Функция y = cos x

Ее свойства и график

Преобразование графика функции y = cos x

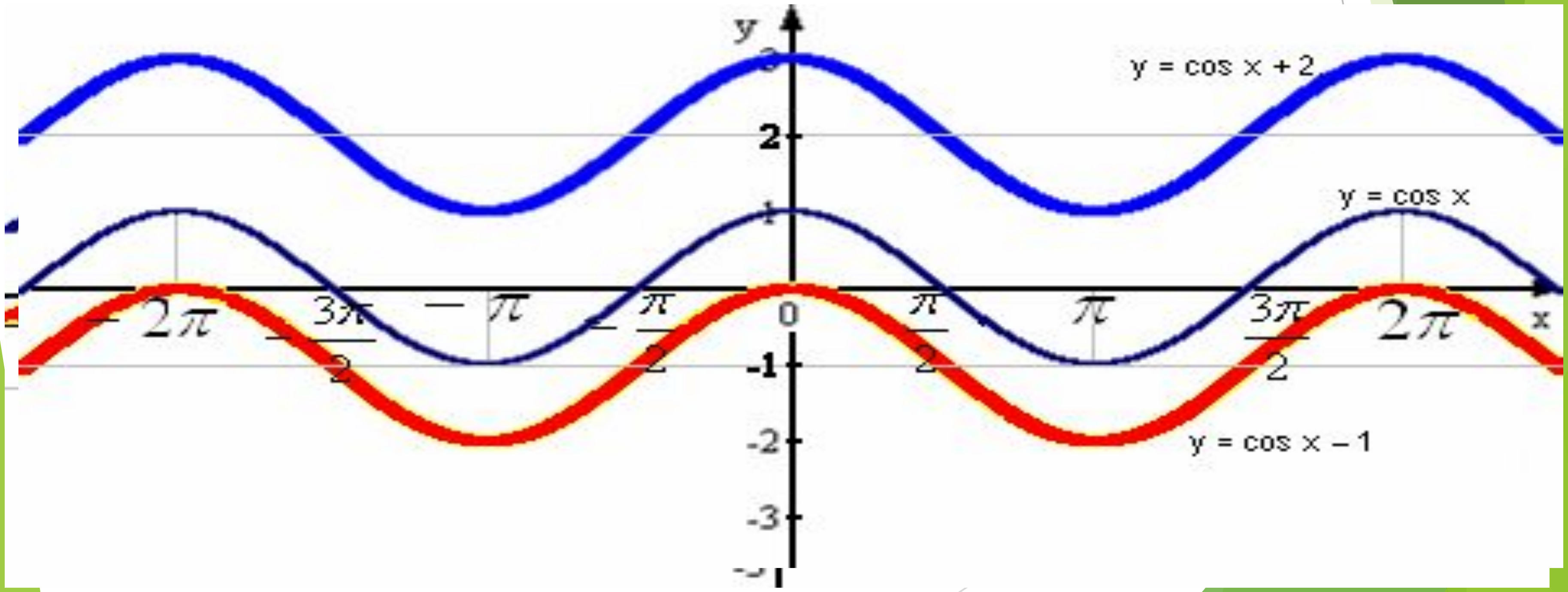
- Изменение функции
  - y = cos x + A
  - y = k · cos x
  - y = - cos x
  - y =|cos x|

- Изменение аргумента
  - y = cos (x – a)
  - y = cos (k · x)
  - y = cos (- x)
  - y = cos|x|

y = cos x + A

- Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси ординат на A единиц вверх, если A > 0 и на |A| единиц вниз, если A < 0.

- <u>**Например:**</u> ***y = cos x + 2; y = cos x – 1.***



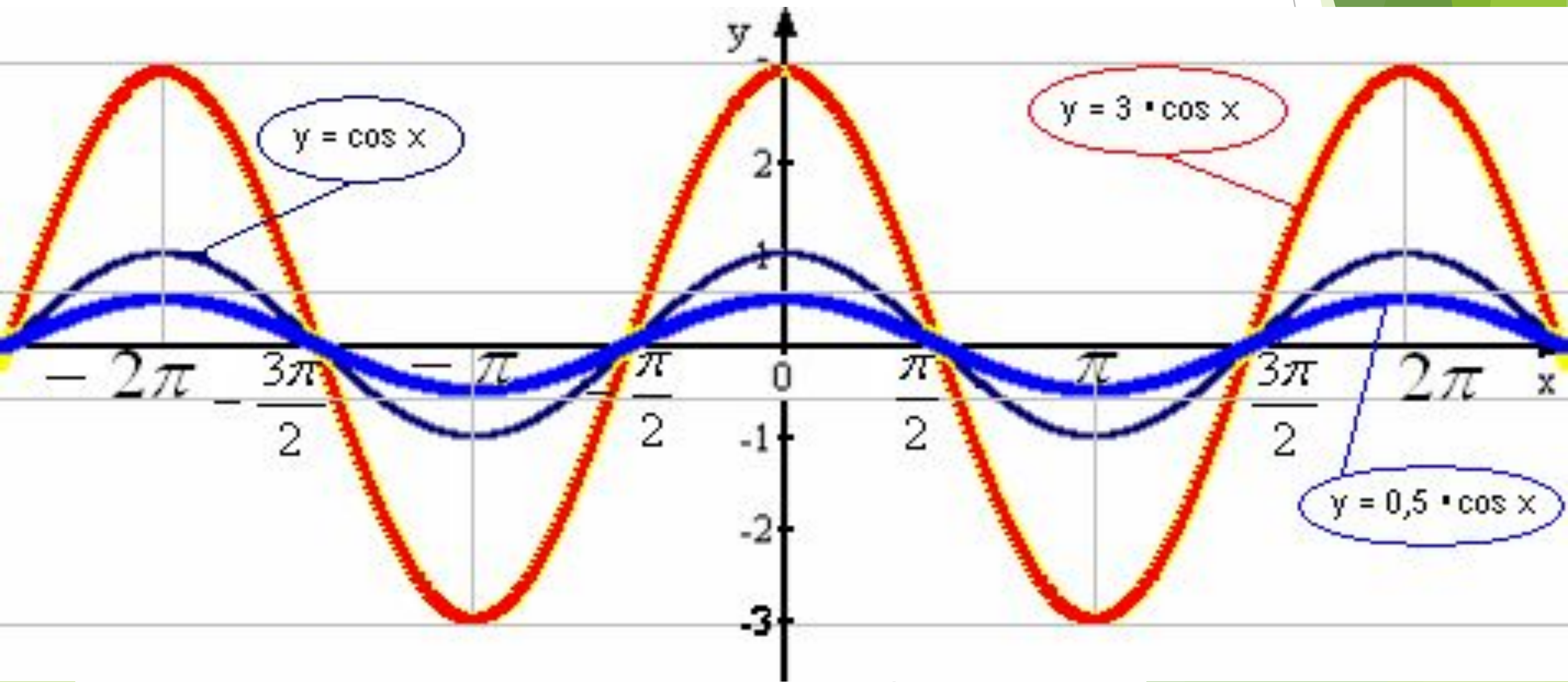
y = cos x + A (свойства)

- **Изменяются множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения; нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos x + 2.***

  - ***<u>E (f):</u> cos x + 2 = a ⇒ cos x = a – 2, т.к. – 1 ≤ y ≤ 1, то –1 ≤ a – 2 ≤ 1 ⇒ 1 ≤ a ≤ 3, т.е. y ∈ [1; 3].***
  - ***<u>Нули функции:</u> cos x + 2 = 0 ⇒ cos x = -2 данное уравнение не имеет корней т.к. |-2| > 1 ⇒ график данной функции не пересекает ось абсцисс.***
  - ***<u>f (x) > 0:</u> при любом значении x.***
  - ***<u>f (x) < 0:</u> нет.***
  - ***<u>y (наиб) = 3, при:</u> x = 2πn, n ∈ Z (т.к. cos x + 2 = 3 ⇒ cos x = 1 ⇒ x = 2πn, n ∈Z).***
  - ***<u>y (наим) = 1, при:</u> x = π + 2πn, n ∈Z (т.к. cos x + 2 = 1 ⇒ cos x = -1 ⇒ x = π + 2πn, n ∈ Z).***

y = k · cos x

- Растяжение графика функции y = cos x вдоль оси ординат относительно оси абсцисс в k раз, если k > 0 и сжатие в 1/k раз, если 0 < k < 1.
- __Например:__ *y = 3 • cos x;   y = 0,5 • cos x.*

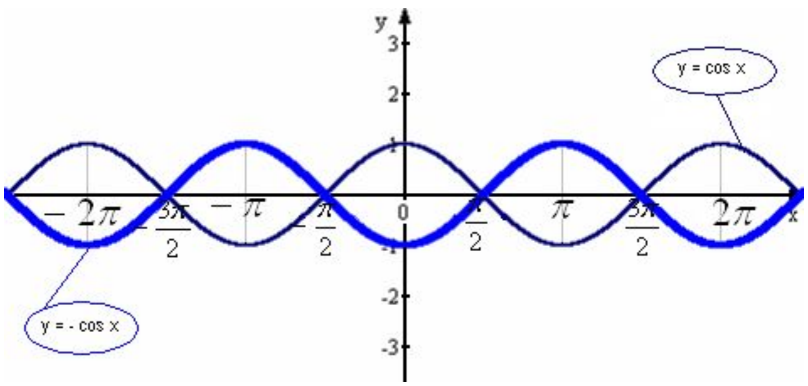


$y = k \cdot \cos x$ (свойства)

- **Изменяется множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения.**
- **Например:** $y = 3 \bullet \cos x$
  - ***E (f):*** $3 \bullet \cos x = a \Rightarrow \cos x = a/3$, *т.к.* $-1 \le y \le 1$, *то* $-1 \le a/3 \le 1 \Rightarrow -3 \le a \le 3$, *т.е.* $y \in [-3; 3]$.
  - ***Функция принимает наибольшее значение, равное 3, при:*** $x = 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $3\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z$).
  - ***Функция принимает наименьшее значение, равное – 3, при:*** $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $3\cos x = -3 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$).

y = - cos x

- Симметричное отражение графика функции y = cos x относительно оси абсцисс.

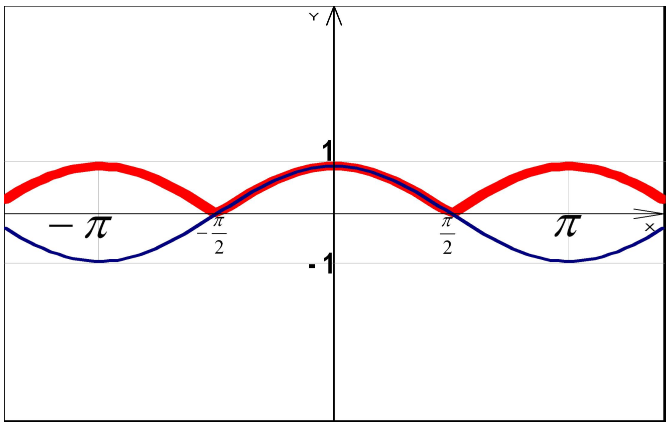


y = - cos x (свойства)

- **Изменяются промежутки возрастания (убывания); промежутки положительных (отрицательных) значений.**
  - ***<u>Функция возрастает</u> на отрезке [0; π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…***
  - ***<u>Функция убывает</u> на отрезке [π; 2π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…***
  - ***<u>Функция принимает положительные значения</u> на интервале (π/2; 3π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…***
  - ***<u>Функция принимает отрицательные значения</u> на интервале (-π/2; π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…***

y = | cos x |

- Часть графика, расположенная ниже оси абсцисс симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.

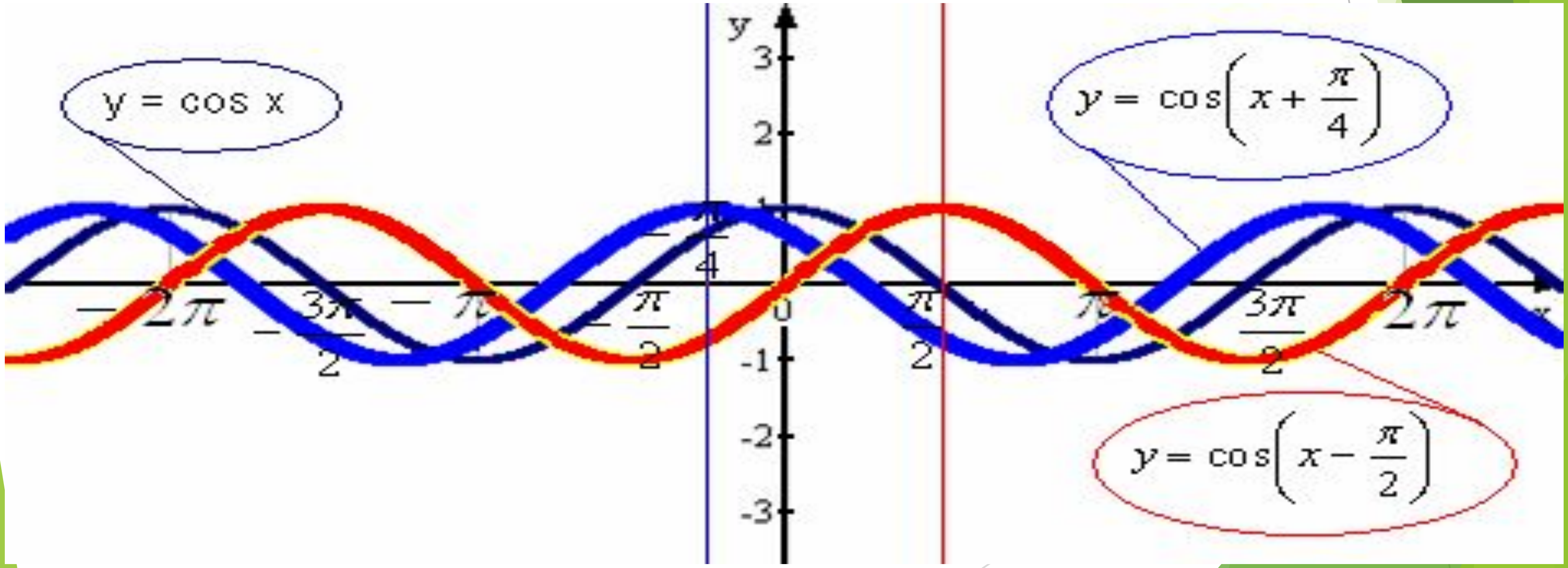


y = |cos x| (свойства)

- **Изменяются: множество значений функции; период; промежутки возрастания (убывания); наибольшее (наименьшее) значение.**
  - ***E (f):*** *y ∈[0; 1]*
  - ***Периодичность:*** *T = π*
  - ***Функция возрастает на промежутке*** *(π/2; π)+ сдвиги на πn, n∈Z*
  - ***Функция убывает на промежутке*** *(0; π/2) + сдвиги на πn, n∈Z*
  - ***f (x) > 0:*** *при любом значении x*
  - ***f (x) < 0:*** *нет*
  - ***y (наиб) = 1****, при x = 2πn, n∈Z*
  - ***y (наим) = 0****, при x = π/2 + πn, n∈Z*

y = cos (x – a)

- Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс на a единиц вправо, если a > 0, на |a| единиц влево, если a < 0.
- __Например:__ *y = cos (x - π/2); y = cos (x +π/4).*



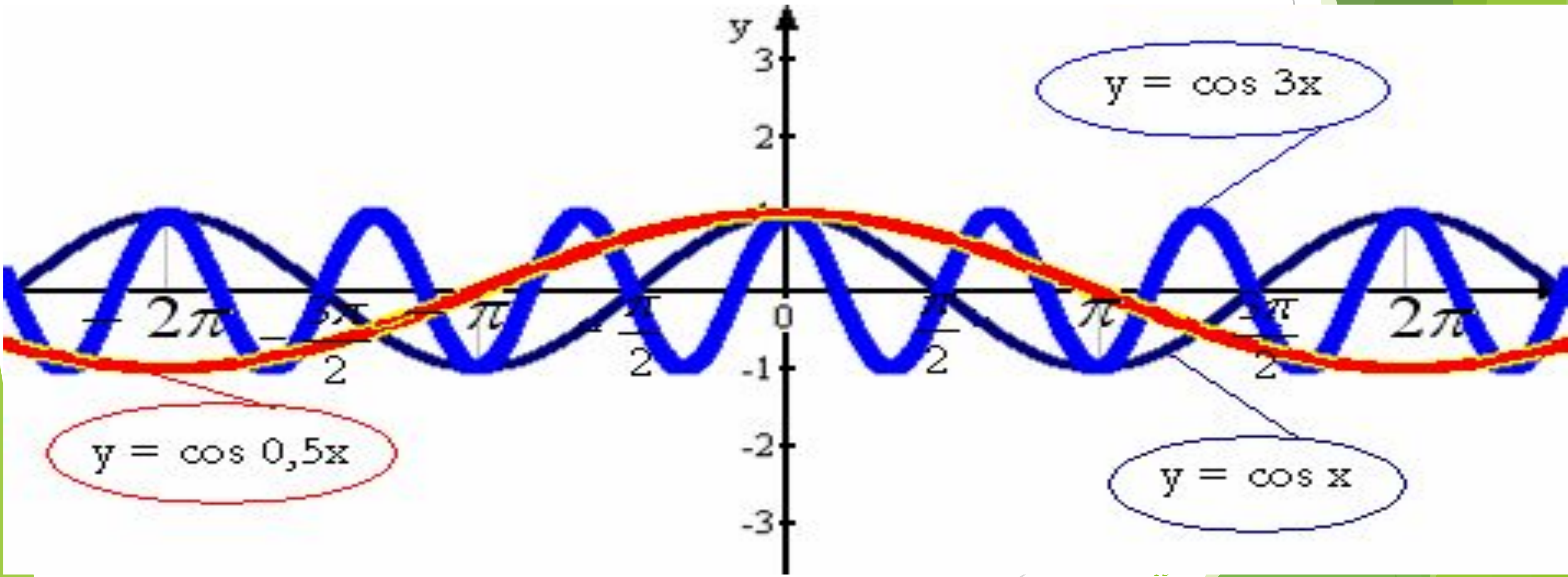
y = cos (x – a) (свойства)

- **Изменяются: четность; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**

- **<u>Например:</u> y = cos (x + π/4)**
  - ***<u>Четность:</u> f (x) ≠ f (-x) ≠ -f (x), т.к. cos (-(x + π/4)) = cos (-x - π/4)***
  - ***<u>Функция возрастает</u> на [3π/4; 11π/4] + сдвиги на 2πn, n∈Z***
  - ***<u>Функция убывает</u> на [-π/4; 3π/4]+ сдвиги на 2πn, n∈Z***
  - ***<u>f (x) =0</u> при x = π/4 +πn, n∈Z***
  - ***<u>f (x) > 0</u> при x∈ (-3π/4; π/4) + сдвиги на 2πn, n∈Z***
  - ***<u>f((x) <0</u> при x∈ (π/4; 5π/4) + сдвиги на 2πn, n∈Z***

$y = \cos (k \cdot x)$

- **Сжатие графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс относительно оси ординат в k раз, если k > 1 , и растяжение в 1/k раз, если 0 < k < 1.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos 3x; y = cos 0,5x.***

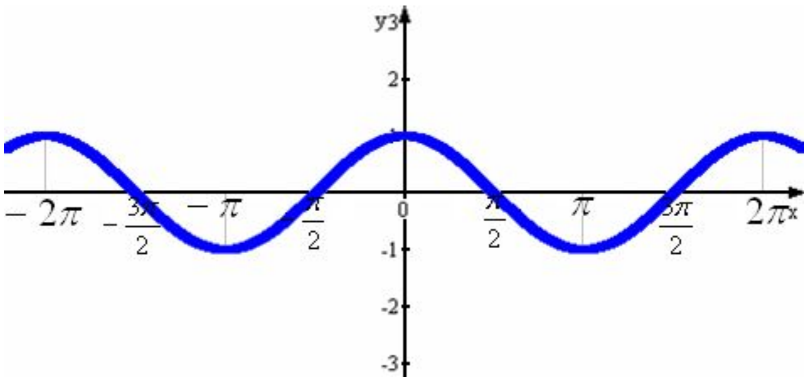


$y = \cos(k \cdot x)$ (свойства)

- **Изменяются: период; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos 3x***
  - ***<u>Период:</u>*** ***T = 2π/3, (т.к. наименьший положительный период функции y = cos x равен 2π, то 3T = 2π ⇒ T = 2π/3).***
  - ***<u>Функция возрастает</u>*** ***на [π/3; 2π/3] + сдвиги на 2πn/3, n∈Z.***
  - ***<u>Функция убывает</u>*** ***на [0; π/3] + сдвиги на 2πn/3, n∈Z.***
  - ***<u>f (x) = 0</u>*** ***при x = π/6 + πn/3.***
  - ***<u>f (x) > 0</u>*** ***при x∈ (-π/6; π/6) + сдвиги на 2πn/3, n ∈ Z.***
  - ***<u>f (x) < 0</u>*** ***при x∈ (π/6; π/2) + сдвиги на 2πn/3, n ∈ Z.***

y = cos (- x)

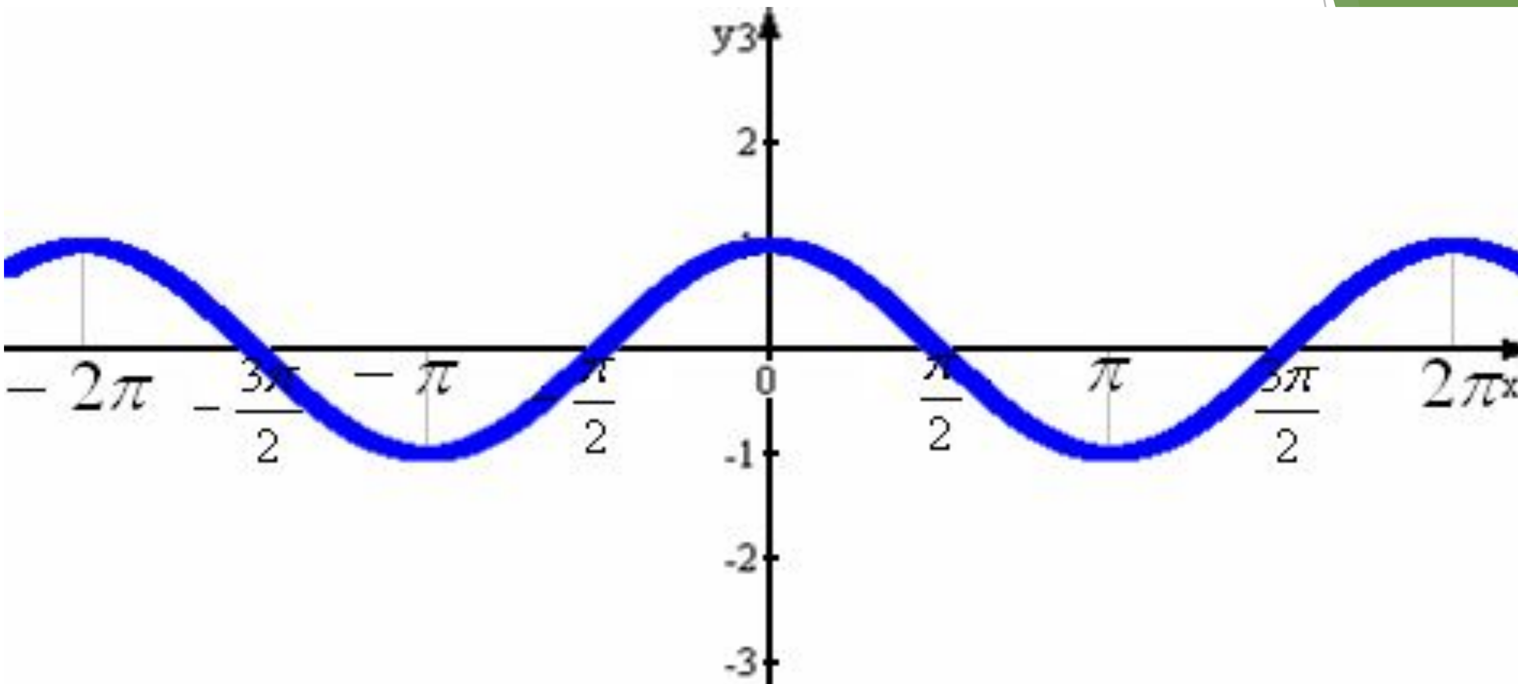
- Симметричное отражение относительно оси абсцисс.



y = cos (-x) (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция y = cos x – четная и cos (-x) = cos (x) ⇒ все свойства функции y = cos x справедливы и для функции y = cos (-x)

y = cos | x |

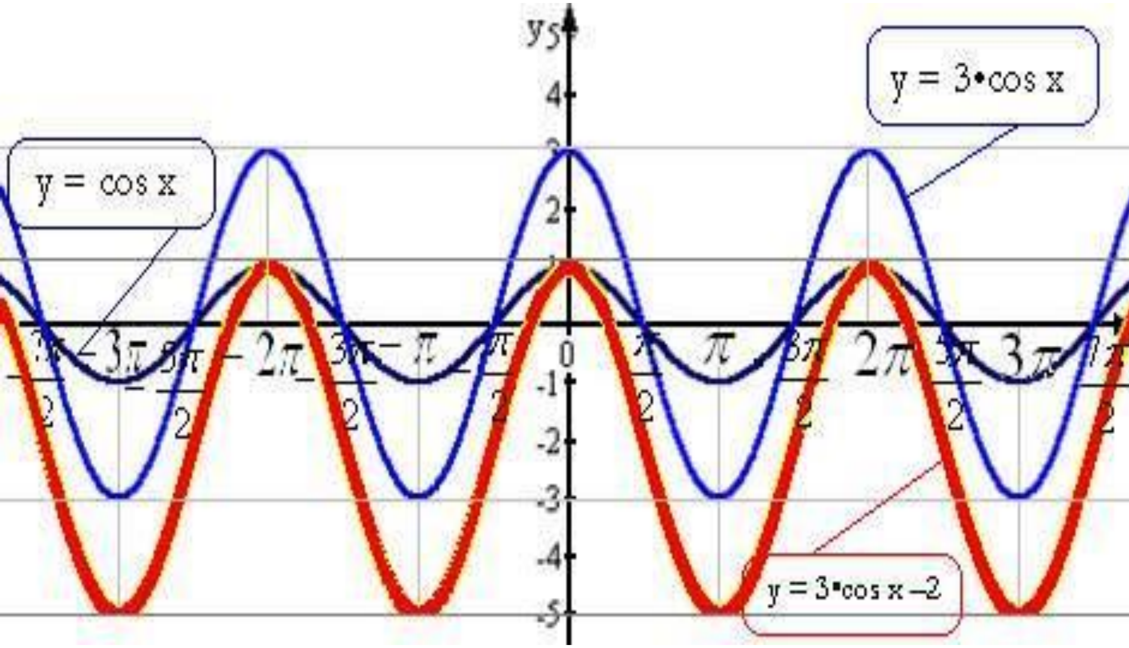


- **Часть графика, расположенная в области x ≥ 0, остается без изменения, а его часть для области x ≤ 0 заменяется симметричным отображением относительно оси ординат части графика для x ≥ 0.**

$y = \cos|x|$ (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция $y = \cos x$ – четная и $\cos|x| = \cos(-x) = \cos(x) \Rightarrow$ все свойства функции $y = \cos x$ справедливы и для функции $y = \cos|x|$

y = 3 · cos x – 2



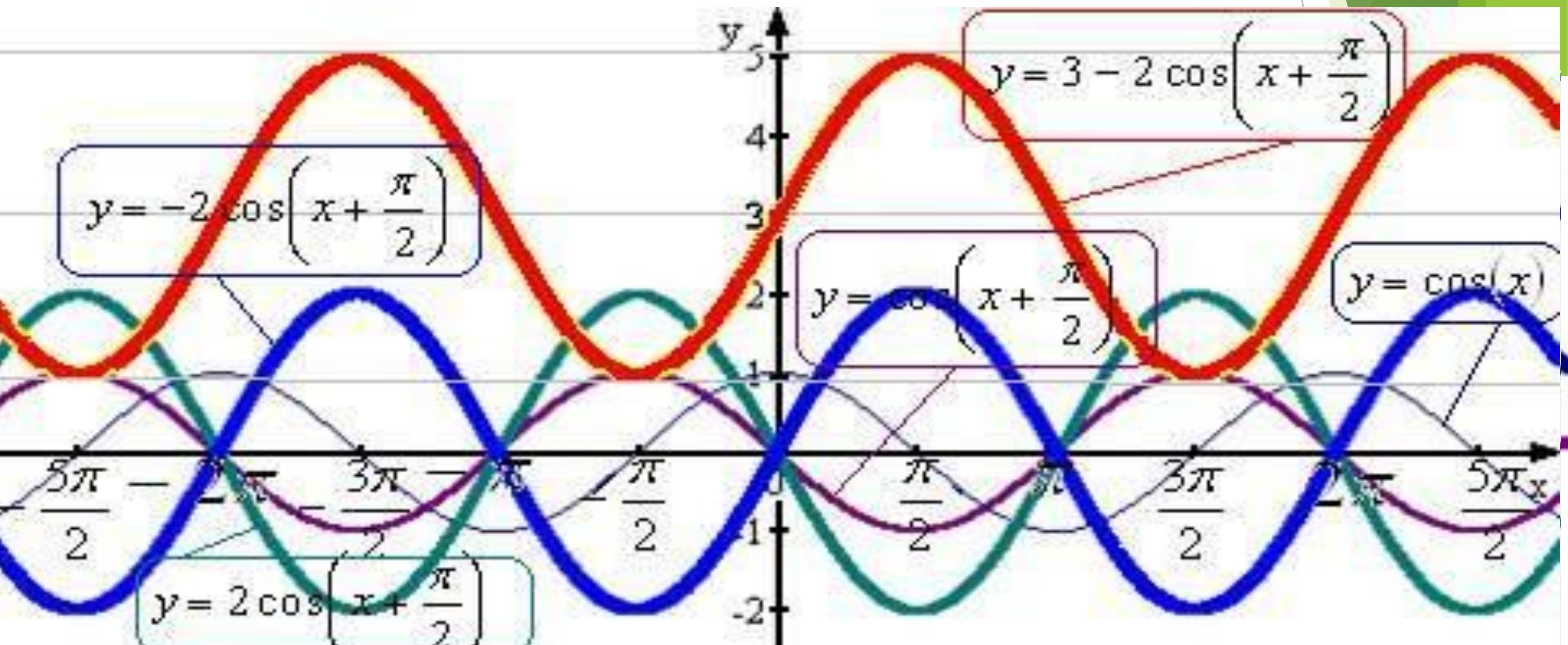
- **Построить график функции y = cos x;**
- **Построить график функции y = 3•cos x *(растяжение графика функции y = cos x вдоль оси OY в 3 раза);***
- **Построить график функции y = 3•cos x –2 *(параллельный перенос графика y = 3•cos x вдоль оси OY на 2 единицы вниз).***

Свойства функции y = 3 · cos x – 2

- **Область определения:** *D(f): x ∈ R;*
- **Множество значений:** *y ∈ [- 5; 1], т.к.* $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos x \le 3 \Rightarrow -5 \le 3\cos x - 2 \le 1$;
- **Периодичность:** $T = 2\pi$;
- **Четность:** *четная, т.к.* $3\cos(-x) - 2 = 3\cos x - 2 \Rightarrow$ *график функции симметричен относительно оси OY;*
- **Возрастает:** *на отрезке* $[\pi; 2\pi]$ *и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на* $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2; \pm 3\ldots$;
- **Убывает:** *на отрезке* $[0; \pi]$ *и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на* $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots$

$y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- **Построим график функции $y = \cos x$;**
- **Построим график функции $y = \cos(x + \pi/2)$(параллельный перенос графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс на $\pi/2$ единиц влево);**
- **Построим график функции $y = 2\cos(x + \pi/2)$(растяжение графика функции $y = \cos(x + \pi/2)$ вдоль оси OY в 2 раза);**
- **Построим график функции $y = -2\cos(x + \pi/2)$(симметричное отражение графика функции $y = 2\cos(x + \pi/2)$ относительно оси OX);**
- **Построим график функции $y = 3 - 2\cos(x + \pi/2)$ (параллельный перенос графика функции $y = -2\cos(x + \pi/2)$ вдоль оси OY на 3 единицы вверх).**



Свойства функции $y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- **Область определения**: *D(f): $x \in R$;*
- **Множество значений**: *$y \in [1; 5]$, т.к. $-1 \le \cos(x + \pi/2) \le 1 \Rightarrow$*

  $-2 \le 2\cos(x + \pi/2) \le 2 \Rightarrow 1 \le 3 - 2\cos(x + \pi/2) \le 5$;
- **Периодичность**: *$T = 2\pi$;*
- **Четность**: *ни четная, ни нечетная, т.к. $y(-x) \ne y(x) \ne -y(x)$ (график не симметричен ни оси OY, ни началу координат)*
- **Возрастает**: *на $[3\pi/2; 5\pi/2]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \pm3\ldots$*
- **Убывает:** *на $[\pi/2; 3\pi/2]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm1, \pm2, \pm3\ldots$*
- **Функция принимает значения равные:**
  - *нулю: нет (уравнение $3 - 2\cos(x + \pi/2) = 0$ не имеет корней т.к. $|- 3/2| > 1$);*
  - *положительные: при любом x;*
  - *наибольшее, равное 5: при $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.*
  - *наименьшее, равное 1: при $x = - \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.*