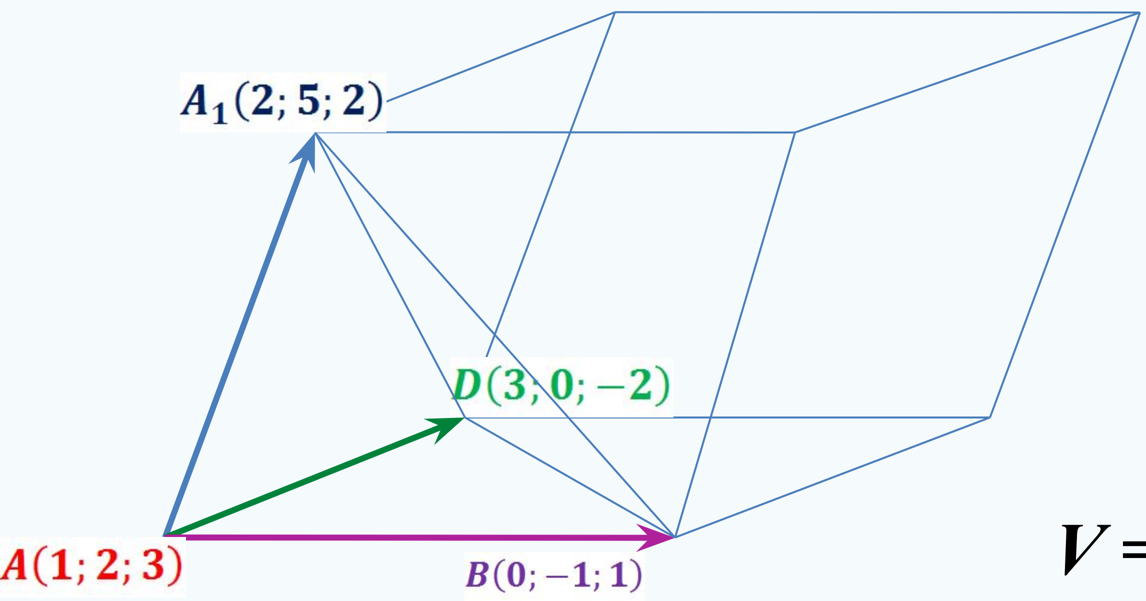
3) $4(x-2) - 2(z-2) - 2(y-2) - 4(z-2) + 1(x-2) + 4(y-2) = 0$

$5x + 2y - 6z - 2 = 0$

нормаль $\overrightarrow{N}\{5; 2; -6\}$

Найти объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если

$A(1;2;3)$ $B(0;-1;1)$ $D(3;0;-2)$ $A_1(2;5;2)$



$\overrightarrow{AB}\{-1;-3;-2\}$

$\overrightarrow{AA_1}\{1;3;-1\}$

$\overrightarrow{AD}\{2;-2;-2\}$

$$V = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$=15 + 4 + 6 + 12 + 2 - 15 = 24$$

$$V_{ABDA1} = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4$$

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ 2 ТОЧКИ

$A(1;2;3)$ $\qquad$ $B(4;5;6)$

$$\frac{X-1}{4-1}=\frac{Y-2}{5-2}=\frac{Z-3}{6-3}$$

$$\frac{X-1}{3}=\frac{Y-2}{3}=\frac{Z-3}{3}$$

НАЙТИ УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

$4x - 5y + 3z - 1 = 0$ $\qquad$ $x - 4y - z + 9 = 0$

$\vec{N}\{4; -5; 3\}$ $\qquad$ $\vec{F}\{1; -4; -1\}$

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 4 - 5\cdot(-4) - 1\cdot 3}{\sqrt{4^2+(-5)^2+3^2}\ \sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}} = 0{,}7$$

$\alpha = \arccos 0{,}7$

НАЙТИ УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

$$\frac{X}{2} = \frac{Y-3}{9} = \frac{Z+1}{6}$$

$$\frac{X-1}{3} = \frac{Y+2}{6} = \frac{Z-5}{2}$$

$$\vec{a}\,\{2; 9; 6\}$$

$$\vec{b}\,\{3; 6; 2\}$$

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 3+9\cdot 6+6\cdot 2}{\sqrt{2^2+9^2+6^2}\cdot\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{72}{77}$$

$$\alpha = arccos\frac{72}{77}$$

НАЙТИ УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ и ПЛОСКОСТЬЮ

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$$

$$2x+y-z+4=0$$

$$\vec{a}\{2;1;2\}$$

$$\vec{N}\{2;1;-1\}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\cdot 2+1\cdot 1-1\cdot 2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$$

НАЙТИ РАССТОЯНИЕ от ТОЧКИ до ПРЯМОЙ

$D(7;9;7)$

$$\frac{X-2}{4}=\frac{Y-1}{3}=\frac{Z-0}{2}$$

1) $A(2;1;0)$

2) $\overrightarrow{AD}\{5;8;7\}$

3) $\vec{a}\{4;3;2\}$

4) $\vec{a}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 8 & 7\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}=-5\vec{i}+18\vec{j}-17\vec{k}$

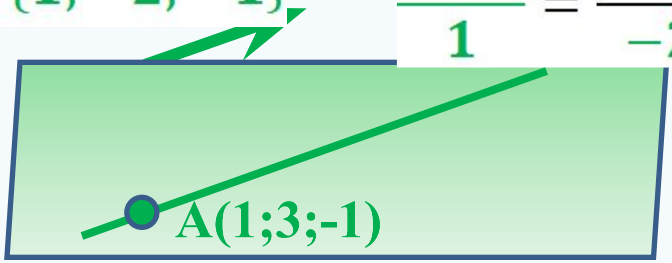
5) $|\vec{a}\times\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(-5)^2+18^2+(-17)^2}=\sqrt{638}$

6) $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+3^2+2^2}=\sqrt{29}$

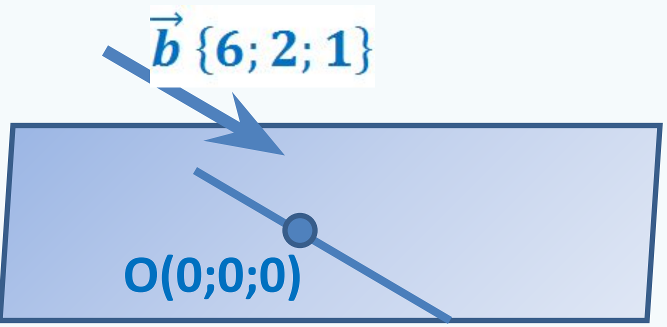
7) $d=\frac{\sqrt{638}}{\sqrt{29}}=\sqrt{22}$

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1} \qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{-1}$$



$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{-1}$$



$$\frac{x-0}{6}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{1}$$

1) $\overrightarrow{OA}\,\{1;3;-1\}$

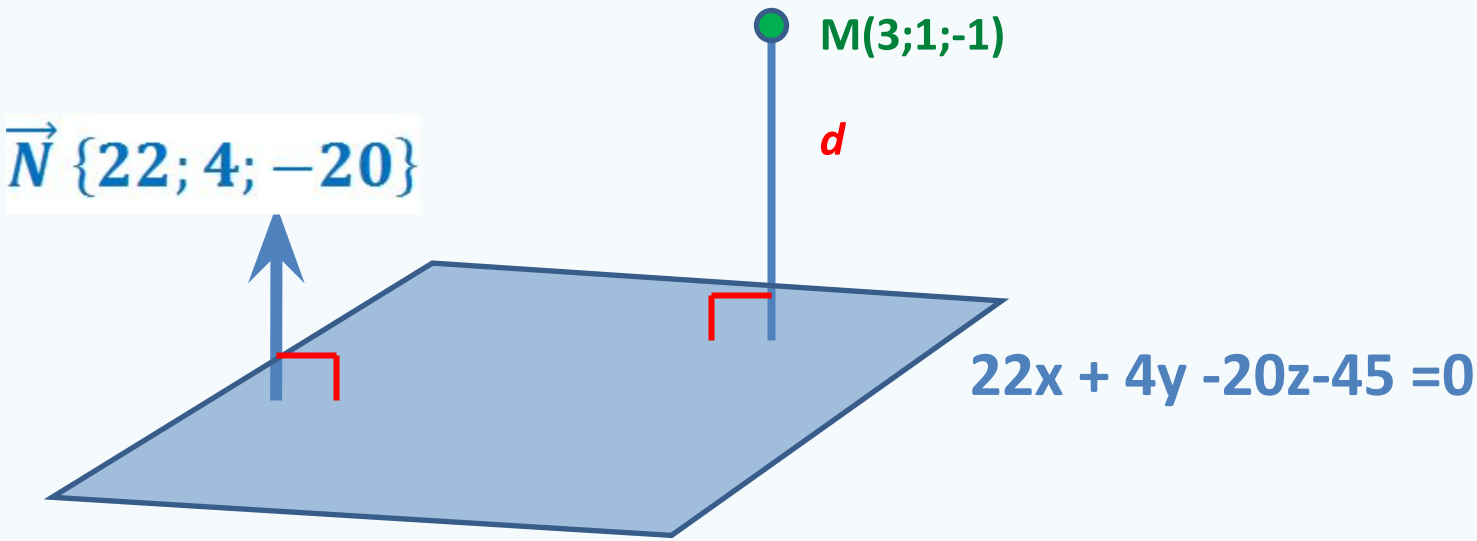
2) $\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 6 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=35$

3) $\Delta_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=7\vec{j}-14\vec{k}$

4) $|\Delta_2|=\sqrt{7^2+(-14)^2}=\sqrt{245}$

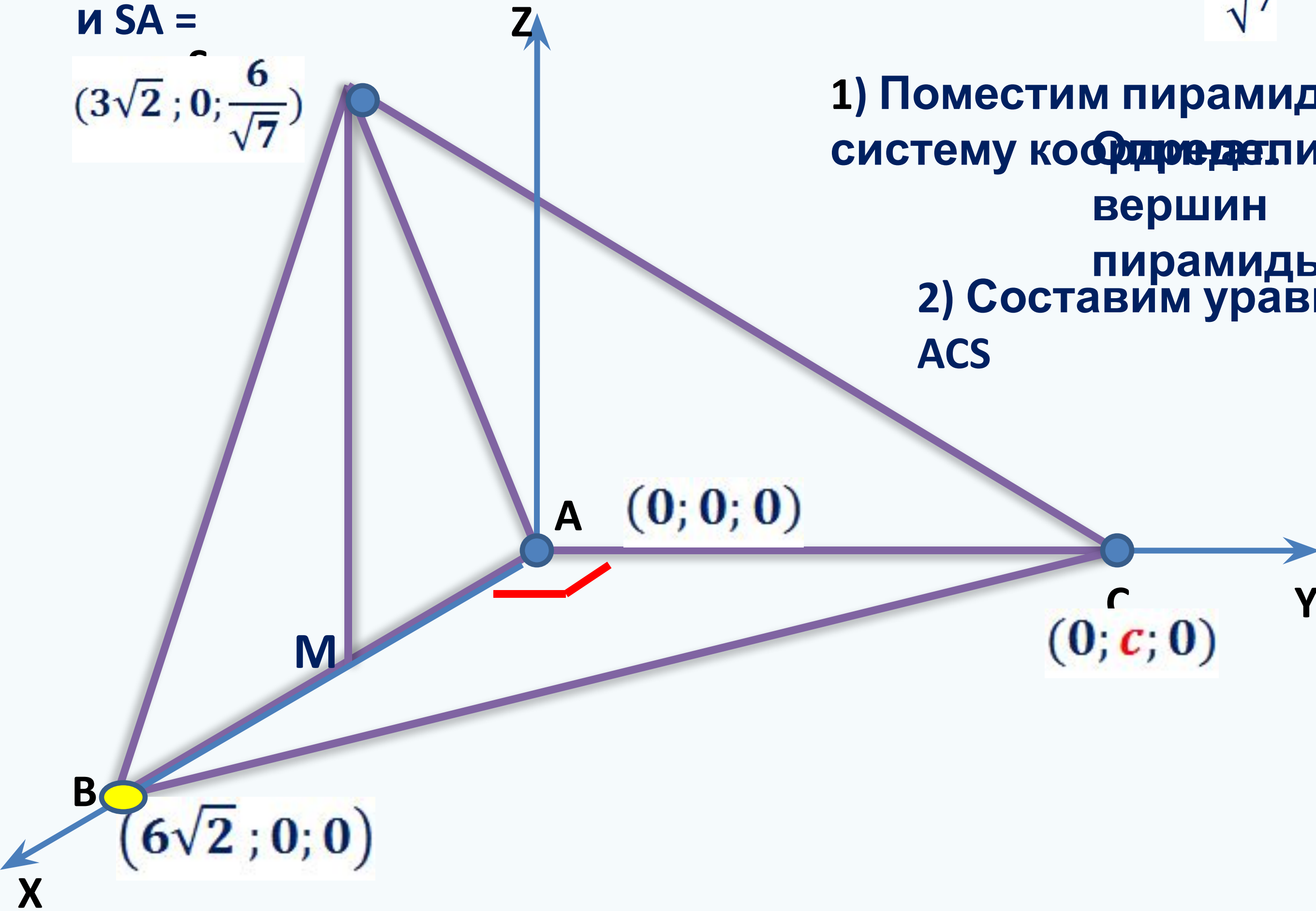
5) $d=\left|\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}\right|=\dfrac{35}{\sqrt{245}}=\sqrt{5}$

РАССТОЯНИЕ от ТОЧКИ M(3;1;-1) до ПЛОСКОСТИ $22x + 4y - 20z - 45 = 0$



$$d = \frac{|22 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 20 \cdot (-1) - 45|}{\sqrt{22^2 + 4^2 + (-20)^2}} = 1{,}5$$

В основании треугольной пирамиды SABC лежит прямоугольный треугольник с катетом AB = $6\sqrt{2}$. Найти расстояние от точки B до грани ASC, если вершина пирамиды проектируется в середину ребра AB и SA = $9\sqrt{\frac{2}{7}}$



1) Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат.

Определим координаты вершин пирамиды.

2) Составим уравнение плоскости ACS

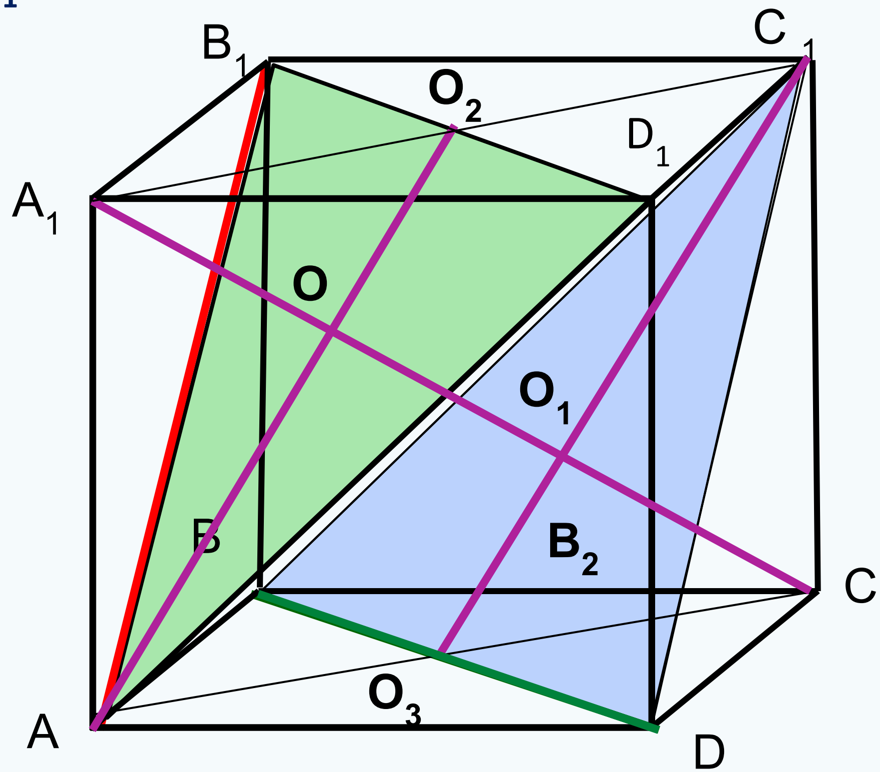
$$-\frac{6}{\sqrt{7}}xc+3\sqrt{2}\,zc=0$$

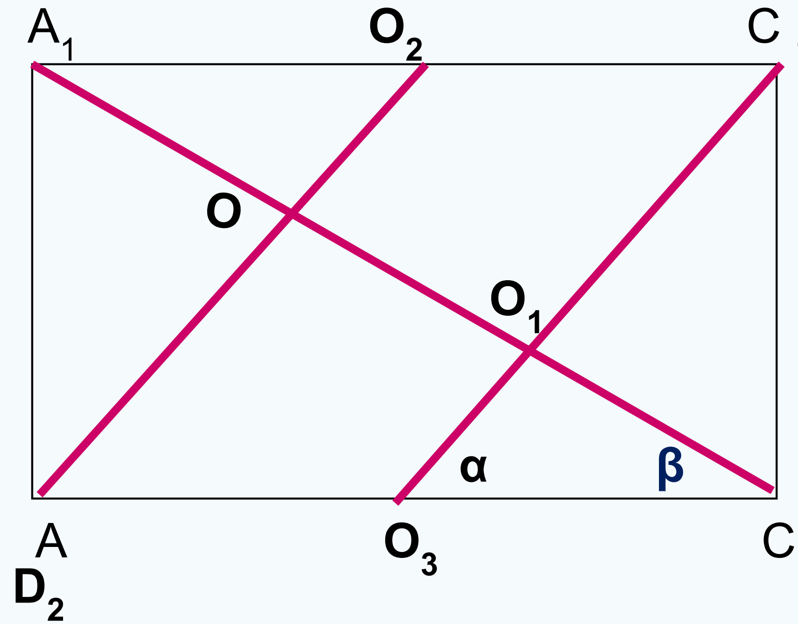
$$-\frac{6}{\sqrt{7}}x+3\sqrt{2}\,z=0$$

3) Найдем по формуле расстояние d от точки B до плоскости ACS

Ответ: d =4

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром AB = 3 найти расстояние между диагоналями B_1 и BD





1) $\left.\begin{array}{l} B_2D_2 \parallel BD, \\ A_1C \perp B_2D_2 \end{array}\right] A_1C \perp BD$

2) $\underbrace{A_1O_2 = O_2C_1 = AO_3 = O_3C = 1{,}5}$

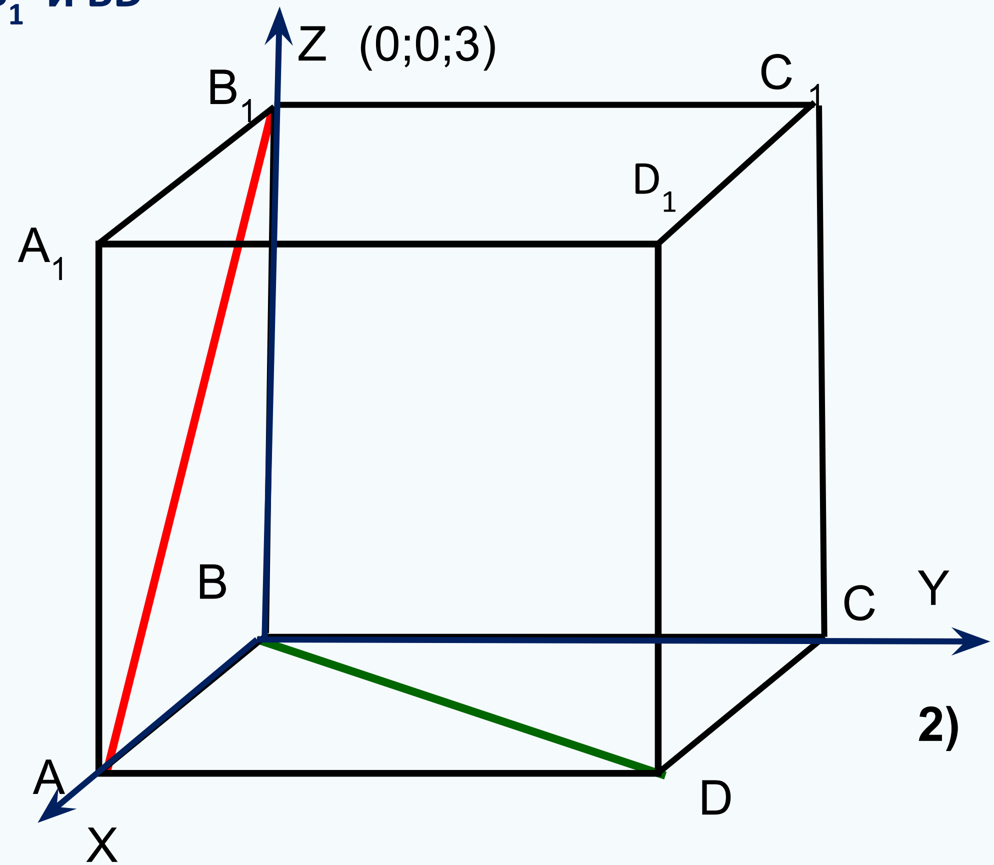
$A_1O = OO_1 = O_1C = \sqrt{3}$

3) $\left.\begin{array}{l} \cos\beta = \dfrac{AC}{A_1C} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \sin\alpha = \dfrac{CC_1}{OC_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{array}\right] \dfrac{\angle O_3O_1C = 90^\circ}{A_1C \perp O_3C_1}$

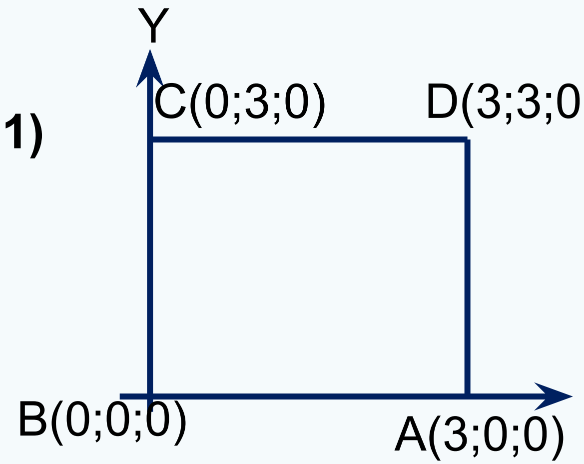
4) $\left.\begin{array}{l} A_1C \perp O_3C_1 \\ A_1C \perp BD \end{array}\right] \dfrac{A_1C \perp (BDC_1)}{A_1C \perp (B_1D_1A)}$

5) $\rho\,(AB; BD) = \rho\left((BDC_1); (B_1D_1A)\right) = OO_1 = \sqrt{3}$

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром AB = 3 найти расстояние между диагоналями B_1 и BD



1)



2) $\overrightarrow{AB_1}\{-3;0;3\}$ $\overrightarrow{BD}\{3;3;0\}$ $\overrightarrow{BB_1}\{0;0;3\}$

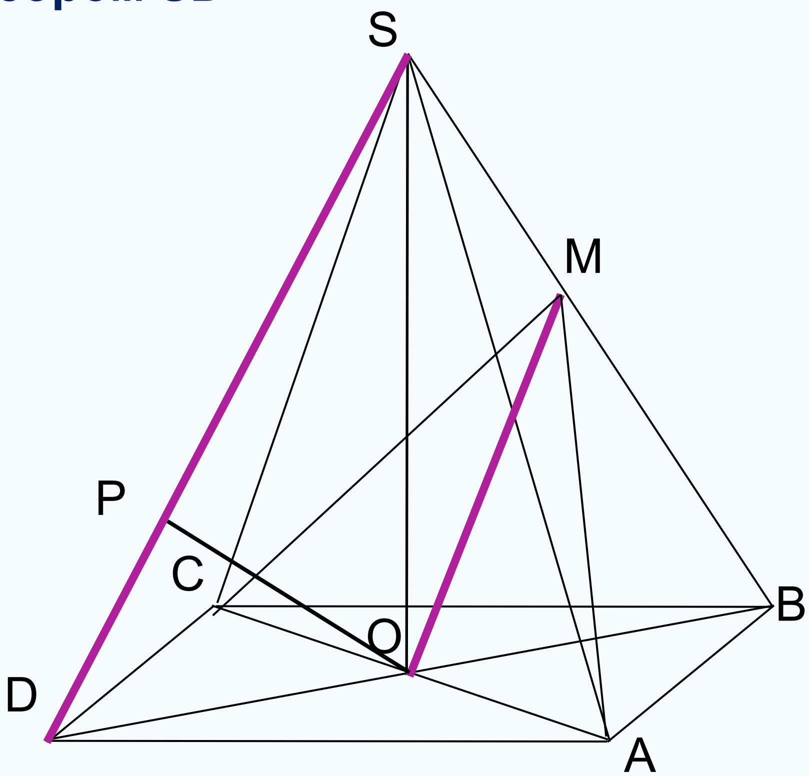
3) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -27$

4) $\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9i + 9j - 9k$

5) $|\vec{c}| = 9\sqrt{3}$

$$6)\ \rho\,(AB;BD) = \frac{27}{9\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 3, а высота равна 6. Найти расстояние между медианой AM боковой грани ASB и ребром SD



1) $OM \parallel SD \longrightarrow SD \parallel (ACM)$

2) Проведем $OP \perp SD$

3) $\left.\begin{array}{l} OM \parallel SD \\ OP \perp SD \end{array}\right\} OM \perp OP$

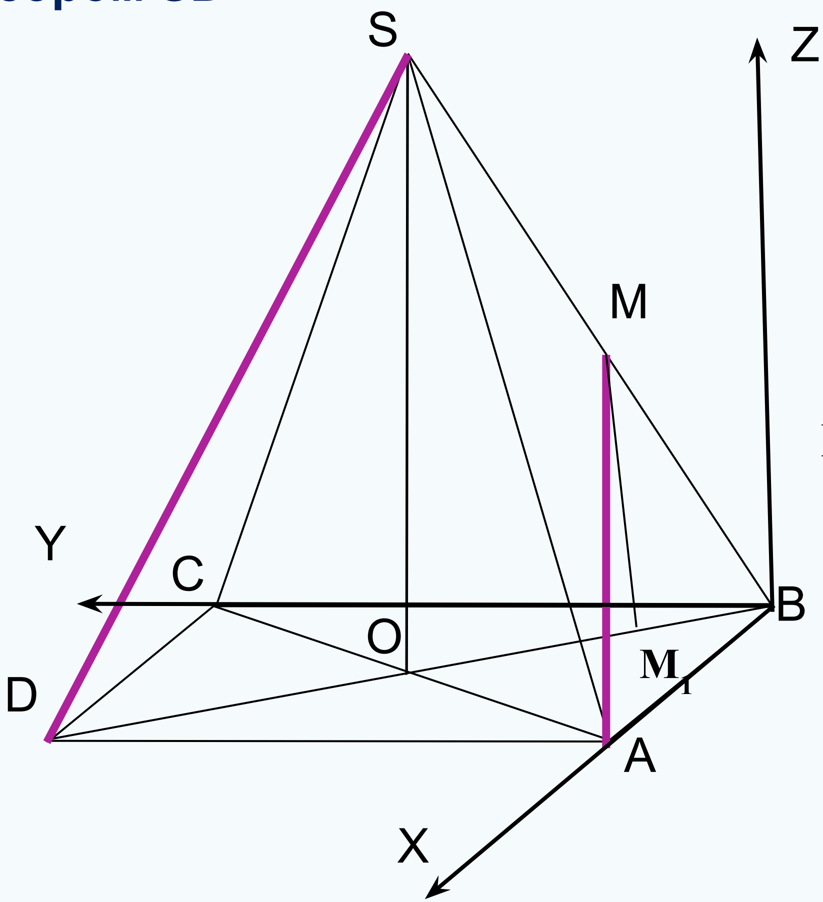
4) $\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ AC \perp OS \end{array}\right\} \begin{array}{l} AC \perp (BSD) \\ AC \perp OP \end{array}$

5) $\left.\begin{array}{l} AC \perp OP \\ OP \perp OM \end{array}\right\} \begin{array}{l} OP \perp (ACM) \\ SD \perp OP \\ OP = \rho\,(AM; SD) \end{array}$

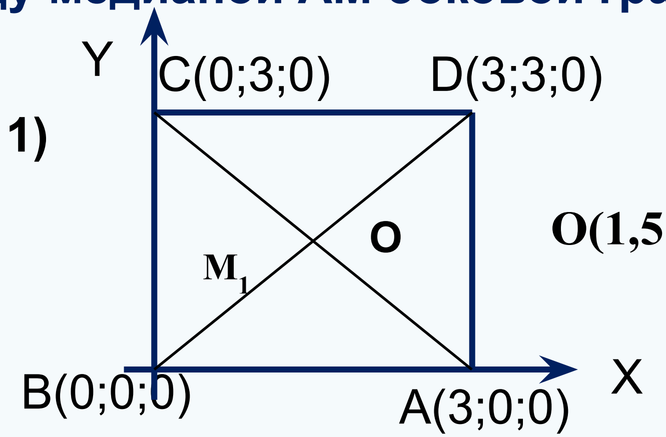
6) В ΔDOS: $DO = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$; $SO = 6$; $SD = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$

$$OP = \frac{OD \cdot SO}{DS} = 2$$

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 3, а высота равна 6. Найти расстояние между медианой AM боковой грани ASB и ребром SD



1)



$O(1{,}5;1{,}5;0)$

$M_1(0{,}75;0{,}75;0)$ $M(0{,}75;0{,}75;3)$ $S(1{,}5;1{,}5;6)$

2) $\overrightarrow{AM}\{-2,25;0,75;3\}$ $\overrightarrow{SD}\{1,5;1,5;-6\}$

$\overrightarrow{AD}\{0;3;0\}$

$$3)\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2,25 & 0,75 & 3 \\ 1,5 & 1,5 & -6 \end{vmatrix} = -27$$

$$4)\Delta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2,25 & 0,75 & 3 \\ 1,5 & 1,5 & -6 \end{vmatrix} = -9i - 9j - 4,5k$$

$|\vec{c}| = 13,5$

$$\rho\,(AM;SD) = \frac{27}{13,5} = 2$$