ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Семинар № 4

Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

ИЯФиТ

доцент ***Волков Н.П.***

Занятие 4

639 $\vec{a}_1 = \{1, 2, 3\}$, $\vec{a}_2 = \{3, 6, 7\}$

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ – линейно зависимая (независимая) система?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg A = 2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{система } \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} \text{ линейно независима}}$

642 $\vec{a}_1 = \{5, 4, 3\}$, $\vec{a}_2 = \{3, 3, 2\}$, $\vec{a}_3 = \{8, 1, 3\}$

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ – линейно зависимая (независимая) система?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -15 & -5 \end{pmatrix} \overset{-a_1 \to 2a_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg A = 2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{система } \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \text{ линейно зависима}}$

665 $\vec{a}_1 = \{2, 3, 5\}$, $\vec{a}_2 = \{3, 7, 8\}$, $\vec{a}_3 = \{1, -6, 1\}$

$\vec{b} = \{7, -2, \lambda\}$

$\lambda - ?$: $b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$ – СЛАУ

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = -2 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -9 \\ 0 & -5 & 15 & 25 \\ 0 & -12 & 36 & \lambda+45 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-15 \end{array}\right) \Rightarrow \text{При } \lambda = 15$$

$Rg\hat{A} = RgA = 2 \Rightarrow$ система совместна

x_3 - свободная неизвестная

$\Rightarrow$ Положим $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 3,\ x_1 = -5$

$$\vec{\alpha}_{oo} = \begin{pmatrix} -5c \\ 3c \\ c \end{pmatrix}$$

Положим $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -5,\ x_1 = 11$

$$\vec{\alpha}_{чн} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix} = (-5c+11)\vec{a}_1 + (3c-5)\vec{a}_2 + c\vec{a}_3}$$

679 $\vec{a}_1=\{5,2,-3,1\}$, $\vec{a}_2=\{4,1,-2,3\}$

$\vec{a}_3=\{1,1,-1,-2\}$, $\vec{a}_4=\{3,4,-1,2\}$

$$A=\begin{pmatrix}5&2&-3&1\\4&1&-2&3\\1&1&-1&-2\\3&4&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-3&2&11\\0&-3&2&11\\1&1&-1&-2\\0&1&2&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&8&35\\0&0&8&35\\1&1&-1&-2\\0&1&2&8\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&0&8&35\\0&0&0&0\\1&1&-1&-2\\0&1&2&8\end{pmatrix}$$

система $\{\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4\}$ линейно независима

$$\Rightarrow \underset{\downarrow}{a_2}=x_1\underset{\downarrow}{a_1}+x_2\underset{\downarrow}{a_3}+x_3\underset{\downarrow}{a_4}$$

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}5&1&3&4\\2&1&4&1\\-3&-1&-1&-2\\1&-2&2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&3\\0&11&-7&-11\\0&5&0&-5\\0&-7&5&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&3\\0&1&0&-1\\0&0&-7&0\\0&0&5&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow Rg\,\hat{A}=Rg\,A=3=n$$

$\Rightarrow \exists$ единственное решение:

$$\underset{\downarrow}{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{\underset{\downarrow}{a_2}=\underset{\downarrow}{a_1}-\underset{\downarrow}{a_3}}$$

675 $\vec{a}_1=\{2,1,-3,1\}$, $\vec{a}_2=\{4,2,-6,2\}$,
$\vec{a}_3=\{6,3,-9,3\}$, $\vec{a}_4=\{1,1,1,1\}$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-3&1\\4&2&-6&2\\6&3&-9&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-5&-1\\0&-2&-10&-2\\0&-3&-15&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&5&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Rg\,A=2$

$\Rightarrow$ Системы $\{\vec{a}_1,\vec{a}_4\}$, $\{\vec{a}_2,\vec{a}_4\}$ и $\{\vec{a}_3,\vec{a}_4\}$ линейно независимы

Дома: П. 640, 644, 668, 674, 680