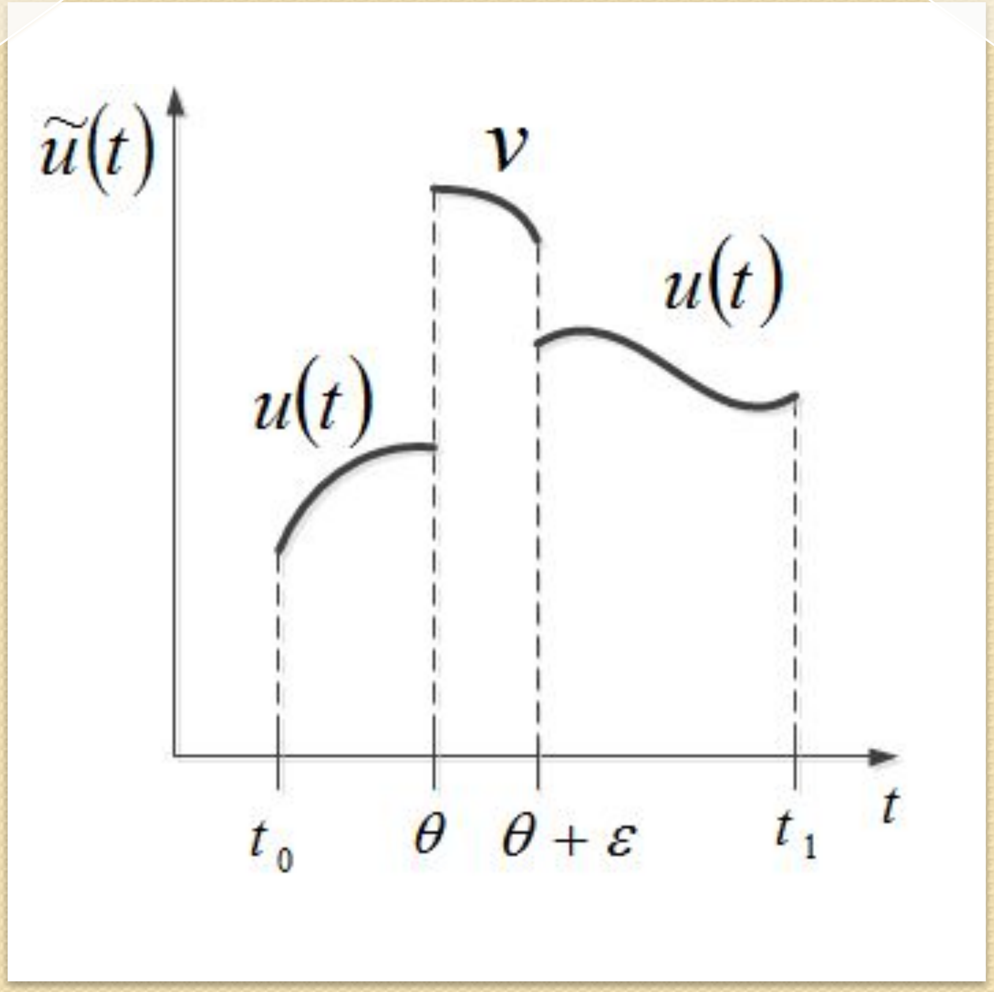
ВАРИАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ



Игольчатая вариация управления

$$\widetilde{u}(t)=\begin{cases} u(t), t\in[t_0,\theta]\cup[\theta+\varepsilon,t_1] \\ v, t\in[\theta,\theta+\varepsilon] \end{cases}$$

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x, u, t)\,dt$$

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\widetilde{x}, \widetilde{u}, t)\,dt$$

$$\Delta x(t) = \widetilde{x}(t) - x(t) = \Delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(f(\widetilde{x}, \widetilde{u}, t) - f(x, u, t) \right) dt$$

$$1)\quad t \in [t_0, \theta]$$

$$\tilde{u}(t) = u(t) \;\Rightarrow\; \tilde{x}(t) = x(t) \;\Rightarrow\; \Delta x(t) = 0$$

$$2)\; t \in [\theta, \theta + \varepsilon] \;\; \tilde{u}(t) = v \;\Rightarrow\; \tilde{x}(t) \neq x(t)$$

$$\Delta x(t) = \Delta x(\theta) + \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left(f(\tilde{x}, v, t) - f(x, u, t) \right) dt$$

$$\Delta x(\theta) = 0 \quad \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left(f(\tilde{x}, v, t) - f(x, u, t) \right) dt \approx \varepsilon \;\Rightarrow\; \Delta x(t) \approx \varepsilon$$

$$3)\; t \in [\theta + \varepsilon, t_1] \;\; \tilde{u}(t) = u(t) \;\Rightarrow$$

$$\Delta x(t) = \Delta x(\theta + \varepsilon) + \int_{\theta+\varepsilon}^{t_1} \left(f(x, u, t) - f(x, u, t) \right) dt = \Delta x(\theta + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow\; \Delta x(t) \approx \varepsilon$$

$$\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\widetilde{u}} H(x,\psi,u,tdt + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$$

$$\eta_1 = -\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial \Delta_{\widetilde{u}} H(x,\psi,\widetilde{u},t)}{\partial x}, \Delta x(t) \right\rangle dt = o(\varepsilon)$$

$$\eta_2 = \int_{t_0}^{t_1} o(\|\Delta x(t)\|) dt = o(\varepsilon)$$

$$\eta_3 = o_1(\|\Delta x(t_1)\|) = o(\varepsilon)$$

$$\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\widetilde{u}} H(x,\psi,u,tdt + o(\varepsilon)$$

$$\Delta J(u) = -\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \Delta_v H(x,\psi,u,tdt + o(\varepsilon)$$

$$\Delta J(u) \approx -\varepsilon \cdot \Delta_v H(x(\theta),\psi(\theta),v,\theta) + o(\varepsilon)$$

$u(t)$ -оптимальное управление

$\widetilde{u}(t)$ -допустимое управление

$$\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) \geq 0$$

$$\Delta J(u) \approx -\varepsilon \cdot \Delta_v H(x(\theta), \psi(\theta), v, \theta) \geq 0$$

$$\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_v H(x(\theta), \psi(\theta), v, \theta) \leq 0$$

$$\Delta_v H(x(t), \psi(t), v, t) \leq 0$$

$$H(x(t), \psi(t), v, t) \leq H(x(t), \psi(t), u(t), t)$$

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \max_{\forall v \in U} H(x(t), \psi(t), v, t)$$

ТЕОРЕМА

Принцип максимума Понтрягина

- Пусть $u_*(t), t \in [t_0, t_1]$ является оптимальным управлением простейшей задачи

$$\dot{x} = f(x, u, t), t \in [t_0, t_1], u(t) \in U$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\min_{u \in U} J(u) = \min_{u \in U} \varphi(x(t_1))$$

при этом $x_*(t)$ соответствующая оптимальному управлению траектория

и $\psi_*(t)$ является решением системы уравнений

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x^*, \psi, u^*, t)}{\partial x} \qquad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x^*(t_1))}{\partial x}$$

тогда выполняется условие максимума

$$H(x_*(t), \psi_*(t), u_*(t), t) = \max_{u \in U} H(x_*(t), \psi_*(t), u(t), t)$$

АЛГОРИТМ

- Строится $H(x,\psi,u(x,\psi,t),t)=\langle\psi(t), f(x,u,t)\rangle$

$$H(x_*(t),\psi_*(t),u_*(t),t)=\max_{u\in U} H(x_*(t),\psi_*(t),u(t),t)$$

получаем $u=u(x,\psi,t)$

- Находим решение системы

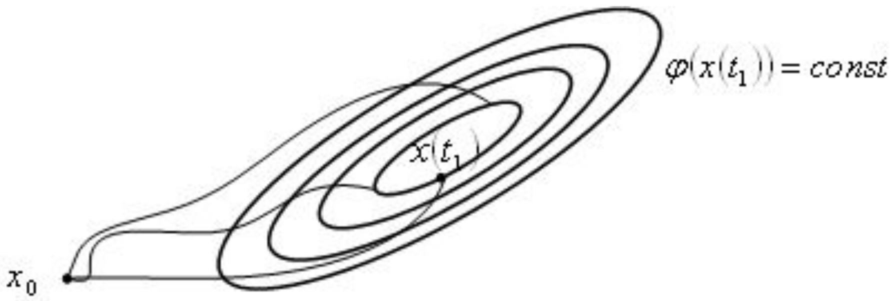
$$\dot{x}=f(x,u,t)$$

$$x(t_0)=x_0$$

$$\dot{\psi}=-\frac{\partial H(x^*,\psi,u^*,t)}{\partial x}$$

$$\psi(t_1)=-\frac{\partial\varphi(x^*(t_1))}{\partial x}$$

- Подставляем найденные $x(t)$ $\psi(t)$ в $u=u(x,\psi,t)$



Терминальная задача управления с фиксированным правым концом

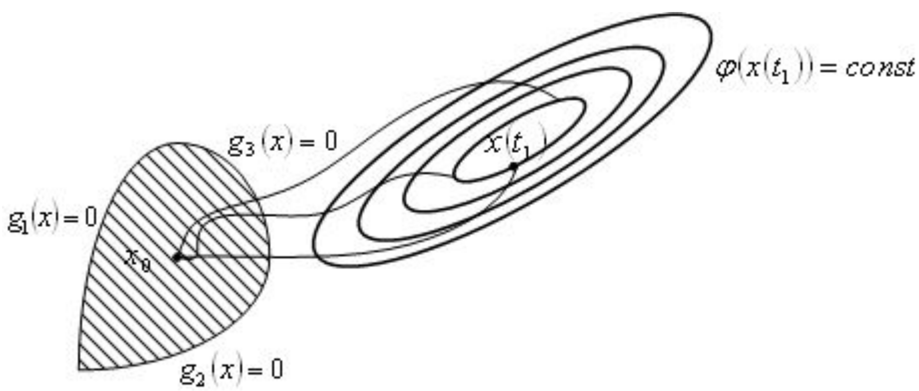
Изменение задачи поиска максимума с помощью принципа Понтрягина в зависимости от граничных условий

1) Рассмотренная задача

$$\dot{x} = f(x,u,t), t \in [t_0, t_1], u(t) \in U$$
$$x(t_0) = x_0$$

$$\min_{u \in U} J(u) = \min_{u \in U} \varphi(x(t_1))$$

Изменение задачи поиска максимума с помощью принципа Понтрягина в зависимости от граничных условий



Терминальная задача управления отрезками на конец траектории

2) Ограничение на правый конец

$$\dot{x} = f(x,u,t), t \in [t_0, t_1], u(t) \in U$$

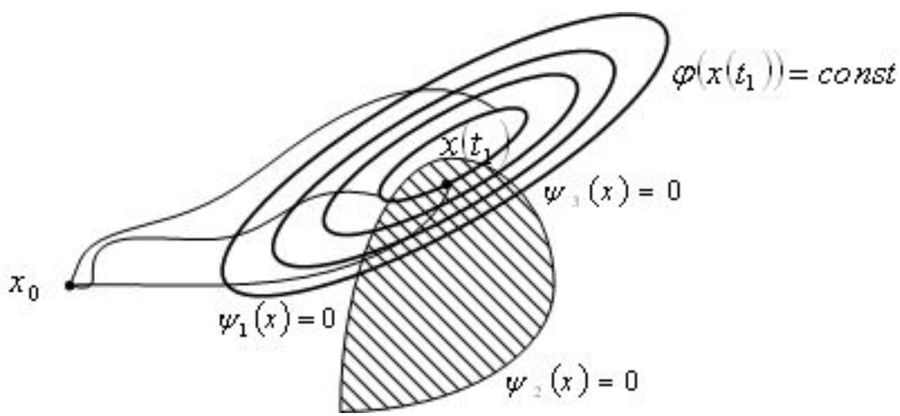
$$x(t_0) = x_0$$

$$g_i(x(t)) \le 0, i = \overline{1,n}$$

$$\min_{u \in U} J(u) = \min_{u \in U} \varphi(x(t_1))$$

$$\psi(t_1) = -\mu_0 \frac{\partial \varphi(x^*(t_1))}{\partial x} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial g_i(x(t_1))}{\partial x}$$

Изменение задачи поиска максимума с помощью принципа Понтрягина в зависимости от граничных условий



Терминальная задача управления отрезками на конец траектории

3) Ограничение на левый конец

$$\dot{x} = f(x,u,t), t \in [t_0, t_1], u(t) \in U$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$h_j(x(t)) \le 0, \; j = \overline{1,m}$$

$$\min_{u \in U} J(u) = \min_{u \in U} \varphi(x(t_1))$$

$$\psi(t_1) = -\mu_0 \frac{\partial \varphi(x^*(t_1))}{\partial x} - \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \frac{\partial h_j(x(t_0))}{\partial x}$$

Пример

Требуется минимизировать функционал

$$J(y) = \int_0^{t_1} u^2(t)dt$$

при условиях:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - \beta x_2 + u,$$
$$0 \le t \le t_1,$$
$$x(0) = x^{(0)}, x(t_1) = 0$$

t_1- заданный момент времени, $u(t) \in U \subset E^1$

Строим функцию Гамильтона:

$$H = \langle \psi, f \rangle - f_{n+1} = \psi_1 x_2 + \psi_2(-\sin x_1 - \beta x_2 + u) - u^2 =$$
$$= \psi_1 x_2 - \psi_2 \sin x_1 - \beta\psi_2 x_2 + \psi_2 u - u^2.$$

Условие максимума

$$\psi_1 x_2 - \psi_2 \sin x_1 - \beta\psi_2 x_2 + \psi_2 u - u^2 =$$
$$= \max_v [\psi_1 x_2 - \psi_2 \sin x_1 - \beta\psi_2 x_2 + \psi_2 v - v^2] =$$
$$= \max_v [\psi_2 v - v^2]$$

Пример

$$\left(\psi_2 u - u^2\right)'_u = \psi_2 - 2u = 0 \Rightarrow u = \frac{\psi_2}{2}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x,\psi,u^*,t)}{\partial \psi} = \frac{\partial\left(\psi_1 x_2 - \psi_2 \sin x_1 - \beta\psi_2 x_2 + \psi_2 v + \frac{{\psi_2}^2}{2}\right)}{\partial \psi}$$

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - \beta x_2 + \frac{\psi_2}{2},$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x^*,\psi,u^*,t)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\psi_1 x_2 - \psi_2 \sin x_1 - \beta\psi_2 x_2 + \psi_2 v + \frac{{\psi_2}^2}{2}\right)}{\partial \psi}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = \dot{\psi}_1 = \psi_2 cos x_1 \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_2} = \dot{\psi}_2 = \beta\psi_2 - \psi_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\sin x_1 - \beta x_2 + \dfrac{\psi_2}{2} \\ x_2 = \dot{x}_1 \Rightarrow \text{неоднородное уравнение} \end{cases}$$

Пример

Решаем однородное уравнение $\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 = 0$.
Обозначим $\dot{x}_1 = q, \ddot{x}_1 = \dot{q}$, тогда $\dot{q} + \beta q = 0$

$$\frac{dq}{dt} = -\beta q \Rightarrow$$

$$\frac{dq}{q} = -\beta dt \Rightarrow$$

$$lnq = -\beta t \Rightarrow$$

$$q = e^{-\beta t} \Rightarrow$$

$$\dot{x}_1 = e^{-\beta t} \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{e^{-\beta t}}{\beta}$$