Лекция №7

Путь отыскания всех решений системы линейных уравнений

- 1. Находим $\boldsymbol{rang\ A}$ и $\boldsymbol{rang\ \bar{A}}$.

  Если $\boldsymbol{rang\ A \neq rang\ \bar{A}}$, то система несовместна.

  Если $\boldsymbol{rang\ A = rang\ \bar{A}}$, то находим базисный минор матрицы A.

2. Оставляем в системе только те уравнения, коэффициенты которых входят в базисный минор:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r} \end{cases}$$

- 3. Оставляем в левой части только те переменные, коэффициенты которых входят в базисный минор. Остальные переменные переносим в правую часть и объявляем свободными переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r - a_{rr}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

4.Решаем квадратную невырожденную систему **(2)** относительно свободных переменных, как параметров:

$$x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \dots,\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n).$$

- Тогда $(\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{x_n}), \dots, \boldsymbol{f_r}(\boldsymbol{x_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{x_n}), \boldsymbol{x_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ – общее решение системы линейных уравнений, $\boldsymbol{x_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ принимают произвольные значения.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{5}\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \mathbf{2}\boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{x_4} = \mathbf{7} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \mathbf{4}\boldsymbol{x_3} - \mathbf{2}\boldsymbol{x_4} = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x_1} - \mathbf{3}\boldsymbol{x_2} - \mathbf{6}\boldsymbol{x_3} + \mathbf{5}\boldsymbol{x_4} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Пример 2.

- Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Линейное подпространство

- Пусть U подмножество линейного пространства L и выполняются два условия:

1) если x и y принадлежат U, то и $x + y$ принадлежит U (U – замкнуто относительно операции сложения элементов);
2) если x принадлежит U, а λ – любое вещественное число, то $\lambda \cdot x$ принадлежит U (U – замкнуто относительно умножения на число).

Тогда U называется линейным подпространством пространства L.

Легко проверить, что такое U само является линейным пространством.

Примеры линейных подпространств

1. Для любого линейного пространства $\boldsymbol{L}$ линейные подпространства $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{0}\}$ и $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}$.

2. Подмножество $\{\boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{t})| -$ всех многочленов степени $\leq \boldsymbol{n}\}$ подпространство в $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ непрерывных функций, определенных на $[a, b]$.

3. Множество всех векторов на плоскости, параллельных заданной прямой.

4. Линейная оболочка

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{\lambda_1 x} + \boldsymbol{\lambda y}|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \text{ элементы некоторого пространства } \boldsymbol{L}\}.$$

1. Пусть $\widetilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{1}; \boldsymbol{0})$, $\widetilde{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{3}; \boldsymbol{0})$, $\boldsymbol{L}(\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}}) \subset \boldsymbol{A}^2 = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}\}$.

2. Пусть $\boldsymbol{l_1} = \boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{l_2} = \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{l_3} = \boldsymbol{t^2}$, $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \boldsymbol{l_3})$.

- Возникает вопрос о размерности подпространства $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{L}$.

<u>Теорема 1.</u> Если линейное пространство $\boldsymbol{L}$ имеет базис, состоящий из $\boldsymbol{n}$ – элементов, то $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{L} = \boldsymbol{n}$.

<u>Следствие.</u> Если $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{L}$ линейное подпространство в $\boldsymbol{L}$, $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{L} = \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{L}$, то $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{U} < \boldsymbol{n}$.

Однородная система линейных уравнений

- Пусть система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Если все свободные члены $b_1, b_2, \dots, b_m$ равны нулю, то система называется однородной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1\ \text{од.})$$

- ***Теорема 2.*** Пусть x_0 - какое-нибудь решение системы (1). Тогда множество всех решений системы (1) $\{\text{решения } (\mathbf{1})\} = \boldsymbol{x_0} + \{\text{решения } (\mathbf{1}\text{ од.})\}$, где $\{\text{решения } (\mathbf{1}\text{ од.})\}$ множество всех решений системы (1 од.).

Теорема 3. Множество решений однородной системы линейных уравнений образуют линейное пространство.

Определение. Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений называется любой базис пространства решений этой системы.

▪ ***Теорема 4.*** Пусть однородная система линейных уравнений приведена к виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (2)$$

где r – ранг матрицы $A = (a_{ij}), r < n$.

1. Если D – произвольный определитель $n - r$ порядка отличный от нуля, то беря компоненты его строк в качестве значений свободных переменных и решая каждый раз получившуюся невырожденную систему, получим $n - r$ решений системы (2), образующих ФСР.

2. Любую фундаментальную систему решений системы (2) можно получить описанным способом из некоторого определителя отличного от нуля.

- ***Пример.*** Найти ФСР и общее решение следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$