

# **Понятия и представления при изучении математики.**

**Математические понятия и их виды.**

**Определение математических понятий.**

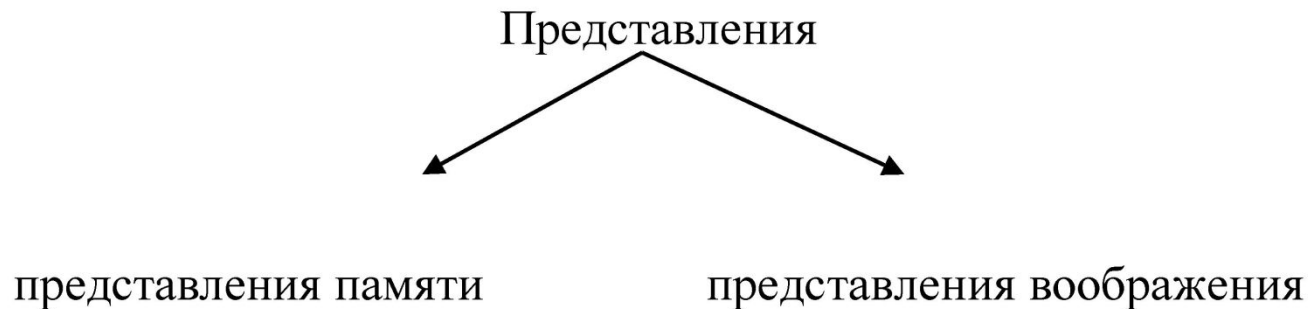
**Требования к определению понятий.**

## Понятия и представления при усвоении математики.

Понятия являются одной из главных составляющих содержания любого предмета.

Формирование понятия – сложный психологический процесс, начинающийся с образования простейших форм чувственного познания, ощущений, и протекающий часто по следующей схеме: ощущение – восприятие - представление – понятие.

Представлением называют вторичный образ предмета или явления. В зависимости от того, как возникает этот образ можно выделить 2 группы представлений:



Представления памяти возникают у человека в основном благодаря ощущениям и восприятию. Но в отличие от образов ощущений и восприятий, т.е. непосредственных результатов этих процессов, образ представлений может быть отсрочен во времени и пространстве от ощущения и восприятия, он как бы извлекается человеком из памяти. Ведь для того чтобы что-то представить, нам не надо непосредственно видеть какой-то предмет.

Представления воображения создаются при помощи воссоздающего воображения. Такие представления возникают у человека в результате преобразования в его памяти имеющихся образов. Образ представлений в этом случае создается при помощи словесной инструкции или демонстрации каких-то действий и образцов.

Исходя из природы появления представлений, можно определить их основные характеристики:

1. *Субъективность представлений.*
2. *Обобщенность.*
3. *Яркость.*
4. *Четкость.*
5. *Полнота.*
6. *Детализация.*

Переход от представлений к понятиям совершается при помощи мыслительных операций, прежде всего, обобщения и абстрагирования.

Понятие – это форма мышления о целостной совокупности существенных и несущественных свойств объектов реального мира, в частности, и математических объектов.

Сравнивая понятия и представления, можно выделить следующие их отличия.

Представление	Понятие
Вторичный образ предмета	Мысль о предмете, выраженная в словах
Обобщает как существенные, так и несущественные свойства предметов и явлений	Обобщает только существенные свойства предметов
Субъективно, т.к. складывается в индивидуальном опыте человека	Складывается в теоретической и практической деятельности многих поколений
Одно и то же представление у разных людей различно по точности, яркости, полноте и т.п.	У больших групп людей понятия одинаковы
Не все явления и процессы можно представить	Мыслить в понятиях можно о любых процессах и явлениях.

Математические объекты – это результат выделения из предметов и явлений окружающего мира особых количественных и пространственных свойств и отношений и абстрагирования от всех других свойств. Таким образом, математические объекты реально не существуют. Все они созданы человеческим умом в процессе исторического развития и существуют лишь в мышлении человека и в тех знаках и символах, которые образуют математический язык. Поэтому говорят, что математические объекты – это идеальные объекты, которые описывают реальные объекты.

Все математические объекты обладают какими-то признаками. Например, квадрат обладает следующими признаками:

- имеет четыре стороны;
- все стороны равны;
- имеет четыре внутренних угла;
- все углы прямые и т.д.

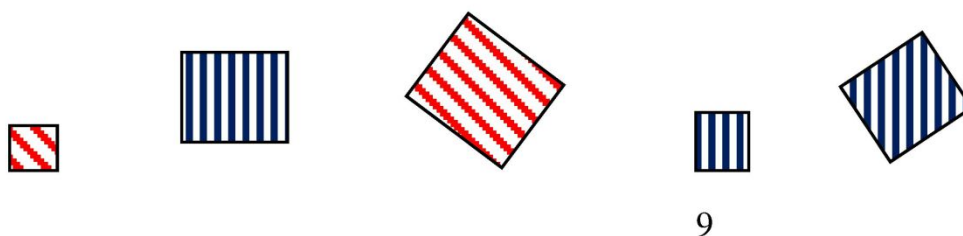
Признаки – это все то, в чем объект сходен с другими объектами или отличен от них; все то, благодаря чему объект можно узнать определить, описать.

Каждый объект обладает признаками существенными и несущественными. Существенный признак – такой, который необходимо принадлежит объекту при всех условиях, без которого данный объект существовать не может. Несущественный признак – это признак, отсутствие которого не влияет на существование объекта. Несущественные признаки могут изменяться, при этом объект остается тем же самым. Но если изменить существенные признаки, то это будет уже другой объект. Например, признак «иметь все равные стороны» для квадрата является существенным, а длина стороны – это несущественный признак для указанного объекта.

Необходимо отметить, что при решении конкретных задач несущественные признаки объекта могут стать существенными для решения данной задачи.

Признаки – это все то, в чем объект сходен с другими объектами или отличен от них; все то, благодаря чему объект можно узнать определить, описать.

Например: - разбить квадраты на две группы:



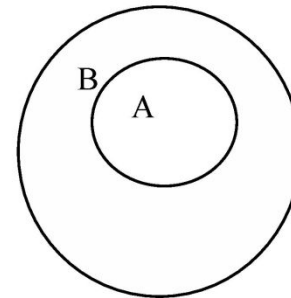
При решении этой задачи ученики будут ориентироваться на такие признаки, как цвет, размер, расположение, которые для понятия «квадрат» являются несущественными.

Чтобы понять, что представляет собой данный математический объект, достаточно знать его существенные признаки. В этом случае говорят, что имеется *понятие* об этом объекте. Таким образом, *понятие* – это целостная совокупность суждений о существенных признаках соответствующего объекта.



Любое понятие, кроме объема, имеет *содержание*. Содержание понятия – это множество всех существенных признаков объекта, отраженных в этом понятии.

Подход к объему понятия как к множеству дает возможность наглядно представлять отношения между понятиями. Обозначим объем понятия  $a$  через  $A$ , объем понятия  $b$  –  $B$  и т.д. Пусть понятия  $a$  и  $b$  таковы, что объем понятия  $a$  является собственным подмножеством объема понятия  $b$ , т.е.  $A \subset B$ . Т.к.  $A$  и  $B$  – это множества, то отношение между ними можно изобразить на кругах Эйлера:



В этом случае говорят, что:

- понятие  $b$  является *родовым* для понятия  $a$ , понятие  $a$  – *видовым* по отношению к понятию  $b$ ;
- понятие  $b$  *шире* понятия  $a$ , понятие  $a$  *уже* понятия  $b$ ;
- понятие  $b$  *обобщение* понятия  $a$ , понятие  $a$  – *частный случай* понятия  $b$ .

Например, понятие «многоугольник» является родовым по отношению к понятию «треугольник», а понятие «треугольник» - видовым по отношению к понятию «многоугольник». Об этих же понятиях можно сказать, что понятие «многоугольник» шире, чем понятие «треугольник», а понятие «треугольник» уже понятия «многоугольник», либо понятие «многоугольник» есть обобщение понятия «треугольник», а понятие «треугольник» - частный случай понятия «многоугольник».

Существуют понятия, которые не находятся в родовидовых отношениях. Такими, например, являются понятия «треугольник» и «прямоугольник», т.к. их объемы не пересекаются.

Понятия рода и вида относительно: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию, видовым по отношению к другому. Например, понятие «прямоугольник» - родовое по отношению к понятию «квадрат» и видовое по отношению к понятию «четыреугольник».

## Математические понятия и их виды

Понятия выделяют и классифицируют по различным основаниям.

1. Понятия делятся на **единичные** и **общие** в зависимости от числа объектов в их объеме.

Понятие называется единичным, если в его объем входит только один объект. Например, «наибольшее однозначное число» - это единичное понятие. Если объем понятия содержит более одного объекта, то такое понятие называют общим. Например, понятие «однозначное число» является общим. Объем общего понятия может представлять собой как конечное, так и бесконечное множество.

2. Выделяют **конкретные** и **абстрактные** понятия. Конкретные понятия характеризуются тем, что в них отображаются признаки объекта или группы объектов. Объекты, входящие в объем конкретных понятий, можно нарисовать, изобразить. Например, понятия «отрезок», «четное число» и т.д. являются конкретными понятиями.

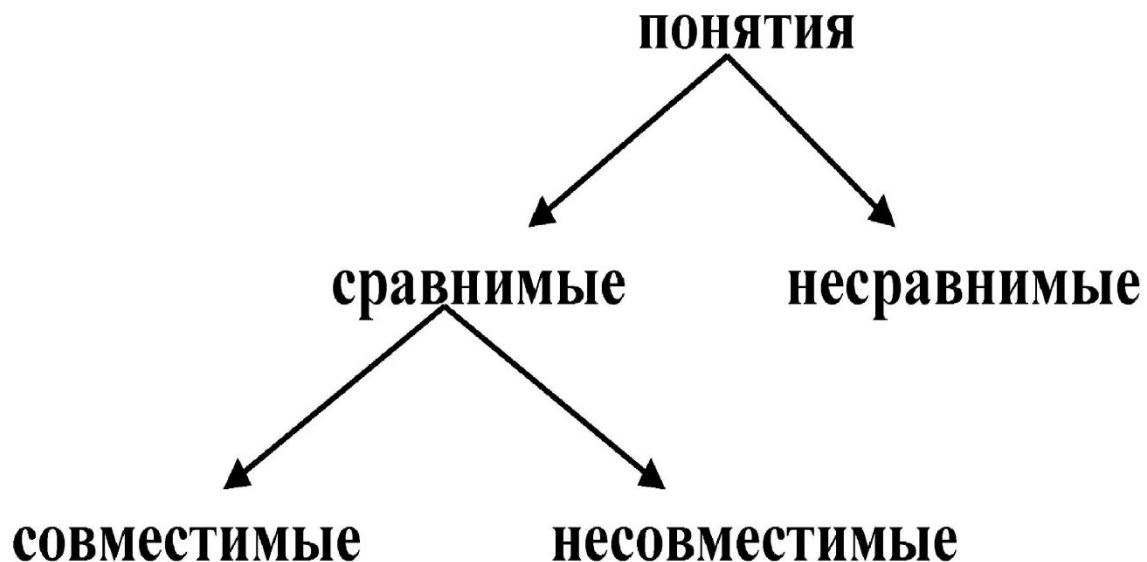
В абстрактных понятиях свойства объектов отвлечены мысленно от самих объектов. Элементы объемов таких понятий нельзя представить (нарисовать, изобразить) в виде конкретных объектов. Примерами абстрактных понятий могут служить понятия: «число», «величина», «множество» и т.д.

3. Понятия делятся на **сравнимые** и **несравнимые** в зависимости от того, имеются ли в их содержании общие признаки. *Сравнимые* понятия имеют некоторые общие признаки, *несравнимые* понятия таких признаков не имеют. Например, понятия «квадрат» и «треугольник» сравнимы, т.к. у них есть общий признак – быть многоугольником. Понятия «квадрат» и «уравнение» - несравнимые, у них нет ни одного общего признака.

Сравнимые понятия делятся на **совместимые** и **несовместимые**. Объемы совместимых понятий имеют хотя бы один общий элемент. В объемах несовместимых понятий общих элементов нет. Например, понятия «четное число» и «число, кратное 2» совместимы, причем объемы этих понятий полностью совпадают. В этом случае говорят, что понятия находятся в *отношении тождества*. Объемы совместимых понятий могут так же находиться в отношении *пересечения* и *включения*.

Понятия «квадрат» и «треугольник» являются несовместимыми, т.к. объемы этих понятий не имеют ни одного общего элемента.

Таким образом, можно составить следующую схему деления понятий:



Объемы совместимых понятий могут находиться в трех видах отношений.

*Отношение тождества.* Объемы таких понятий совпадают. Например, объемы понятий «прямоугольник с равными сторонами» и «ромб с прямыми углами» находятся в отношении тождества.

*Отношение пересечения.* Объемы таких понятий имеют некоторые общие элементы. Например, объемы понятий «четное число» и «число кратное трем» находятся в отношении пересечения, т.к. есть числа 6, 12, 18, которые кратны и двум и трем одновременно.

*Отношение включения.* В этом случае объем одного понятия является подмножеством другого. Примерами понятий, объемы которых находятся в отношении включения, могут служить понятия «квадрат» и «прямоугольник».

# Определение математических понятий. Требования к определению понятий.

Одним из действий изучения математического объекта для получения понятия о нем является действие **определение**. Определить понятие - значит указать способ, с помощью которого можно отделить объекты или отношения, охватываемые данным понятием, от других объектов или отношений.

Определяя понятие, приходится совершать некоторую логическую операцию, в результате которой формулируется предложение, раскрывающее содержание понятия. Сами предложения при этом называются определениями. Таким образом, **определение** – это предложение, с помощью которого раскрывается содержание понятия или устанавливается значение термина.



**Определить понятие** – это значит выбрать из его существенных признаков такие и столько, чтобы каждое из них было необходимо, а все вместе достаточно для того, чтобы отличить изучаемый объект от других.

Выполняется действие определения различными путями, и результат его выполнения фиксируется в различного вида определениях.

Различают **вербальные (словесные)** и **невербальные** определения.

*Невербальное определение* – это определение понятия путем непосредственной демонстрации объектов, охватываемых этим понятием, или приведение контекста, в котором содержится то или иное понятие.

Невербальные определения используются на начальном этапе изучения объектов или отношений.

Примерами таких определений являются *остенсивные* и *контекстуальные* определения.

*Остенсивные* (от лат. ostendere – показывать) определения – это такие определения, которые устанавливают значение терминов путем демонстрации объектов, которые этим термином определяются. С использованием такого определения в начальной школе вводится понятие «числовое выражение», «числовое равенство», «угол» и т.д.

*Контекстуальные* определения – это определения, в которых содержание понятия раскрывается через некоторый контекст.

По мере накопления запаса знаний происходит накопление понятий, развивается язык и способность к обобщению. Все это дает возможность определять неизвестные понятия через известные. Так появляются *вербальные* определения. Во всяком таком определении выделяются *определяемое* и *определяющее* понятия. Например, в определении «Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны» понятие «квадрат» является определяемым, а понятие «прямоугольник, у которого все стороны равны» - определяющим.

Рассмотрим некоторые способы вербальных определений.

1) *Определение понятий через род и видовое отличие.*

Этот способ определения является наиболее распространенным. Логическая структура определения через род и видовое отличие проста, четко выражена и поэтому доступна учащимся уже в начальной школе. Такие определения часто представляют в виде схемы: вид = род + видовое отличие.

Например: «Прямоугольник – это четырехугольник, у которого все углы прямые».

Вид – прямоугольник. Род – четырехугольник.

Видовые отличия: все углы прямые

Операции, раскрывающие действие определения объектов, в этом случае будут следующими: выбирается ближайший родовой объект, затем на этот объект накладываются как бы ограничения, видовые характеристики (отличия). На основе видовых характеристик вводится новый объект, но с меньшим объемом, чем родовой, т.к. у него больше свойств. Вот этому объекту с большим числом свойств и меньшим объемом присваивается новое звание (термин).

## 2) *Генетическое определение понятий.*

Генетические (от слова гезис – происхождение), или конструктивные, определения являются частным случаем определений через род и видовое отличие. В таких определениях видовое отличие указывает на происхождение определяемого объекта или на способ его образования.

Рассмотрим, например, определение треугольника: «Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков». В этом определении указано родовое понятие для треугольника – фигура, а в качестве видового отличия указан способ построения такой фигуры, которая является треугольником: нужно взять три точки, не лежащие на одной прямой, и соединить каждую их пару отрезком.

### 3) *Рекурсивные определения.*

В таких определениях указываются некоторые основные элементы из объема понятия и даются правила, позволяющие получить новые элементы из уже имеющихся. Например, определение арифметической прогрессии: «Арифметической прогрессией называется последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом».

В математике существуют понятия, которые логически не определяются. Такие понятия называют *основными* или *первичными*. Примерами таких понятий являются: точка, прямая, множество, величина.

К определению понятий выдвигается ряд *требований*

1. Определение должно содержать указание на ближайшее родовое понятие. Как бы ни было построено определение математического понятия, в нем должно быть указано ближайшее родовое понятие к определяемому понятию.
2. Определения не должны содержать «порочного круга». Считают, что определение содержит «порочный круг», если в его определяющей части содержится определяемый термин.
3. Определение не должно быть тавтологией, т.е. повторять в иной словесной форме ранее сказанное.
4. Определение должно быть достаточным. Это означает, что в определении должны быть указаны все признаки, позволяющие однозначно выделить объекты определяемого понятия.
5. Определение не должно быть избыточным. Это значит, что в определении не должно быть указано лишних признаков, вытекающих из других, уже указанных в определении.