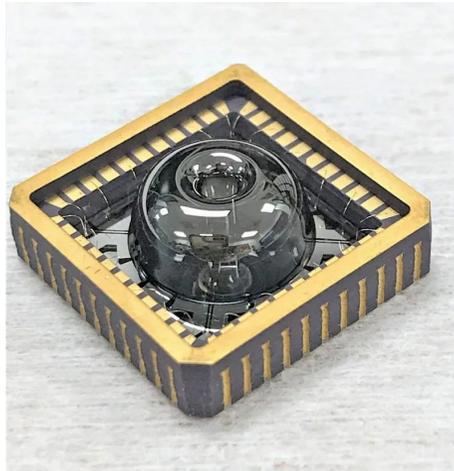




Опалихина Ольга Викторовна,
к.т.н., доцент,
sokosapsa@mail.ru



ГУАП

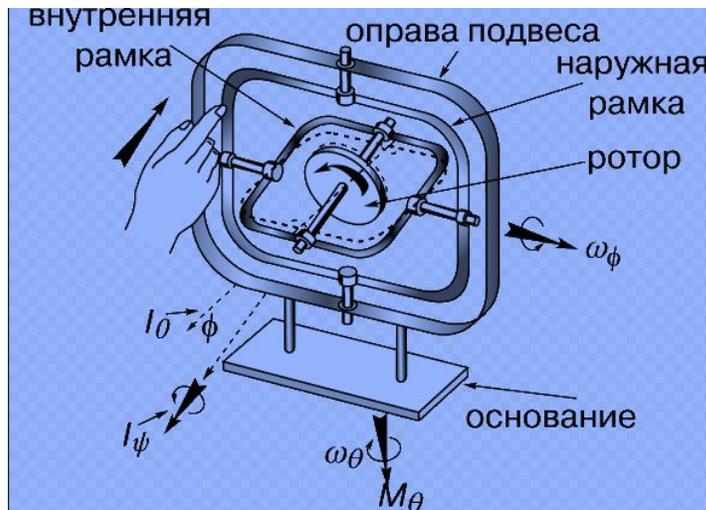


Теория гироскопов. Теорема

Резаля. Закон прецессии оси

гироскопа

Гироскоп – твердое симметричное тело, которое может вращаться вокруг оси симметрии с угловой скоростью, значительно превышающей скорость вращения самой оси симметрии. Гироскоп является основной частью таких гироскопических приборов летательных аппаратов, как гироскоп направления, гировертикаль, гироскоп компас, гироскоп тахометр, гироскоп стабилизатор. На летательных аппаратах с помощью гироскопических приборов определяют направление меридиана и истинной вертикали, измеряют угловые скорости и ускорения. Гироскопические компасы установлены на кораблях. Кинематическая схема трехстепенного гироскопа в кардановом подвесе показана на рис. 1.



Основной конструктивный элемент гироскопа – ротор. Для обеспечения свободы вращения ротора вокруг неподвижной точки применяют карданов подвес, состоящий из двух рамок – внутренней и наружной. Ротор гироскопа с помощью осей карданова подвеса устанавливается в рамках. Ротор может совершать три независимых друг от друга вращения вокруг осей, пересекающихся в одной точке – центре ротора, которая при движении гироскопа остается неподвижной. Свободу вращения относительно трех осей x , y и z ротору обеспечивает карданов подвес. Ротор гироскопа вращается с большой угловой скоростью относительно внутренней рамки, которая может поворачиваться относительно внешней рамки, а

Рис. 1. Кинематическая схема трехстепенного гироскопа

В *микромеханических гироскопах* (ММГ) применяются кремниевые технологии. Колебания чувствительных масс в каждой из схем возбуждаются электростатическим *гребенчатым* виброприводом. В конструкциях приборов реализуется компенсационный (с обратной связью) режим работы. Резонансная кривая роторного ММГ в окрестности частоты собственных колебаний (~ 5 кГц) приведена на рис. 2 б). В этой схеме амплитуда вынужденных угловых колебаний ротора при резонансной настройке составляет $\sim 3^\circ$. Следует отметить острый характер резонанса, объясняющийся высокой добротностью кремниевого осциллятора. Указанное обстоятельство требует применения точной резонансной настройки, заключающейся в обеспечении и поддержании в процессе работы строгого совпадения частоты вибровозбуждения с собственной частотой осциллятора. В этом состоит одна из основных проблем, возникающих при разработке ММГ. В конструкциях разрабатываемых ММГ предусмотрены контуры подстройки частот. Добротность определяет ширину резонанса. Также ММГ могут работать в режиме прямого преобразования *колебаний* инерционной массы на упругом подвесе (резонатор) при воздействии переносной угловой скорости *преобразуется в энергию вторичных колебаний*, которые содержат информацию об измеряемой угловой скорости. Это преобразование осуществляется вследствие влияния на резонатор сил (или моментов) инерции Кориолиса при вращении резонатора с переносной угловой скоростью, вектор которой перпендикулярен вектору мгновенной скорости инерционной массы резонатора.

При изготовлении ММГ применяют высокодобротные материалы, такие как кремний, кварц и др. Для возбуждения первичных колебаний, создания сил и моментов компенсации, измерения параметров вторичных колебаний применяют электростатические, магнитоэлектрические, электромагнитные, а с резонаторами из пьезокерамики также пьезоэлектрические



Рис. 2. Резонансные кривые роторного ММГ

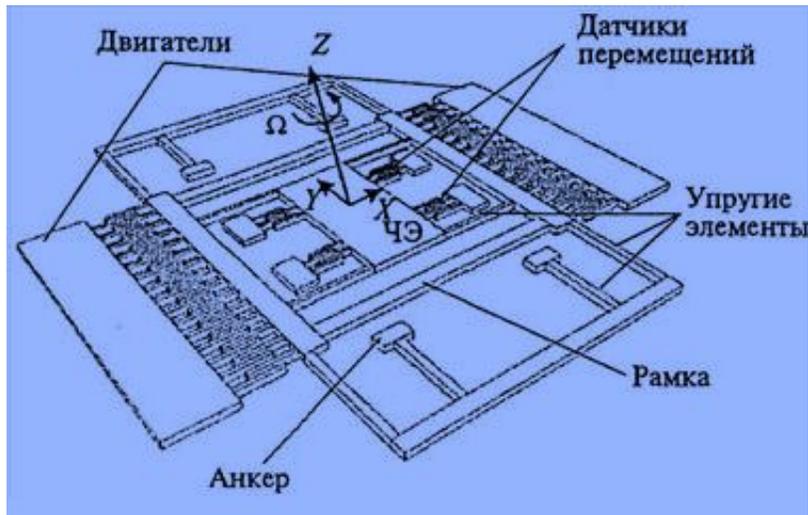


Рис. 3. Структурная схема ММГ

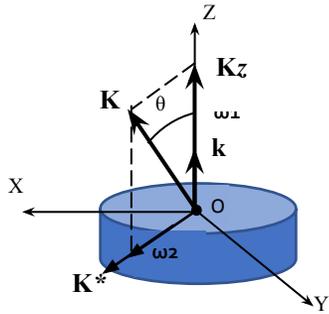
Структурная схема ММГ показана на рис. 3. Чувствительный элемент (ЧЭ) относительно анкеров, скрепленных с подложкой, смонтирован на упругих элементах подвеса, которые позволяют ему перемещаться вдоль оси y относительно рамки и вместе с рамкой - вдоль оси x . В режиме движения электростатические гребенчатые двигатели обеспечивают перемещение ЧЭ вместе с рамкой и роторными элементами двигателей и датчиков перемещений вдоль оси x . При появлении угловой скорости вокруг оси z возникающие силы Кориолиса вызывают вторичные колебания ЧЭ вдоль оси y .

Основное допущение элементарной теории гироскопа

Пусть гироскоп совершает быстрое вращение вокруг своей оси с угловой скоростью ω_1 , а эта ось вращается с угловой скоростью ω_2 (рис. 4). Абсолютная угловая скорость гироскопа ω равна геометрической сумме угловых скоростей: $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Совместим ось z с осью симметрии гироскопа. Система координат $Oxyz$ – главные оси инерции, поэтому проекции момента количества движения K на координатные оси равны

$$K_x = I_x \cdot \omega_{2x}, K_y = I_y \cdot \omega_{2y}, K_z = I_z \cdot (\omega_1 + \omega_{2z}),$$

где I_x, I_y, I_z - моменты инерции гироскопа относительно соответствующих осей, причем $I_x = I_y$, поскольку ось z – ось симметрии.



Можно обозначить *три непараллельных направления*: направление угловой скорости собственного вращения ω_1 , направление абсолютной угловой скорости ω и направление вектора момента количества движения \mathbf{K} (кинетического момента). Угол θ между вектором \mathbf{K} и осью z равен

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{K^*}{K_z} = \frac{I_x \cdot \omega_2}{I_z \cdot \omega_1}.$$

Рис. 4. Три непараллельных направления

Обычно для гироскопов $I_x / I_z \approx 0,6$. Принимая, что $\omega_1 \geq 3000$ рад/с, $\omega_2 \leq 0,01$ рад/с, получим

$$\operatorname{tg} \theta \leq \frac{0,6 \cdot 0,01}{3000} = 0,000002. \text{ — следовательно — } \leq \text{ "}$$

Поскольку данная величина пренебрежимо мала, можно *допустить*, что вектор кинетического момента \mathbf{K} совпадает с осью динамической симметрии гироскопа

$$\mathbf{K} = I_z \cdot \boldsymbol{\omega}_1 = I_z \cdot \omega_1 \cdot \mathbf{k}. \tag{1}$$

Построенная на допущении (1) теория называется элементарной или прецессионной теорией гироскопа.

Теорема Резаля

Согласно теореме об изменении момента количества движения материальной системы

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}^e, \tag{2}$$

где M^e – главный момент всех внешних сил, приложенных к системе, относительно центра (неподвижной точки O).

Производная по времени от вектора K представляет собой скорость u конца этого вектора. Поэтому равенство (2) можно записать как

$$u = M^e. \quad (3)$$

Формула (3) – теорема Резаля: *скорость конца вектора момента количества движения (кинетического момента) равна главному моменту всех внешних сил.*

Основные свойства свободного (астатического гироскопа)

Гироскоп называется астатическим, если центр масс гироскопа совпадает с точкой пересечения осей карданова подвеса. Все свойства гироскопа вытекают из законов Ньютона. В рамках элементарной теории гироскопа справедливо соотношение

$$I_z \cdot \omega_1 \cdot k = \text{const}. \quad (4)$$

Из соотношения (4) следует, что вектор k , определяющий направление оси гироскопа, сохраняет в инерциальной системе отсчета неизменное направление. *Основными свойствами трехстепенного гироскопа являются способность сохранять неизменным положение оси вращения ротора гироскопа в инерциальной системе координат, невосприимчивость к ударным воздействиям и способность совершать прецессионное движение.*

Если ось быстровращающегося гироскопа направить на определенную точку инерциального пространства, то при угловых движениях основания гироскопа в разных плоскостях (в том числе и при движении основания вместе с вращением Земли) ось ротора сохраняет заданное ей направление. При ударе по какой-либо раме гироскопа возникают быстрозатухающие колебания оси ротора гироскопа с малой амплитудой. Если к

внутренней раме гироскопа приложить усилие, создавая момент внешних сил относительно оси внутренней рамы, то возникает вращение гироскопа вокруг оси наружной рамы. При этом внутренняя рама остается неподвижной. Если, наоборот, воздействовать силой на наружную раму гироскопа, создавая момент внешних сил относительно ее оси, происходит вращение гироскопа относительно оси внутренней рамы, а внешняя рама остается неподвижной. *Гироскоп под действием внешних сил поворачивается не по направлению силы, а в плоскости, перпендикулярной направлению этой силы. Такое движение гироскопа под действием внешних сил называется прецессионным.*

Скорость \mathbf{u} конца вектора кинетического момента \mathbf{K} определяется как

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{K}.$$

Используя выражения (3) и (1), получим

$$\mathbf{M}^e = \boldsymbol{\omega}_2 \times I_z \boldsymbol{\omega}_1, \quad (5)$$

$$\omega_2 = \frac{M^e}{I_z \omega_1 \sin \theta}, \quad (6)$$

где θ – угол между осью гироскопа z и вектором угловой скорости прецессии $\boldsymbol{\omega}_2$ (рис. 4). На рис. 4 он равен 90° , но может быть и отличным от прямого.

Скорость \mathbf{u} конца вектора кинетического момента \mathbf{K} прецессирующего гироскопа, направленного по оси симметрии гироскопа, равна по модулю и совпадает по направлению с главным моментом относительно точки подвеса внешних сил. Угловая скорость прецессии, определяемая равенствами (5) и (6), пропорциональна главному моменту внешних сил \mathbf{M}^e и обратно пропорциональна кинетическому моменту $I_z \boldsymbol{\omega}_1$ гироскопа и синусу угла между осью гироскопа z и вектором угловой скорости прецессии $\boldsymbol{\omega}_2$. *Это свойство гироскопа называют законом прецессии оси гироскопа.*

Применительно к гироскопу в кардановом подвесе это свойство можно сформулировать так: внешний момент, действующий вокруг оси вращения какой-либо из рамок карданова подвеса, заставляет прецессировать ротор гироскопа вокруг оси вращения другой рамки карданова подвеса со скоростью ω_2 . Гироскоп прецессирует так, чтобы совместить вектор кинетического момента \mathbf{K} с вектором внешнего момента \mathbf{M}^e по кратчайшему расстоянию. Если угол $\theta=0$, то вектор угловой скорости собственного вращения ротора ω_1 , а следовательно, и вектор кинетического момента \mathbf{K} совместится с осью вращения наружной рамки. В этом случае момент, действующий относительно оси наружной рамки, будет направлен по оси собственного вращения ротора и, следовательно, не будет вызывать прецессию. Случай, когда ось собственного вращения совпадает с осью наружной рамки, называют *совмещением рамок*. При этом гироскоп теряет одну степень свободы и все свои свойства. Поэтому в конструкции giroприборов предусматривают элементы, исключающие возможность совмещения рамок.

Существенное влияние на поведение гироскопа оказывает трение в осях карданова подвеса. При наличии $M_{тр}$ в осях наружной рамки на ротор гироскопа будет действовать момент $M^e - M_{тр}$ и скорость прецессии будет равна

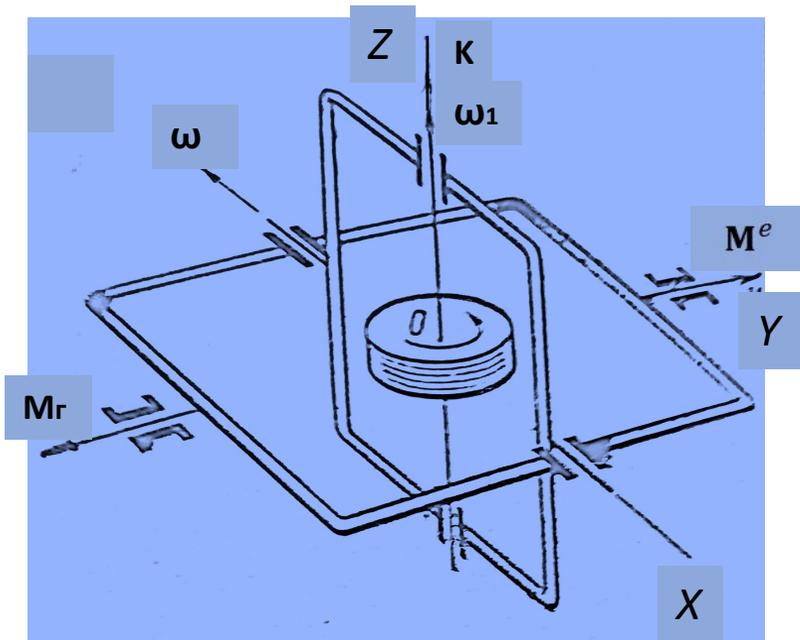
$$\omega_2 = \frac{M^e - M_{тр}}{I_z \omega_1 \sin \theta}.$$

Прецессия внутренней рамки со скоростью ω_2 определит момент трения вокруг оси внутренней рамки, что в свою очередь вызовет прецессионное движение относительно оси наружной рамки.

Если на гироскоп не действуют внешние моменты, то ось ротора гироскопа сохраняет неизменным свое положение относительно инерциальной системы координат. Инерциальными системами координат являются системы, связанные с Солнцем и звездами. Система координат, связанная с Землей, не является инерциальной из-за вращения Земли. Следовательно, идеальный гироскоп, установленный на Земле, даже при отсутствии внешних моментов, не будет неподвижен относительно земной системы координат. Это

использовал Фуко для экспериментального доказательства вращения Земли. Оно полностью применимо лишь к идеальному гироскопу, так как из-за дисбаланса (несовпадения центра масс гироскопа с точкой пересечения осей карданова подвеса) и моментов трения реальный гироскоп всегда отклоняется от первоначального положения в инерциальном пространстве. Такое отклонение называется уходом или дрейфом гироскопа.

Следует отметить еще одно свойство гироскопа: *переносное вращение гироскопа вызывает появление гироскопического момента \mathbf{M}_g , который является проявлением сил инерции. Гироскопический момент всегда направлен так, что стремится совместить вектор угловой скорости собственного вращения ротора ω_1 с вектором угловой скорости переносного вращения ω* (рис. 5). Гироскопический момент \mathbf{M}_g является проявлением кориолисовых сил инерции, вызванных вращением ротора относительно двух взаимно перпендикулярных осей: $\mathbf{M}_g = \mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}$ (рис. 5). Он равен по модулю и противоположно направлен вектору внешнего момента \mathbf{M}^e : $\mathbf{M}_g = -\mathbf{M}^e$. Поэтому суммарный момент, действующий на рамку, равен нулю. Модуль гироскопического момента:



где θ – угол между осью симметрии гироскопа и осью прецессии.

$$M_g = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta, \quad (7)$$

Тело, на которое действует гироскопический момент, может под действием этого момента совершать движение. При сообщении оси гироскопа принудительной прецессии ось гироскопа стремится кратчайшим путем установиться параллельно оси принудительной прецессии таким образом, чтобы направления векторов ω_1 и ω_2 совпали (правило Грюэ-Жуковского).

Рис. 5. Кинематическая схема трехстепенного гироскопа

Для лучшего проявления полезных свойств гироскопа стремятся получить как можно большее значение кинетического момента за счет специальной конструкции гироскопа и использования больших угловых скоростей собственного вращения ротора. В авиационных приборах частота вращения ротора достигает 24000 об/мин.

Задача. Винт корабля вращается с угловой скоростью $\omega_1=100 \text{ с}^{-1}$. Момент инерции винта относительно его оси вращения равен $I_z=1200 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Определить модуль гироскопического момента, который действует на корабль, если корабль движется по дуге окружности радиуса $R=500 \text{ м}$ со скоростью $V=10 \text{ м/с}$.

Решение. Рассчитаем величину кинетического момента винта K : $K=I_z\cdot\omega_1=1200\cdot 100 =120000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$. Угловая скорость корпуса судна ω_2 : $\omega_2 = \frac{V}{R} = \frac{10}{500} = \frac{1}{50} \text{ с}^{-1}$. Для нахождения гироскопического момента M_g используем формулу (7), учитывая, что $\theta=90^\circ$:

$$M_g = K \cdot \omega_2 \sin\theta = I_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \sin\theta = \frac{120000 \cdot 1}{50} = 2400 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

