Функция $y = \cos x$

Ее свойства и график

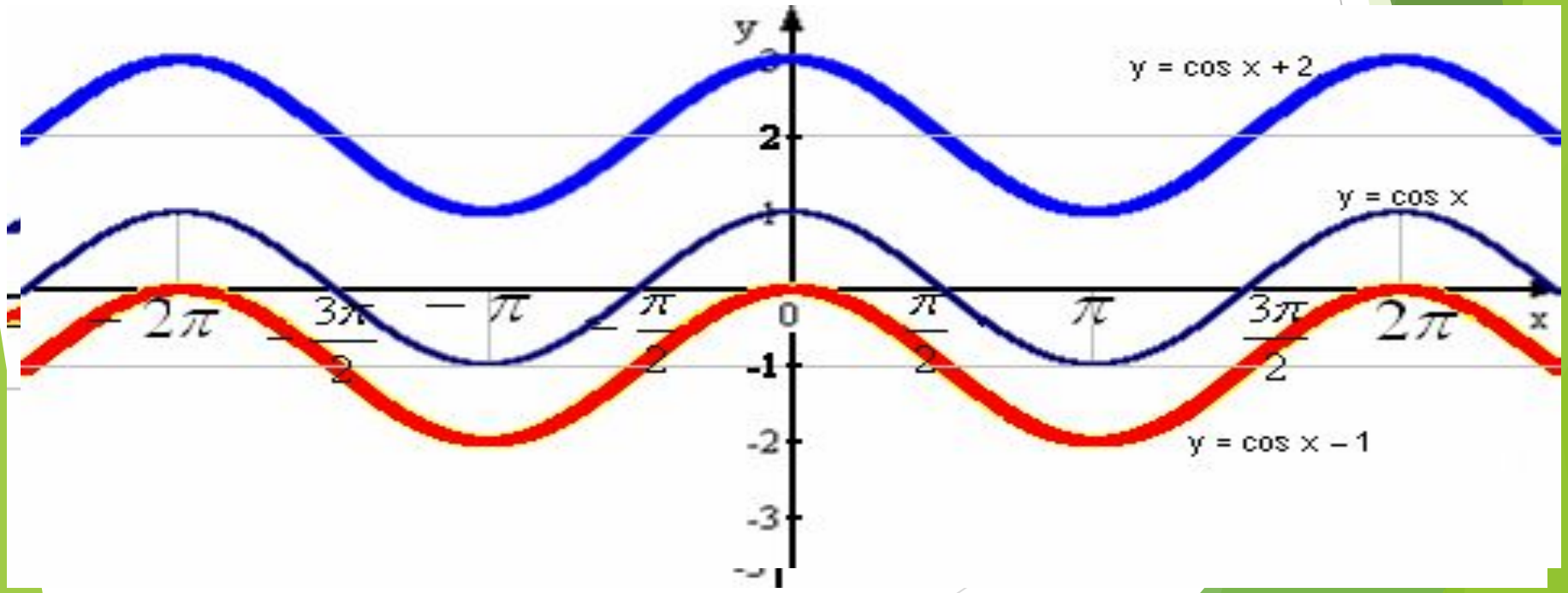
Преобразование графика функции y = cos x

- Изменение функции
  - $y = \cos x + A$
  - $y = k \cdot \cos x$
  - $y = -\cos x$
  - $y = |\cos x|$

- Изменение аргумента
  - $y = \cos (x - a)$
  - $y = \cos (k \cdot x)$
  - $y = \cos (-x)$
  - $y = \cos |x|$

y = cos x + A

- **Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси ординат на A единиц вверх, если A > 0 и на |A| единиц вниз, если A < 0.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos x + 2; y = cos x – 1.***



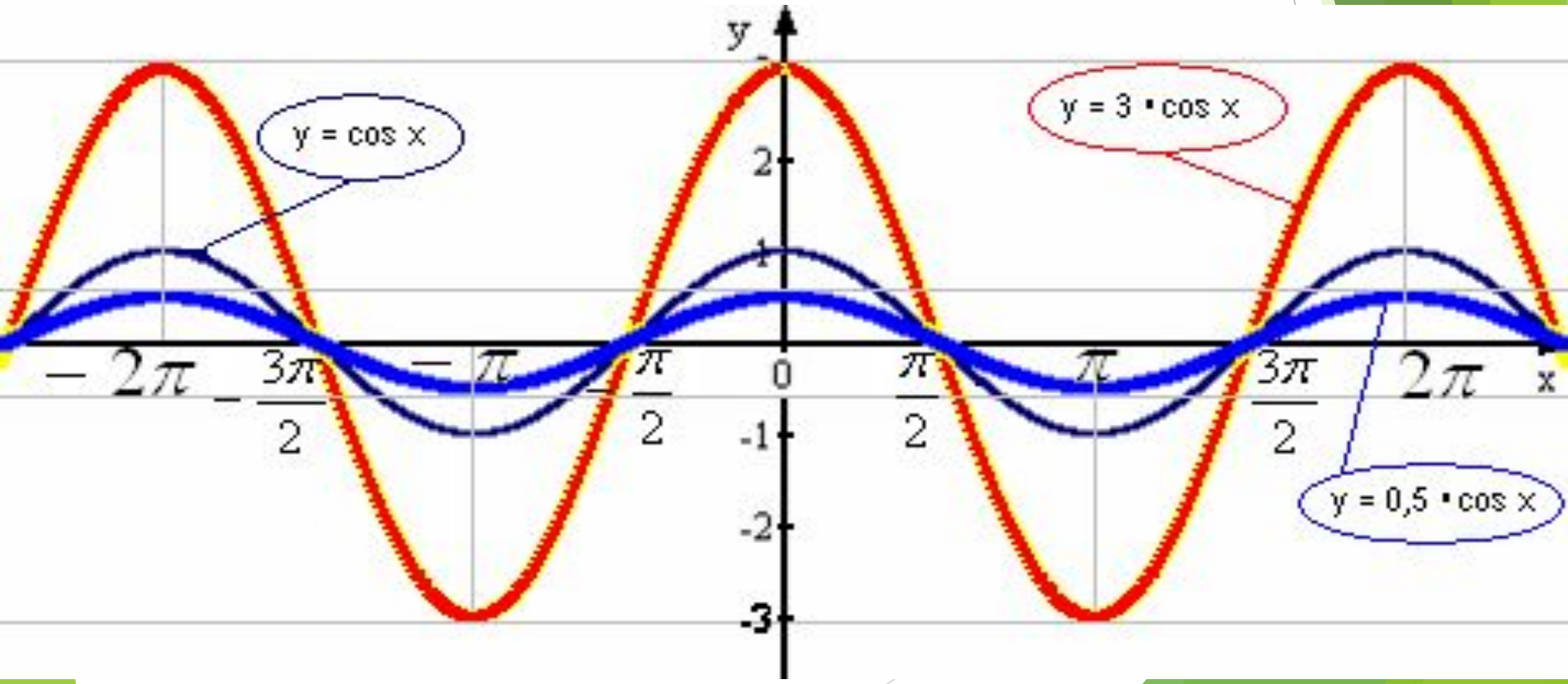
$y = \cos x + A$ (свойства)

- **Изменяются множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения; нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **<u>Например:</u>** $y = \cos x + 2$.

  - ***<u>E (f):</u>*** $\cos x + 2 = a \Rightarrow \cos x = a - 2$, *т.к.* $-1 \le y \le 1$, *то* $-1 \le a - 2 \le 1 \Rightarrow 1 \le a \le 3$, *т.е.* $y \in [1; 3]$.
  - ***<u>Нули функции:</u>*** $\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2$ *данное уравнение не имеет корней т.к.* $|-2| > 1 \Rightarrow$ *график данной функции не пересекает ось абсцисс.*
  - ***<u>f (x) > 0:</u>*** *при любом значении x.*
  - ***<u>f (x) < 0:</u>*** *нет.*
  - ***<u>y (наиб) = 3, при:</u>*** $x = 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $\cos x + 2 = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z$).
  - ***<u>y (наим) = 1, при:</u>*** $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $\cos x + 2 = 1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$).

y = k · cos x

- **Растяжение графика функции y = cos x вдоль оси ординат относительно оси абсцисс в k раз, если k > 0 и сжатие в 1/k раз, если 0 < k < 1.**
- **<u>Например:</u>** ***y = 3 • cos x; y = 0,5 • cos x.***

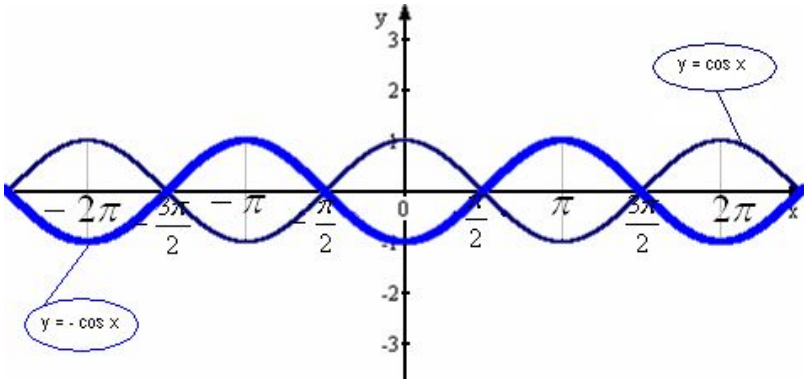


$y = k \cdot \cos x$ (свойства)

- **Изменяется множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения.**
- **<u>Например:</u>** $y = 3 \cdot \cos x$
  - ***<u>E (f):</u>*** $3 \cdot \cos x = a \Rightarrow \cos x = a/3$, *т.к.* $-1 \le y \le 1$, *то* $-1 \le a/3 \le 1 \Rightarrow -3 \le a \le 3$, *т.е.* $y \in [-3; 3]$.
  - ***<u>Функция принимает наибольшее значение, равное 3, при:</u>*** $x = 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $3\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z$).
  - ***<u>Функция принимает наименьшее значение, равное – 3, при:</u>*** $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $3\cos x = -3 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$).

y = - cos x

- Симметричное отражение графика функции y = cos x относительно оси абсцисс.

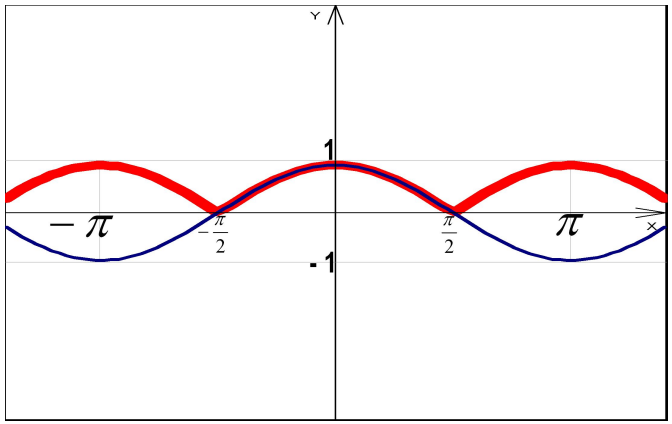


y = - cos x (свойства)

- **Изменяются промежутки возрастания (убывания); промежутки положительных (отрицательных) значений.**
  - ***<u>Функция возрастает</u> на отрезке [0; π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…***
  - ***<u>Функция убывает</u> на отрезке [π; 2π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…***
  - ***<u>Функция принимает положительные значения</u> на интервале (π/2; 3π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…***
  - ***<u>Функция принимает отрицательные значения</u> на интервале (-π/2; π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…***

y = | cos x |

- **Часть графика, расположенная ниже оси абсцисс симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.**

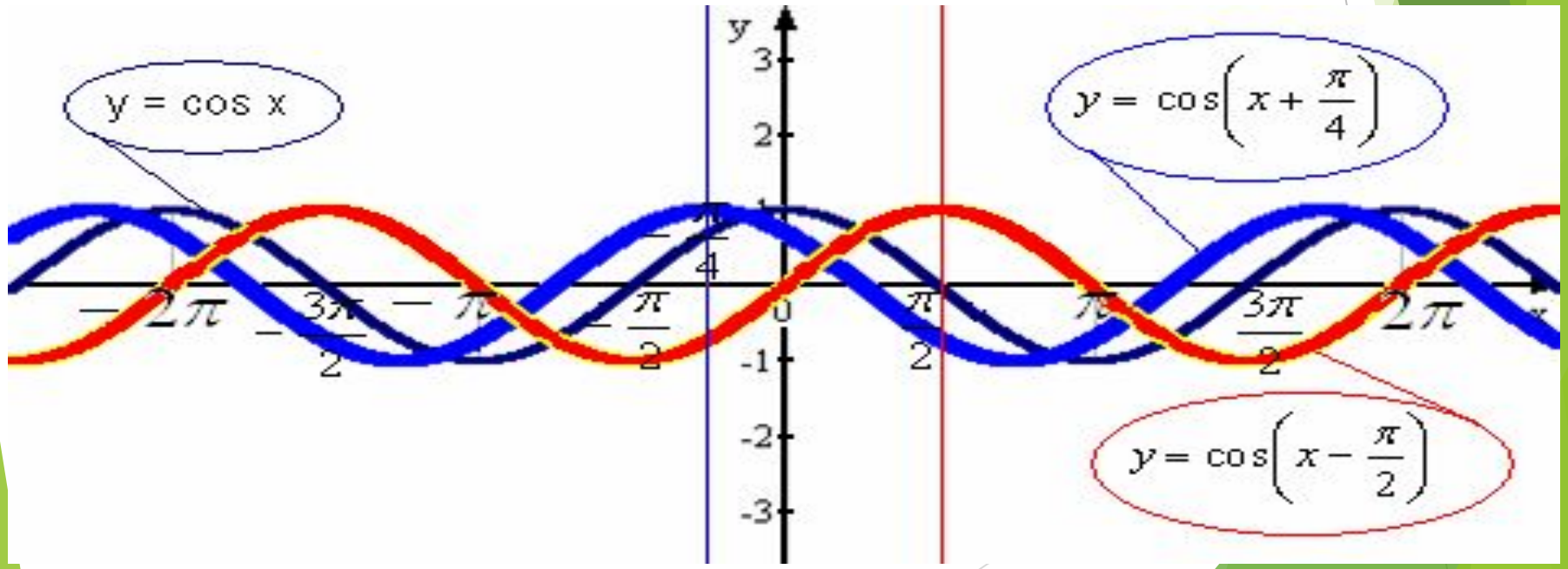


$y = |\cos x|$ (свойства)

- **Изменяются: множество значений функции; период; промежутки возрастания (убывания); наибольшее (наименьшее) значение.**
  - ***E (f):*** $y \in [0; 1]$
  - ***Периодичность:*** $T = \pi$
  - ***Функция возрастает на промежутке*** $(\pi/2; \pi)$ + *сдвиги на* πn, $n \in Z$
  - ***Функция убывает на промежутке*** $(0; \pi/2)$ + *сдвиги на* πn, $n \in Z$
  - $f(x) > 0$: *при любом значении* x
  - $f(x) < 0$: *нет*
  - y *(наиб)* $= 1$, *при* $x = 2\pi n$, $n \in Z$
  - y *(наим)* $= 0$, *при* $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$

y = cos (x – a)

- **Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс на a единиц вправо, если a > 0, на |a| единиц влево, если a < 0.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos (x - π/2); y = cos (x +π/4).***



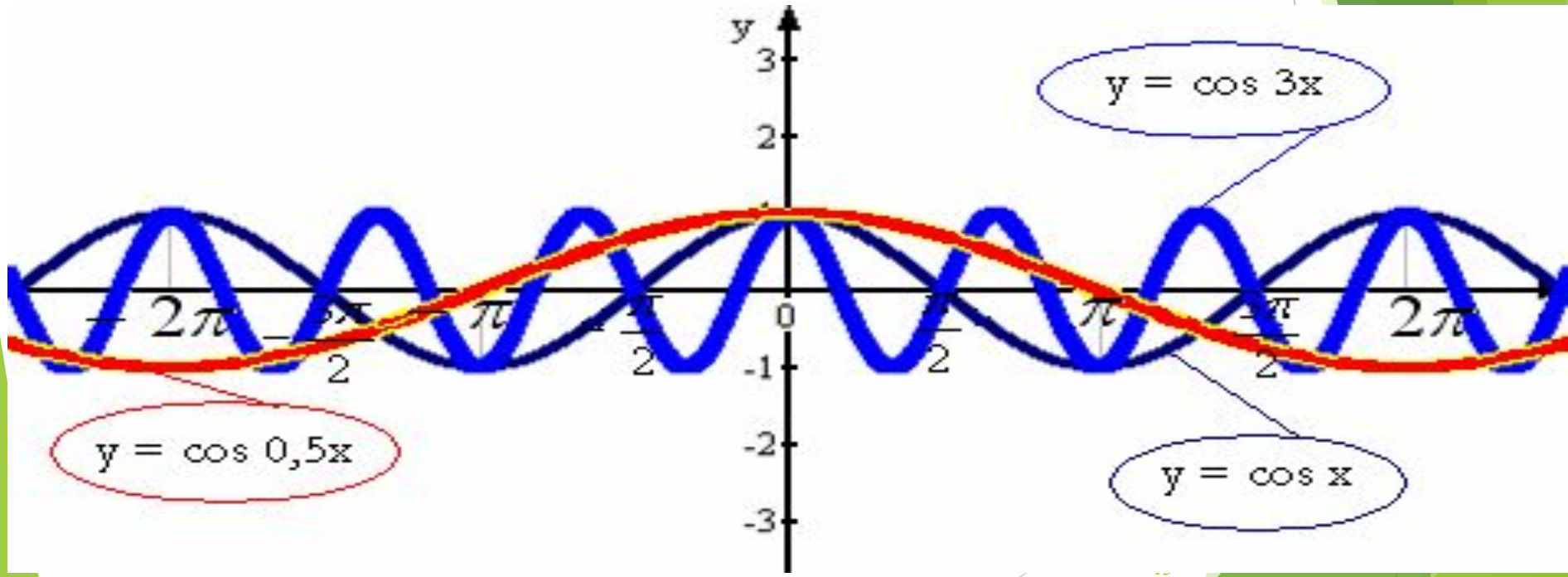
$y = \cos(x - a)$ (свойства)

- **Изменяются: четность; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**

- **<u>Например:</u> $y = \cos(x + \pi/4)$**
  - ***<u>Четность:</u>*** $f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$, *т.к.* $\cos(-(x + \pi/4)) = \cos(-x - \pi/4)$
  - ***<u>Функция возрастает</u>*** *на* $[3\pi/4; 11\pi/4]$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$
  - ***<u>Функция убывает</u>*** *на* $[-\pi/4; 3\pi/4]$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$
  - $\underline{f(x) = 0}$ *при* $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$
  - $\underline{f(x) > 0}$ *при* $x \in (-3\pi/4; \pi/4)$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$
  - $\underline{f((x) < 0}$ *при* $x \in (\pi/4; 5\pi/4)$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$

y = cos (k · x)

- **Сжатие графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс относительно оси ординат в k раз, если k > 1 , и растяжение в 1/k раз, если 0 < k < 1.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos 3x; y = cos 0,5x.***

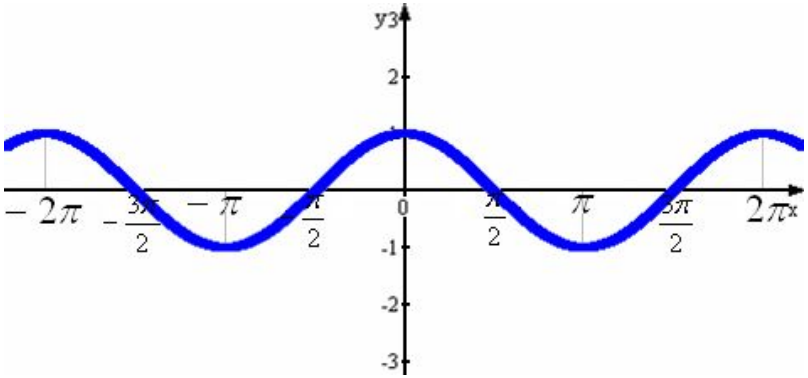


$y = \cos(k \cdot x)$ (свойства)

- **Изменяются: период; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **<u>Например:</u>** $y = \cos 3x$
  - ***<u>Период:</u>*** $T = 2\pi/3$, *(т.к. наименьший положительный период функции* $y = \cos x$ *равен* 2π, *то* $3T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/3$).
  - ***<u>Функция возрастает</u>*** *на* $[\pi/3; 2\pi/3]$ + *сдвиги на* $2\pi n/3$, $n \in Z$.
  - ***<u>Функция убывает</u>*** *на* $[0; \pi/3]$ + *сдвиги на* $2\pi n/3$, $n \in Z$.
  - $\underline{f(x) = 0}$ *при* $x = \pi/6 + \pi n/3$.
  - $\underline{f(x) > 0}$ *при* $x \in (-\pi/6; \pi/6)$ + *сдвиги на* $2\pi n/3$, $n \in Z$.
  - $\underline{f(x) < 0}$ *при* $x \in (\pi/6; \pi/2)$ + *сдвиги на* $2\pi n/3$, $n \in Z$.

y = cos (- x)

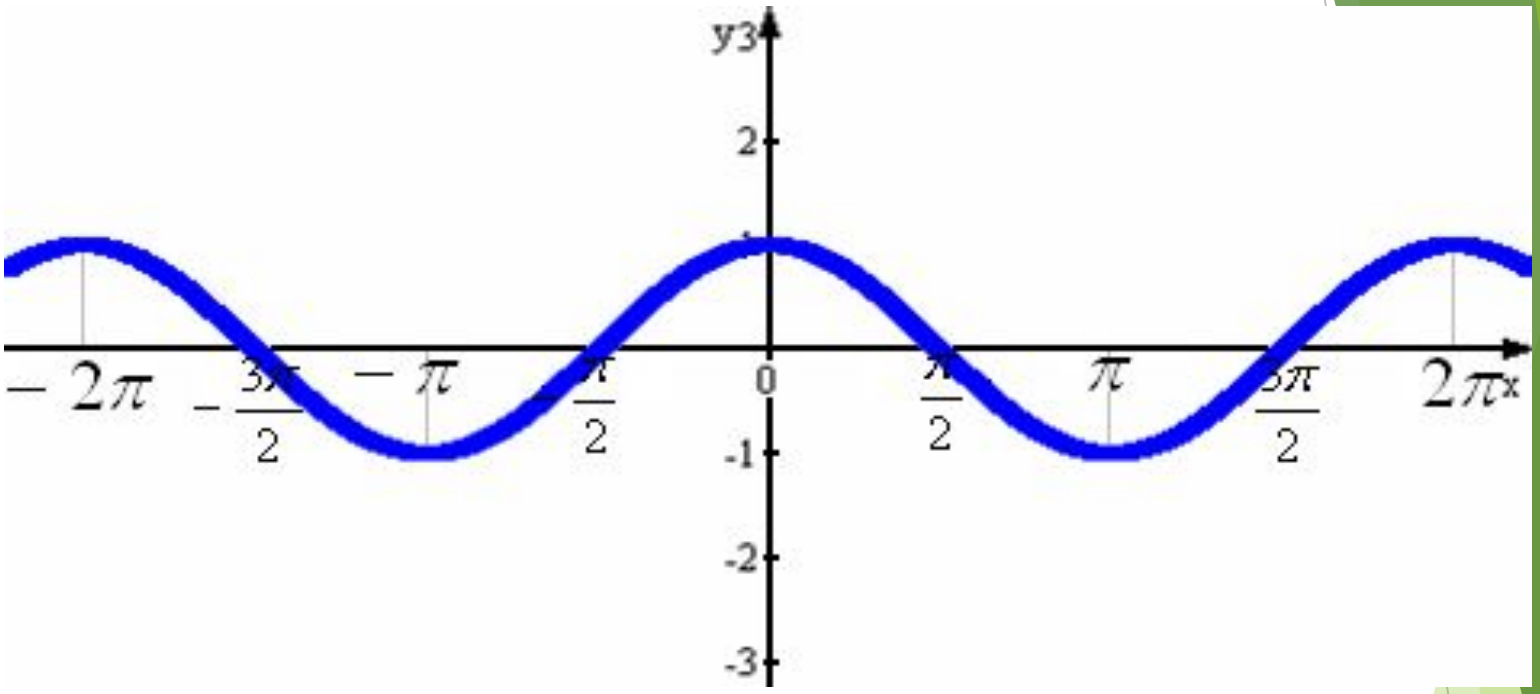
- **Симметричное отражение относительно оси абсцисс.**



y = cos (-x) (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция y = cos x – четная и cos (-x) = cos (x) ⇒ все свойства функции y = cos x справедливы и для функции y = cos (-x)

y = cos | x |

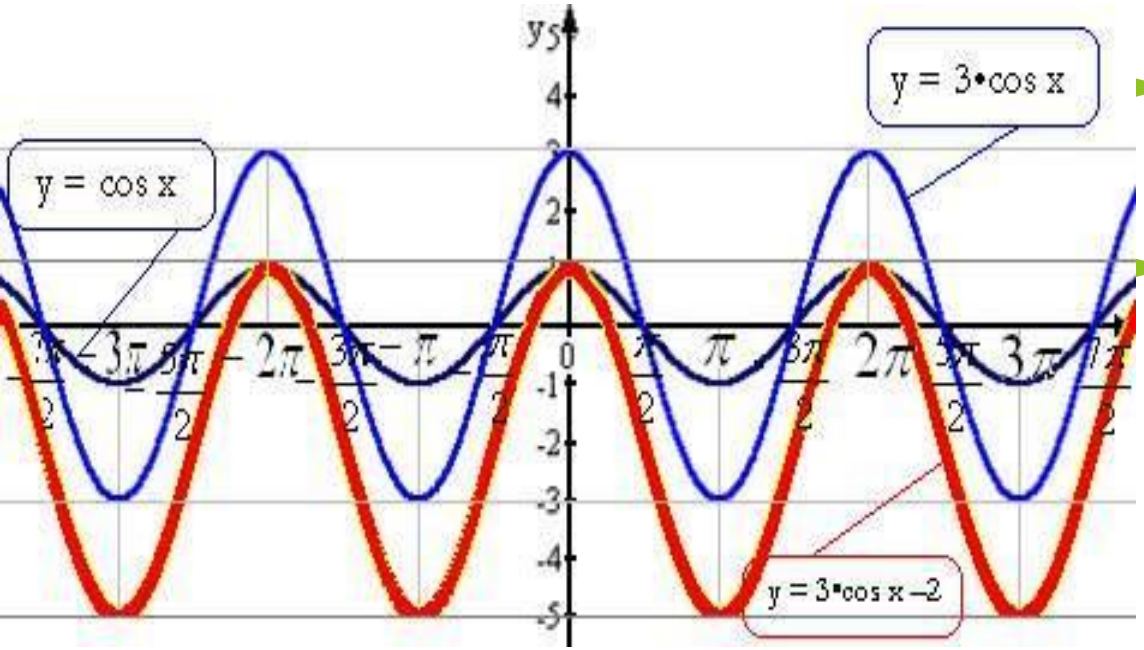


- **Часть графика, расположенная в области x ≥ 0, остается без изменения, а его часть для области x ≤ 0 заменяется симметричным отображением относительно оси ординат части графика для x ≥ 0.**

y = cos|x| (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция y = cos x – четная и cos |x| = cos (-x) = cos (x) ⇒ все свойства функции y = cos x справедливы и для функции y = cos |x|

y = 3 · cos x – 2



- **Построить график функции y = cos x;**
- **Построить график функции y = 3•cos x** ***(растяжение графика функции y = cos x вдоль оси OY в 3 раза);***

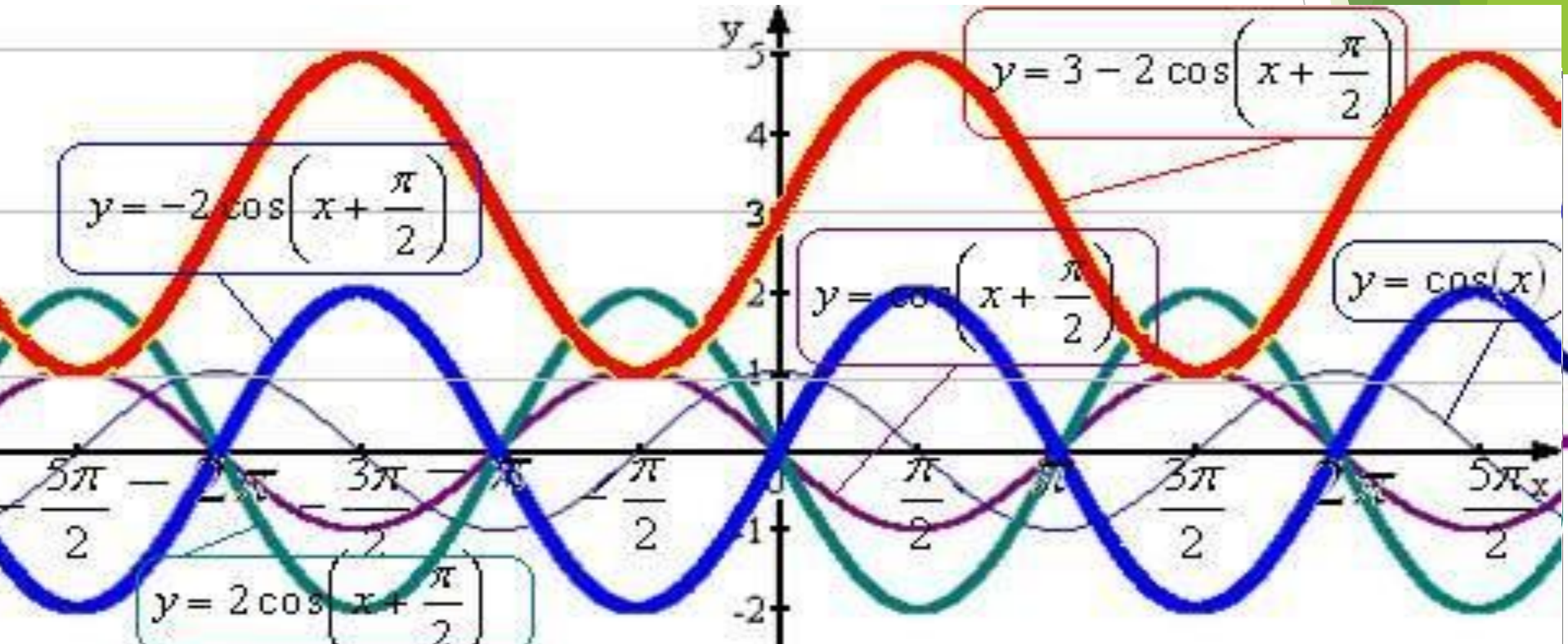
- **Построить график функции y = 3•cos x –2** ***(параллельный перенос графика y = 3•cos x вдоль оси OY на 2 единицы вниз).***

Свойства функции $y = 3 \cdot \cos x - 2$

- **Область определения:** $D(f)$: $x \in R$;
- **Множество значений:** $y \in [-5; 1]$, т.к. $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos x \le 3 \Rightarrow -5 \le 3\cos x - 2 \le 1$;
- **Периодичность:** $T = 2\pi$;
- **Четность:** четная, т.к. $3\cos(-x) - 2 = 3\cos x - 2 \Rightarrow$ график функции симметричен относительно оси OY;
- **Возрастает:** на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2; \pm 3 \ldots$;
- **Убывает:** на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

$y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- Построим график функции $y = \cos x$;
- Построим график функции $y = \cos(x + \pi/2)$(параллельный перенос графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс на $\pi/2$ единиц влево);
- Построим график функции $y = 2\cos(x + \pi/2)$(растяжение графика функции $y = \cos(x + \pi/2)$ вдоль оси OY в 2 раза);
- Построим график функции $y = -2\cos(x + \pi/2)$(симметричное отражение графика функции $y = 2\cos(x + \pi/2)$ относительно оси OX);
- Построим график функции $y = 3 - 2\cos(x + \pi/2)$ (параллельный перенос графика функции $y = -2\cos(x + \pi/2)$ вдоль оси OY на 3 единицы вверх).



Свойства функции $y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- **Область определения**: $D(f)$: $x \in R$;
- **Множество значений**: $y \in [1; 5]$, т.к. $-1 \le \cos(x + \pi/2) \le 1 \Rightarrow$

  $-2 \le 2\cos(x + \pi/2) \le 2 \Rightarrow 1 \le 3 - 2\cos(x + \pi/2) \le 5$;
- **Периодичность**: $T = 2\pi$;
- **Четность**: *ни четная, ни нечетная, т.к. $y(-x) \ne y(x) \ne -y(x)$ (график не симметричен ни оси OY, ни началу координат)*
- **Возрастает**: *на $[3\pi/2; 5\pi/2]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \pm3\ldots$*
- **Убывает:** *на $[\pi/2; 3\pi/2]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \pm3\ldots$*
- **Функция принимает значения равные:**
  - *нулю: нет (уравнение $3 - 2\cos(x + \pi/2) = 0$ не имеет корней т.к. $|-3/2| > 1$);*
  - *положительные: при любом x;*
  - *наибольшее, равное 5: при $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.*
  - *наименьшее, равное 1: при $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.*