

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Семинар № 4

Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

ИЯФиТ

доцент Волков Н.П.

Замечание 4

$$\underline{639} \quad \vec{a}_1 = \{1, 2, 3\}, \quad \vec{a}_2 = \{3, 6, 7\}$$

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ - линейно зависимая (независимая) система?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg} A = 2$$

\Rightarrow система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ линейно независима

$$\underline{642} \quad \vec{a}_1 = \{5, 4, 3\}, \quad \vec{a}_2 = \{3, 3, 2\}, \quad \vec{a}_3 = \{8, 1, 3\}$$

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ - линейно зависимая (независимая) система?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -15 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-a_1 + 2a_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg} A = 2$$

\Rightarrow система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ линейно зависима

$$\underline{665} \quad \vec{a}_1 = \{2, 3, 5\}, \quad \vec{a}_2 = \{3, 7, 8\}, \quad \vec{a}_3 = \{1, -6, 1\}$$

$$\vec{b} = \{7, -2, \lambda\}$$

$$\lambda - ? : \quad \vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 - \text{СЛАУ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = -2 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -9 \\ 0 & -5 & 15 & 25 \\ 0 & -12 & 36 & \lambda + 45 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 15 \end{array} \right) \Rightarrow \text{При } \lambda = 15$$

$\text{Rg } \hat{A} = \text{Rg } A = 2 \Rightarrow$ система совместна

x_3 - свободная неизвестная

\Rightarrow Положим $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 3, x_1 = -5$

$$\downarrow \alpha_{00} = \begin{pmatrix} -5c \\ 3c \\ c \end{pmatrix}$$

Положим $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -5, x_1 = 11$

$$\downarrow \alpha_{11} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix} = (-5c + 11)\alpha_1 + (3c - 5)\alpha_2 + c\alpha_3}$$

$$\underline{679} \quad \vec{a}_1 = \{5, 2, -3, 1\}, \quad \vec{a}_2 = \{4, 1, -2, 3\}$$

$$\vec{a}_3 = \{1, 1, -1, -2\}, \quad \vec{a}_4 = \{3, 4, -1, 2\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 35 \\ 0 & 0 & 8 & 35 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ линейно независима

$$\Rightarrow \underset{\downarrow}{a_2} = x_1 \underset{\downarrow}{a_1} + x_2 \underset{\downarrow}{a_3} + x_3 \underset{\downarrow}{a_4}$$

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & -7 & -11 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & -7 & 5 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Rg } \hat{A} = \text{Rg } A = 3 = n$$

$\Rightarrow \exists$ единственное решение:

$$\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\underset{\downarrow}{a_2} = \underset{\downarrow}{a_1} - \underset{\downarrow}{a_3}}$$

$$\underline{675} \quad \vec{a}_1 = \{2, 1, -3, 1\}, \quad \vec{a}_2 = \{4, 2, -6, 2\},$$

$$\vec{a}_3 = \{6, 3, -9, 3\}, \quad \vec{a}_4 = \{1, 1, 1, 1\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -6 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -10 & -2 \\ 0 & -3 & -15 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Rg } A = 2$$

\Rightarrow Системы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_4\}$, $\{\vec{a}_2, \vec{a}_4\}$ и $\{\vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ линейно независимы

Дома: П. 640, 644, 668, 674, 680