Лекция №7

Путь отыскания всех решений системы линейных уравнений

- 1. Находим $\boldsymbol{rang\ A}$ и $\boldsymbol{rang\ \overline{A}}$.

  Если $\boldsymbol{rang\ A \neq rang\ \overline{A}}$, то система несовместна.

  Если $\boldsymbol{rang\ A = rang\ \overline{A}}$, то находим базисный минор матрицы $\boldsymbol{A}$.

2. Оставляем в системе только те уравнения, коэффициенты которых входят в базисный минор:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

- 3. Оставляем в левой части только те переменные, коэффициенты которых входят в базисный минор. Остальные переменные переносим в правую часть и объявляем свободными переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r - a_{rr}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (2)$$

4.Решаем квадратную невырожденную систему **(2)** относительно свободных переменных, как параметров:

$$x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, \; x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n).$$

- Тогда $(\boldsymbol{f_1(x_{r+1}, \dots, x_n)}, \dots, \boldsymbol{f_r(x_{r+1}, \dots, x_n)}, \boldsymbol{x_{r+1}, \dots, x_n})$ – общее решение системы линейных уравнений, $\boldsymbol{x_{r+1}, \dots, x_n}$ принимают произвольные значения.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Пример 2.

- Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Линейное подпространство

- Пусть $\boldsymbol{U}$ подмножество линейного пространства $\boldsymbol{L}$ и выполняются два условия:

1) если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ принадлежат $\boldsymbol{U}$, то и $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ принадлежит $\boldsymbol{U}$ ($\boldsymbol{U}$ – замкнуто относительно операции сложения элементов);

2) если $\boldsymbol{x}$ принадлежит $\boldsymbol{U}$, а $\boldsymbol{\lambda}$ – любое вещественное число, то $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{x}$ принадлежит $\boldsymbol{U}$ ($\boldsymbol{U}$ – замкнуто относительно умножения на число).

Тогда $\boldsymbol{U}$ называется линейным подпространством пространства $\boldsymbol{L}$.

Легко проверить, что такое $\boldsymbol{U}$ само является линейным пространством.

Примеры линейных подпространств

1. Для любого линейного пространства L линейные подпространства $\boldsymbol{U = \{0\}}$ и $\boldsymbol{U = L}$.

2. Подмножестве $\{\boldsymbol{P_n(t)}|-$ всех многочленов степени $\leq \boldsymbol{n}\}$ подпространство в $\boldsymbol{C[a,b]}$ непрерывных функций, определенных на $[a,b]$.

3. Множество всех векторов на плоскости, параллельных заданной прямой.

4. Линейная оболочка

$$\boldsymbol{L(x,y) = \{\lambda_1 x + \lambda y | x, y -} \text{ элементы некоторого пространства } \boldsymbol{L}\}.$$

1. Пусть $\boldsymbol{\tilde{x} = (1;0)}$, $\boldsymbol{\tilde{y} = (3;0)}$, $\boldsymbol{L(\tilde{x},\tilde{y}) \subset A^2 = \{(x,y)|x,y \in R\}}$.

2. Пусть $\boldsymbol{l_1 = 1, l_2 = t, l_3 = t^2, L(l_1, l_2, l_3)}$.

- Возникает вопрос о размерности подпространства $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{L}$.

<u>Теорема 1.</u> Если линейное пространство $\boldsymbol{L}$ имеет базис, состоящий из $\boldsymbol{n}$ – элементов, то $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{L} = \boldsymbol{n}$.

<u>Следствие.</u> Если $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{L}$ линейное подпространство в $\boldsymbol{L}$, $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{L} = \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{L}$, то $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{U} < \boldsymbol{n}$.

Однородная система линейных уравнений

- Пусть система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Если все свободные члены $b_1, b_2, \dots, b_m$ равны нулю, то система называется однородной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1\text{ од.})$$

- ***<u>Теорема 2.</u>*** Пусть x_0 - какое-нибудь решение системы (1). Тогда множество всех решений системы (1) $\{\text{решения } (\mathbf{1})\} = \boldsymbol{x_0} + \{\text{решения } (\mathbf{1} \text{ од.})\}$, где $\{\text{решения } (\mathbf{1} \text{ од.})\}$ множество всех решений системы (1 од.).

<u>Теорема 3.</u> Множество решений однородной системы линейных уравнений образуют линейное пространство.

<u>Определение.</u> Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений называется любой базис пространства решений этой системы.

▪ ***<u>Теорема 4.</u>*** Пусть однородная система линейных уравнений приведена к виду:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n} \end{cases} \quad (2)$$

где $\boldsymbol{r}$ – ранг матрицы $\boldsymbol{A = (a_{ij}), r < n}$.

1. Если $\boldsymbol{D}$ – произвольный определитель $\boldsymbol{n - r}$ порядка отличный от нуля, то беря компоненты его строк в качестве значений свободных переменных и решая каждый раз получившуюся невырожденную систему, получим $\boldsymbol{n - r}$ решений системы (2), образующих ФСР.

2. Любую фундаментальную систему решений системы (2) можно получить описанным способом из некоторого определителя отличного от нуля.

- ***<u>Пример.</u>*** Найти ФСР и общее решение следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$