Теоретические основы электротехники

Лекция 21. Расчет переходных процессов в разветвленных линейных электрических цепях

Алгоритм расчета переходных процессов в разветвленных линейных электрических цепях классическим методом

- сначала на основании правил Кирхгофа составляются в общем случае неоднородные дифференциальные уравнения состояния электрической цепи для мгновенных значений напряжений и токов отдельных ветвей (порядок каждого дифференциального уравнения определяется числом независимых реактивных элементов в рассматриваемой ветви; общее количество линейно независимых уравнений в системе равно количеству неизвестных токов в ветвях);
- решение каждого из уравнений ищется в виде суммы принужденной (обусловленной действием источников составляющей тока или напряжения в установившемся режиме) и свободной (переходной) составляющих (в выражении переходной составляющей всегда присутствуют константы интегрирования, число которых соответствует порядку дифференциального уравнения);

- система дифференциальных уравнений алгебраизуется (заменяется системой алгебраических уравнений путем применения оператора дифференцирования; этот пункт можно опустить и перейти к следующему);
- составляется характеристическое уравнение системы;

(Характеристическое уравнение проще всего можно получить методом входного сопротивления из равенства:

$$Z_{\text{вх}}(p) = 0\,,$$

где p – оператор дифференцирования.

- сначала составляется схема цепи после коммутации;
- в полученной схеме все идеальные источники ЭДС заменяем короткозамкнутым участком, источники тока – обрывом цепи (участком с бесконечно большим сопротивлением), резистивные, индуктивные и емкостные элементы – сопротивлениями, равными, соответственно, R, pL и $1/pC$;

- если в составленной схеме нет короткозамкнутых ветвей, то размыкается любая ветвь, определяется входное сопротивление со стороны разомкнутой ветви и подставляется в уравнение (21.1) (для упрощения алгебраических преобразований целесообразно размыкать ветвь с наибольшим числом элементов, отдавая при этом предпочтение ветви, содержащей наибольшее количество емкостных элементов; если в схеме цепи после коммутации присутствует короткозамкнутая ветвь, то размыкаем ту ветвь, в которой рассчитываем переходный ток));

- полученное характеристическое уравнение решается относительно оператора дифференцирования – находятся корни (количество корней характеристического уравнения равно порядку системы; если система состоит всего лишь из одного уравнения первого порядка, то свободная составляющая решения соответствующего однородного уравнения («без правой части») применительно к току равна:

$$i'' = A\,e^{pt}\,,$$

где A – постоянная интегрирования,

p – корень соответствующего характеристического уравнения первого порядка).

(В случае квадратного характеристического уравнения, т.е. если рассматривается система уравнений второго порядка, возможны три варианта типа корней характеристического уравнения:

– корни p_1 и p_2 разные (отличные друг от друга) и вещественные –

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\,,$$

$$i'' = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}\,;$$

– корни p_1 и p_2 вещественны и кратны друг другу –

$$p_1 = p_2 = p = -\alpha\,,$$
$$i'' = (A_1 + A_2 t)e^{pt}\;;$$

– корни p_1 и p_2 комплексно-сопряженные –

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega''\,,$$
$$i'' = (A_1 \cos\omega'' t + A_2 \sin\omega'' t)\, e^{-\alpha t} = B \sin(\omega'' t + \theta)\; e^{-\alpha t}\,,$$

где $B = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\,,\qquad \theta = \mathrm{arctg}\,(A_1/A_2))$

- на основании условий, описывающих состояние системы в послекоммутационный период (в установившемся режиме) находятся принужденные составляющие полных решений дифференциальных уравнений системы;
- на основании начальных условий, законов коммутации, а также используя найденные выше принужденные составляющие полных решений дифференциальных уравнений системы, находятся постоянные интегрирования уравнений системы;
- найденные константы интегрирования подставляются в выражения для искомых токов или напряжений переходных режимов в ветвях рассчитываемой цепи

С целью упростить вычисления можно порекомендовать в качестве первоочередных искомых функций выбирать токи в ветвях с индуктивными элементами и напряжения на емкостных элементах

Расчет переходного процесса в разветвленной линейной электрической цепи с одним реактивным элементом

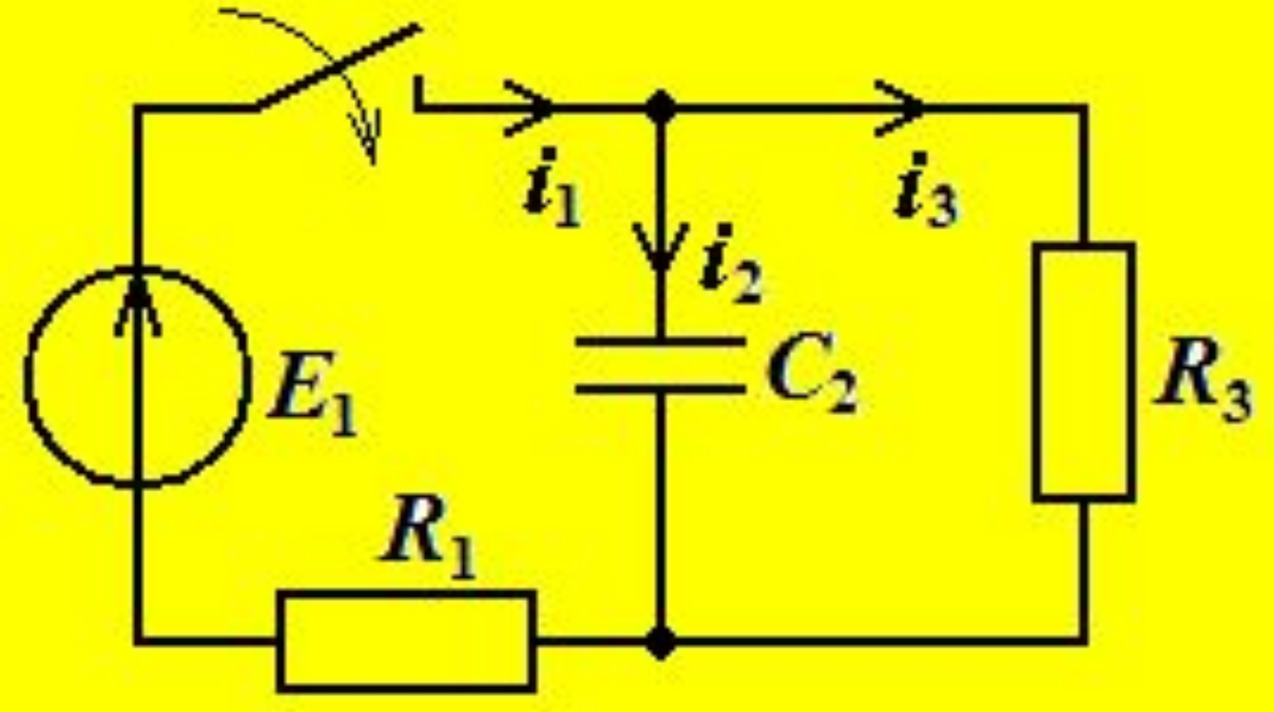

Рисунок 1 – К расчету переходного процесса в разветвленной линейной электрической цепи с одним реактивным элементом (конденсатором) при замыкании на источник постоянной ЭДС

$E_1 = 10$ В $\qquad R_1 = R_3 = 10$ Ом $\qquad C_2 = 200$ мкФ

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0\,, \\ u_{C_2} + R_1 i_1 = E_1\,, \\ u_{C_2} - R_3 i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{pC_2} + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 0$$

$$p = -\frac{1}{C_2} \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_1 \cdot R_3} = -1000\ \text{c}^{-1}$$

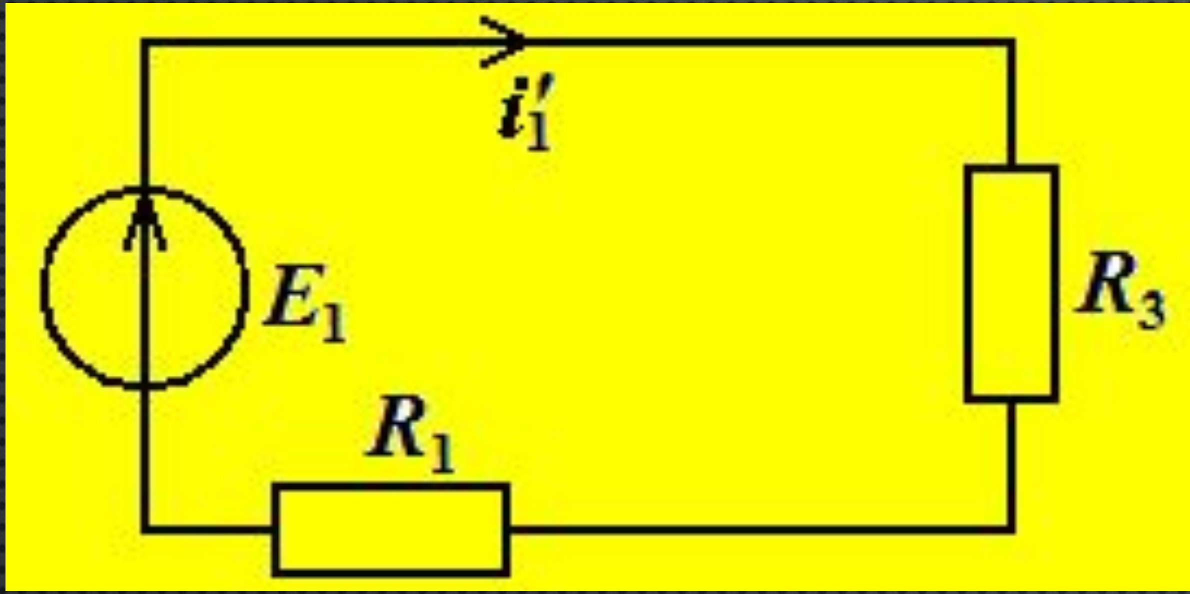

Рисунок 2 – К нахождению принужденной составляющей тока, протекающего через источник ЭДС в послекоммутационный период

$$i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t)$$

$$i_1''(t) = A\,e^{pt} = A\,e^{-1000t}\ \mathrm{A}$$

$$i_1'(t) = \mathrm{const} = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = 0{,}5\ \mathrm{A}$$

$$i_1(t) = 0{,}5 + A\,e^{-1000t}\ \mathrm{A}$$

$$i_1(0) = 0{,}5 + A\,e^{-1000\cdot 0} = 0$$

$$0{,}5 + A = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A = -\,0{,}5\ \mathrm{A}$$

$$i_1(t) = 0{,}5\,(1 - e^{-1000t})\ \mathrm{A}$$

$$u_{C_2}(t) = E_1 - R_1 \cdot i_1(t) = 10 - 10 \cdot 0{,}5\,(1 - e^{-1000t})\ \mathrm{B}$$

$$u_{C_2}(t) = 5\,(1 + e^{-1000t})\ \mathrm{B}$$

$$i_2(t) = C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot (-\,1000) \cdot e^{-1000t}\ \mathrm{A}$$

$$i_2(t) = -1 \cdot e^{-1000t}\ \mathrm{A}$$

$$u_{R_3}(t) = u_{C_2}(t) = 5\ (1 + e^{-1000t})\ \mathrm{B}$$

$$i_3(t) = \frac{u_{R_3}(t)}{R_3} = 0{,}5\ (1 + e^{-1000t})\ \mathrm{A}$$

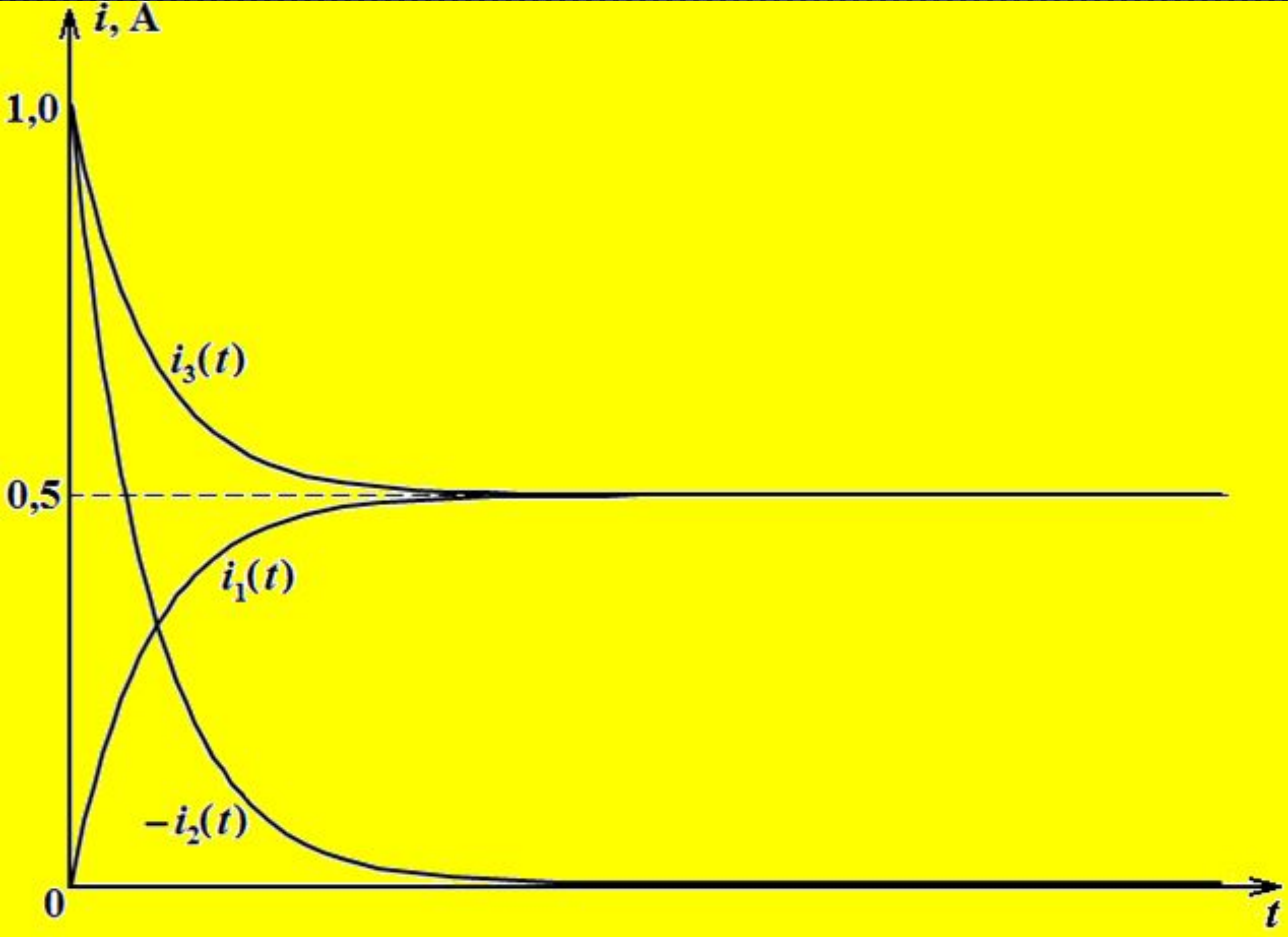

Рисунок 3 – Графики временных зависимостей токов в разветвленной электрической цепи при замыкании ее на источник постоянной ЭДС

Расчет переходного процесса в разветвленной линейной электрической цепи с двумя реактивными элементами

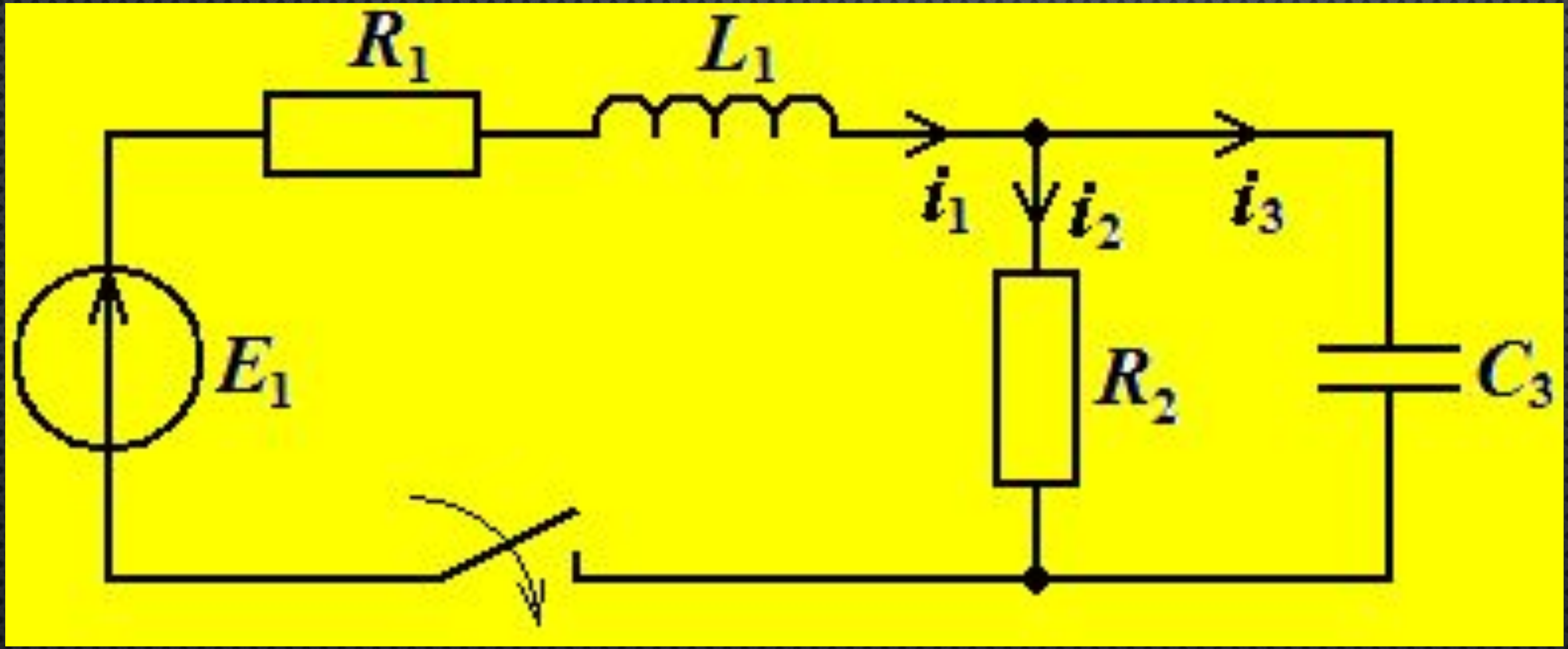

Рисунок 4 – К расчету переходного процесса в разветвленной линейной электрической цепи с двумя реактивными элементами при замыкании на источник постоянной ЭДС

$R_1 = 10$ Ом

$R_2 = 20$ Ом

$L_1 = 10$ мГн

$C_3 = 500$ мкФ

$E_1 = 60$ В

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0\,, \\ L_1 \dfrac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + R_2 i_2 = E_1\,, \\ R_2 i_2 - \dfrac{1}{C_3}\displaystyle\int i_3\,dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1'' - i_2'' - i_3'' = 0\,, \\ (L_1 p + R_1) i_1'' + R_2 i_2'' = 0\,, \\ R_2 i_2'' - \dfrac{1}{C_3 p} i_3'' = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ L_1 p + R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & \dfrac{1}{C_3 p} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{R_2}{C_3 p} + R_2(L_1 p + R_1) + \frac{L_1 p + R_1}{C_3 p} = 0$$

$$R_2 C_3 L_1 p^2 + (R_1 R_2 C_3 + L_1)p + (R_1 + R_2) = 0$$

$$p^2 + \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{1}{R_2 C_3}\right)p + \frac{R_1 + R_2}{R_2 C_3 L_1} = 0$$

$$Z_{\text{вх}}(p) = R_1 + L_1 p + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + C_3 p}$$

$$R_1 + L_1 p + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + C_3 p} = 0$$

$$p^2 + \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{1}{R_2 C_3}\right) p + \frac{R_1 + R_2}{R_2 C_3 L_1} = 0$$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{1}{R_2 C_3}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{1}{R_2 C_3}\right)^2 - \frac{R_1 + R_2}{R_2 C_3 L_1}}$$

$$p_1 = -\,500\ \mathrm{c}^{-1}, \qquad p_2 = -\,600\ \mathrm{c}^{-1}$$

$$i_1'' = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A_1 e^{-\,500t} + A_2 e^{-600t}\ \mathrm{A}$$

$$i_1' = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = 2\ \mathrm{A}$$

$$i_1 = i_1' + i_1'' = 2 + A_1 e^{-\,500t} + A_2 e^{-600t}\ \mathrm{A}$$

$$\begin{cases} i_1(0) - i_2(0) - i_3(0) = 0\,, \\ L_1 \left.\dfrac{di_1}{dt}\right|_{t=0} + R_1 i_1(0) + R_2 i_2(0) = E_1\,, \\ R_2 i_2(0) - u_{C_3}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E_1}{L_1}$$

$$-\,500 A_1 e^{-\,500\cdot 0} - 600 A_2 e^{-600\cdot 0} = -\,500 A_1 - 600 A_2 = 6000$$

$$\begin{cases} 2 + A_1 + A_2 = 0\,, \\ -\,500A_1 - 600A_2 = 6000 \end{cases}$$

$$A_1 = 48\ \mathrm{A}\,, \qquad\qquad A_2 = -50\ \mathrm{A}$$

$$i_1(t) = 2 + 48\,e^{-\,500t} - 50\,e^{-600t}\ \mathrm{A}$$

$$u''_{C_3} = A_3 e^{p_1 t} + A_4 e^{p_2 t} = A_3 e^{-500t} + A_4 e^{-600t} \text{ В}$$

$$u'_{C_3} = u'_{R_2} = E_1 - R_1 i'_1 = E_1 - \frac{R_1 \cdot E_1}{R_1 + R_2}$$

$$u'_{C_3} = \frac{R_2 \cdot E_1}{R_1 + R_2} = 40 \text{ В}$$

$$u_{C_3} = u'_{C_3} + u''_{C_3} = 40 + A_3 e^{-500t} + A_4 e^{-600t} \text{ В}$$

$$\begin{cases} u_{C_3}(0) = 0\,, \\ C_3 \dfrac{du_{C_3}}{dt}\bigg|_{t=0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 + A_3 e^{-500\cdot 0} + A_4 e^{-600\cdot 0} = 0\,, \\ -500 A_3 e^{-500\cdot 0} - 600 A_4 e^{-600\cdot 0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40 + A_3 + A_4 = 0\,, \\ -500 A_3 - 600 A_4 = 0 \end{cases}$$

$$A_3 = -240\ \text{В}\,, \qquad A_4 = 200\ \text{В}$$

$$u_{C_3}(t) = 40 - 240\, e^{-500t} + 200\, e^{-600t}\ \text{В}$$

$$u_{L_1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = -\,240e^{-\,500t} + 300\,e^{-600t}\ \text{В}$$

$$u_{R_1}(t) = R_1 \cdot i_1(t) = 20 + 480\,e^{-\,500t} - 500\,e^{-600t}\ \text{В}$$

$$u_{R_2}(t) = u_{C_3}(t) = 40 - 240\,e^{-\,500t} + 200\,e^{-600t}\ \text{В}$$

$$i_2(t) = \frac{u_{R_2}(t)}{R_2} = 2 - 12\,e^{-\,500t} + 10\,e^{-600t}\ \text{А}$$

$$i_3(t) = C_3 \frac{du_{C_3}(t)}{dt} = 60\,e^{-\,500t} - 60\,e^{-600t}\ \text{А}$$

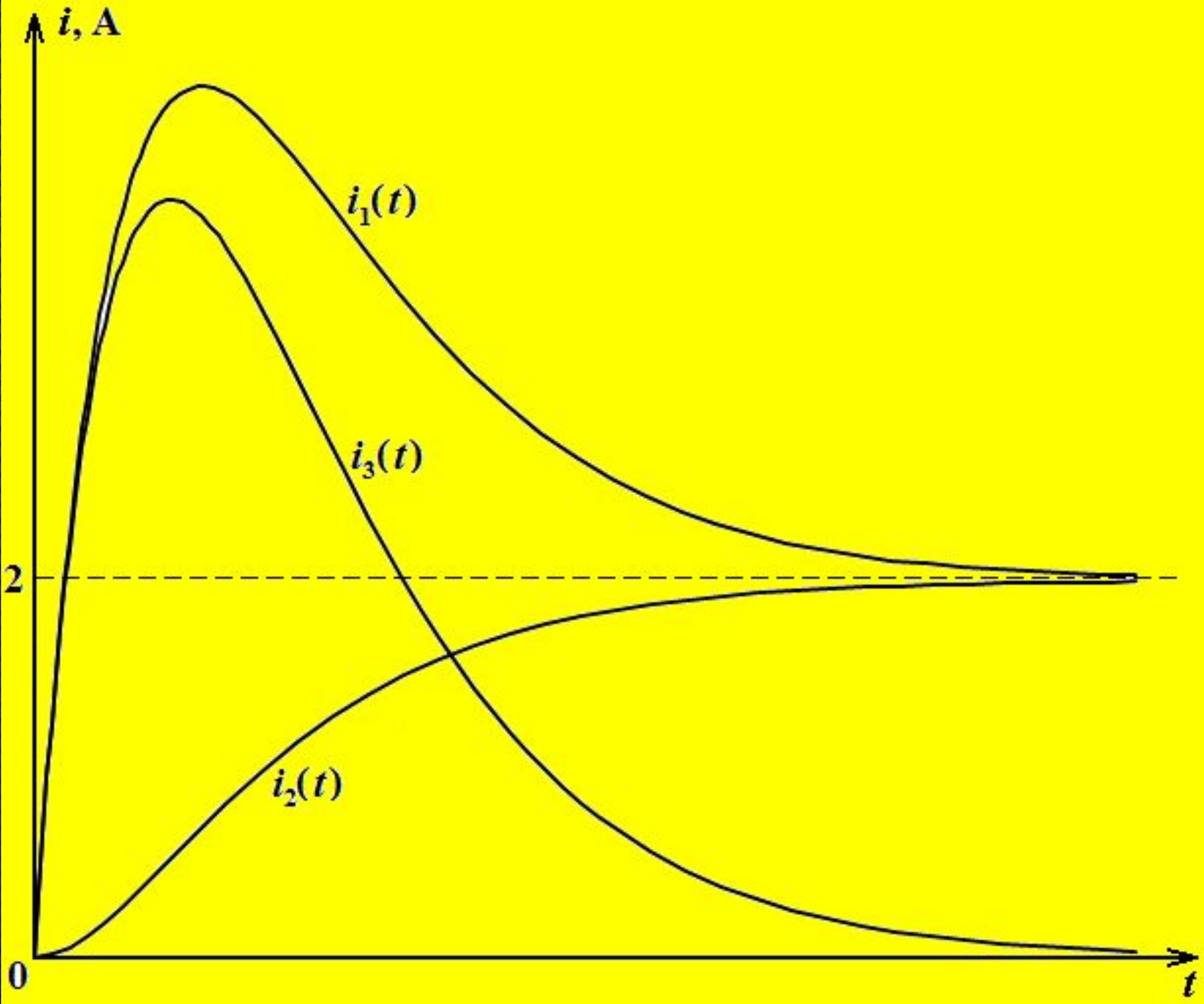

Рисунок 5 – Графики временных зависимостей токов в разветвленной электрической цепи при замыкании ее на источник постоянной ЭДС