Функция y = cos x

Ее свойства и график

Преобразование графика функции y = cos x

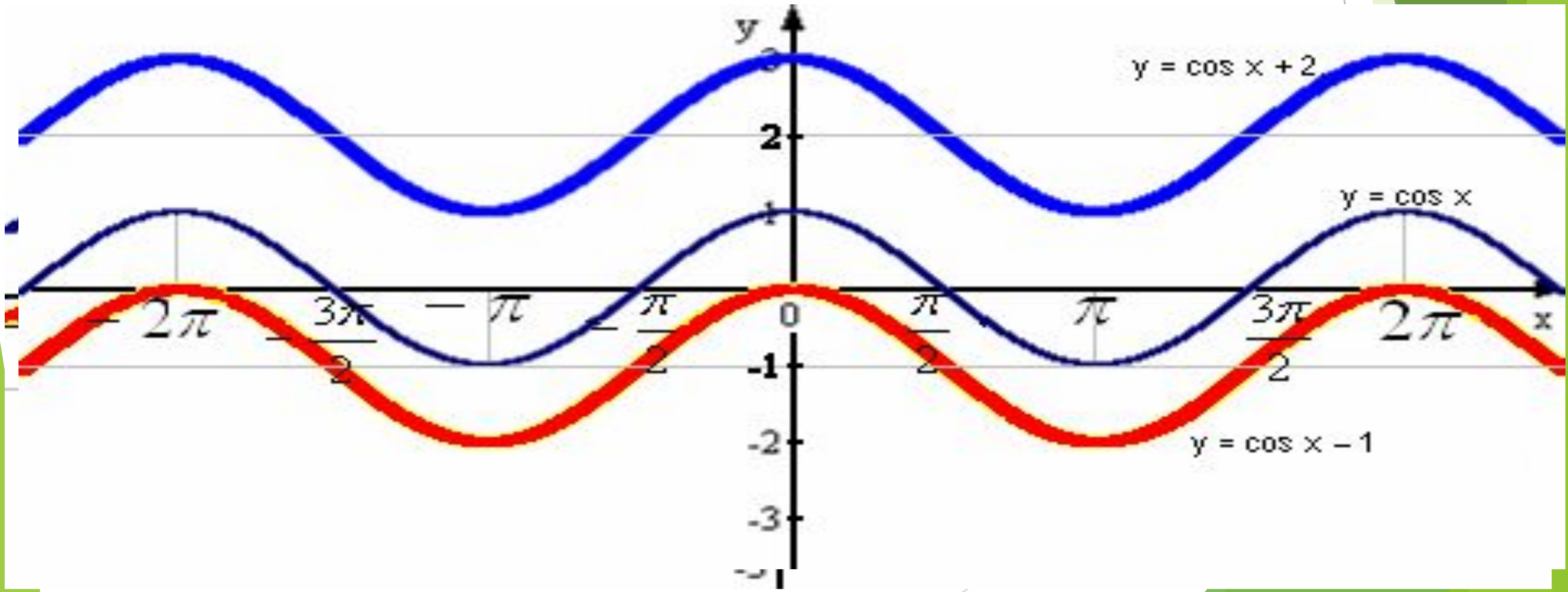
- Изменение функции
  - y = cos x + A
  - y = k · cos x
  - y = - cos x
  - y = |cos x|

- Изменение аргумента
  - y = cos (x – a)
  - y = cos (k · x)
  - y = cos (- x)
  - y = cos |x|

y = cos x + A

- Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси ординат на A единиц вверх, если A > 0 и на |A| единиц вниз, если A < 0.

- **<u>Например:</u>** $y = \cos x + 2$; $y = \cos x - 1$.



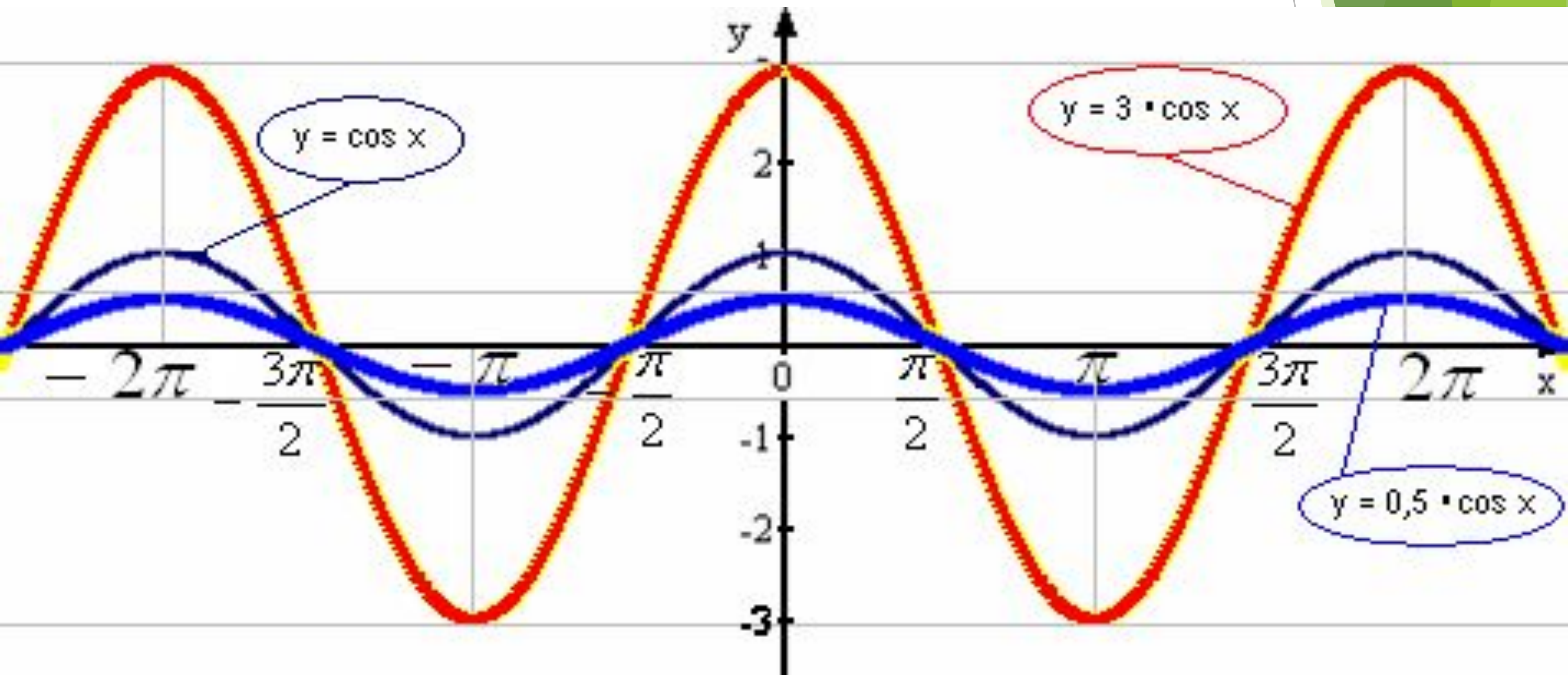
$y = \cos x + A$ (свойства)

- **Изменяются множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения; нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **<u>Например:</u>** ***y = cos x + 2.***

  - ***<u>E (f):</u> cos x + 2 = a ⇒ cos x = a – 2, т.к. – 1 ≤ y ≤ 1, то –1 ≤ a – 2 ≤ 1 ⇒ 1 ≤ a ≤ 3, т.е. y ∈ [1; 3].***
  - ***<u>Нули функции:</u> cos x + 2 = 0 ⇒ cos x = -2 данное уравнение не имеет корней т.к. |-2| > 1 ⇒ график данной функции не пересекает ось абсцисс.***
  - ***<u>f (x) > 0:</u> при любом значении x.***
  - ***<u>f (x) < 0:</u> нет.***
  - ***<u>y (наиб) = 3, при:</u> x = 2πn, n ∈ Z (т.к. cos x + 2 = 3 ⇒ cos x = 1 ⇒ x = 2πn, n ∈Z).***
  - ***<u>y (наим) = 1, при:</u> x = π + 2πn, n ∈Z (т.к. cos x + 2 = 1 ⇒ cos x = -1 ⇒ x = π + 2πn, n ∈ Z).***

$y = k \cdot \cos x$

- Растяжение графика функции $y = \cos x$ вдоль оси ординат относительно оси абсцисс в k раз, если $k > 0$ и сжатие в 1/k раз, если $0 < k < 1$.
- **<u>Например:</u>** $y = 3 \cdot \cos x$; $y = 0,5 \cdot \cos x$.

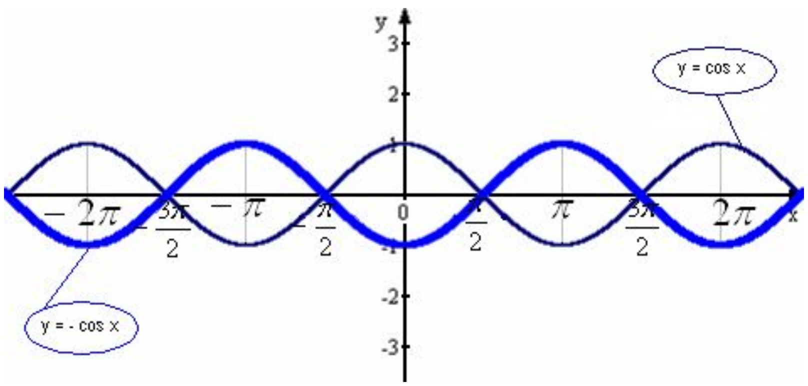


$y = k \cdot \cos x$ (свойства)

- **Изменяется множество значений функции; наибольшее (наименьшее) значения.**
- **Например:** $y = 3 \cdot \cos x$
  - ***E (f):*** $3 \cdot \cos x = a \Rightarrow \cos x = a/3$, *т.к.* $-1 \le y \le 1$, *то* $-1 \le a/3 \le 1 \Rightarrow -3 \le a \le 3$, *т.е.* $y \in [-3; 3]$.
  - ***Функция принимает наибольшее значение, равное 3, при:*** $x = 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $3\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z$).
  - ***Функция принимает наименьшее значение, равное – 3, при:*** $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ (*т.к.* $3\cos x = -3 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$).

y = - cos x

- **Симметричное отражение графика функции y = cos x относительно оси абсцисс.**

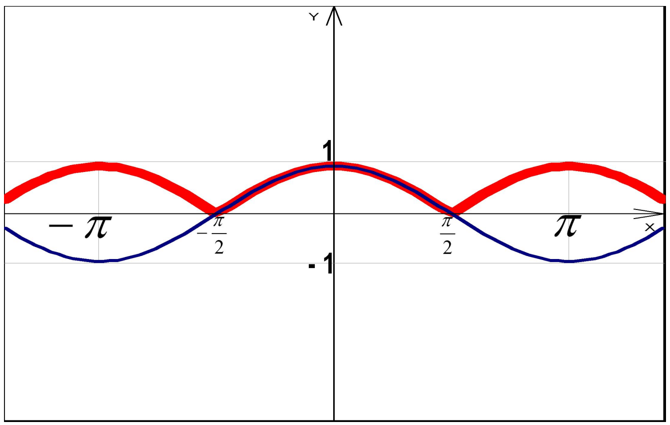


y = - cos x (свойства)

- **Изменяются промежутки возрастания (убывания); промежутки положительных (отрицательных) значений.**
  - ***Функция возрастает*** ***на отрезке [0; π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…***
  - ***Функция убывает*** ***на отрезке [π; 2π] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn, n = ±1, ±2, ±3…***
  - ***Функция принимает положительные значения*** ***на интервале (π/2; 3π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…***
  - ***Функция принимает отрицательные значения*** ***на интервале (-π/2; π/2) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn, n = ±1, ±2…***

y = | cos x |

► Часть графика, расположенная ниже оси абсцисс симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.

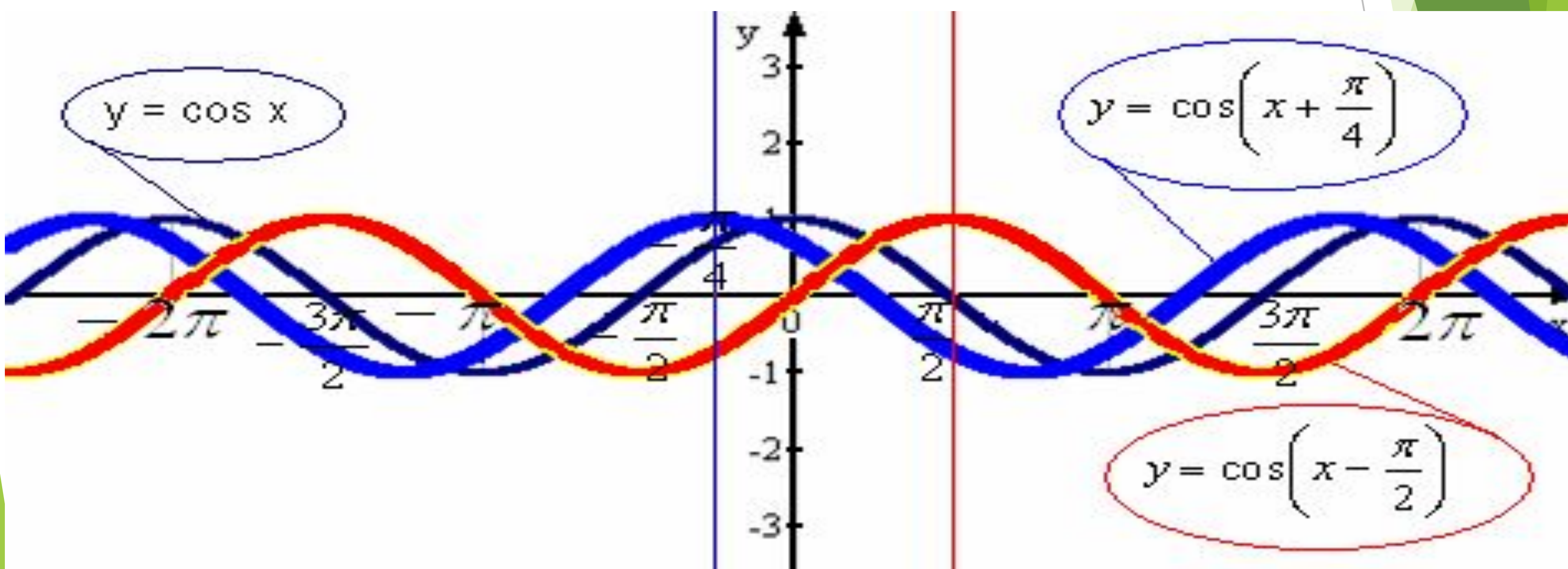


y = |cos x| (свойства)

- **Изменяются: множество значений функции; период; промежутки возрастания (убывания); наибольшее (наименьшее) значение.**
  - ***E (f):*** *y ∈[0; 1]*
  - ***Периодичность:*** *T = π*
  - ***Функция возрастает на промежутке*** *(π/2; π)+ сдвиги на πn, n∈Z*
  - ***Функция убывает на промежутке*** *(0; π/2) + сдвиги на πn, n∈Z*
  - ***f (x) > 0:*** *при любом значении x*
  - ***f (x) < 0:*** *нет*
  - ***y (наиб) = 1****, при x = 2πn, n∈Z*
  - ***y (наим) = 0****, при x = π/2 + πn, n∈Z*

y = cos (x – a)

- Параллельный перенос графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс на a единиц вправо, если a > 0, на |a| единиц влево, если a < 0.
- <u>**Например:**</u> ***y = cos (x - π/2); y = cos (x +π/4).***



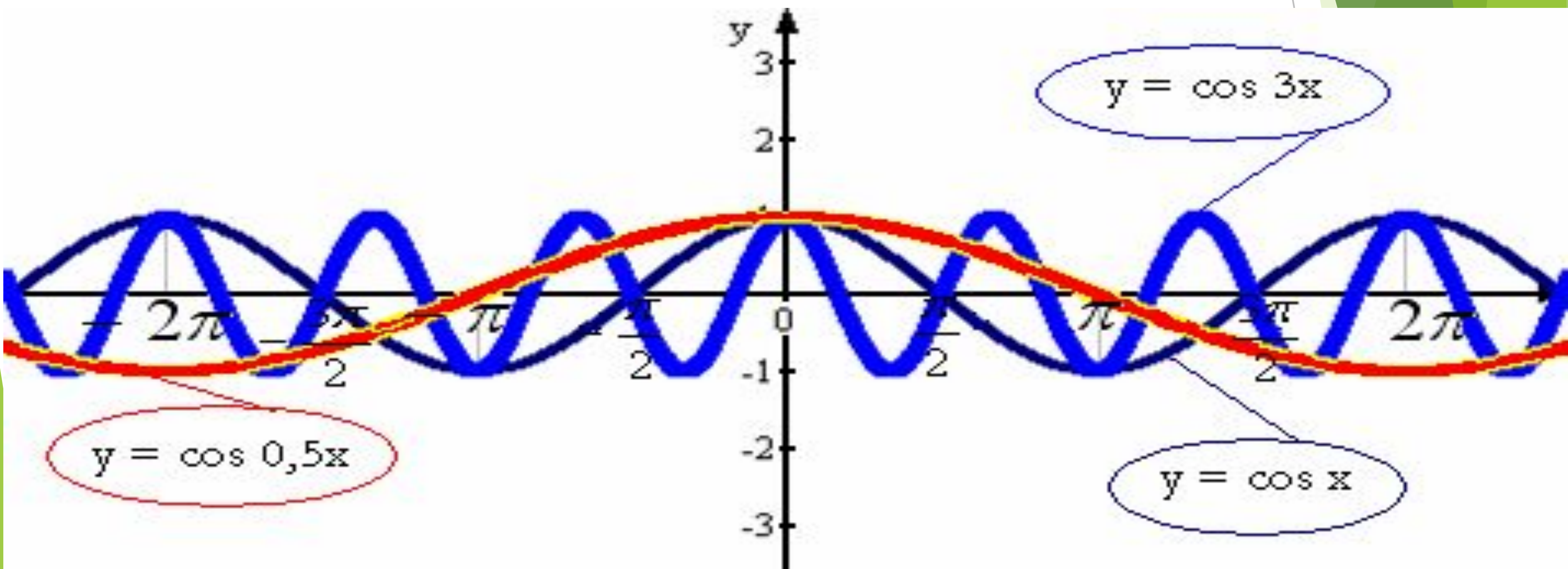
$y = \cos(x - a)$ (свойства)

- **Изменяются: четность; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**

- **<u>Например:</u> $y = \cos(x + \pi/4)$**
  - ***<u>Четность:</u>*** $f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$, *т.к.* $\cos(-(x + \pi/4)) = \cos(-x - \pi/4)$
  - ***<u>Функция возрастает</u>*** **на** $[3\pi/4; 11\pi/4]$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$
  - ***<u>Функция убывает</u>*** **на** $[-\pi/4; 3\pi/4]$+ *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$
  - <u>$f(x) = 0$</u> *при* $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$
  - <u>$f(x) > 0$</u> *при* $x \in (-3\pi/4; \pi/4)$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$
  - <u>$f((x) < 0$</u> *при* $x \in (\pi/4; 5\pi/4)$ + *сдвиги на* $2\pi n$, $n \in Z$

y = cos (k · x)

- Сжатие графика функции y = cos x вдоль оси абсцисс относительно оси ординат в k раз, если k > 1 , и растяжение в 1/k раз, если 0 < k < 1.
- **Например:** *y = cos 3x; y = cos 0,5x.*

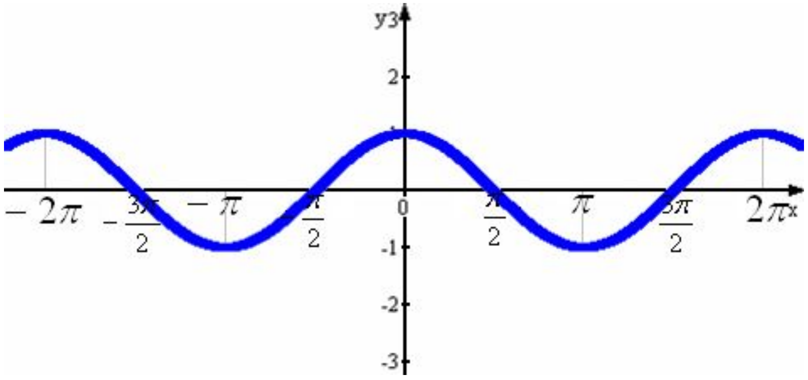


y = cos (k · x) (свойства)

- **Изменяются: период; промежутки возрастания (убывания); нули функции; промежутки положительных (отрицательных) значений.**
- **<u>Например:</u>** $y = \cos 3x$
  - ***<u>Период:</u>*** *$T = 2\pi/3$, (т.к. наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен 2π, то $3T = 2\pi \Rightarrow$ $T = 2\pi/3$).*
  - ***<u>Функция возрастает</u>*** *на $[\pi/3; 2\pi/3]$ + сдвиги на $2\pi n/3$, $n \in Z$.*
  - ***<u>Функция убывает</u>*** *на $[0; \pi/3]$ + сдвиги на $2\pi n/3$, $n \in Z$.*
  - ***<u>$f(x) = 0$</u>*** *при $x = \pi/6 + \pi n/3$.*
  - ***<u>$f(x) > 0$</u>*** *при $x \in (-\pi/6; \pi/6)$ + сдвиги на $2\pi n/3$, $n \in Z$.*
  - ***<u>$f(x) < 0$</u>*** *при $x \in (\pi/6; \pi/2)$ + сдвиги на $2\pi n/3$, $n \in Z$.*

y = cos (- x)

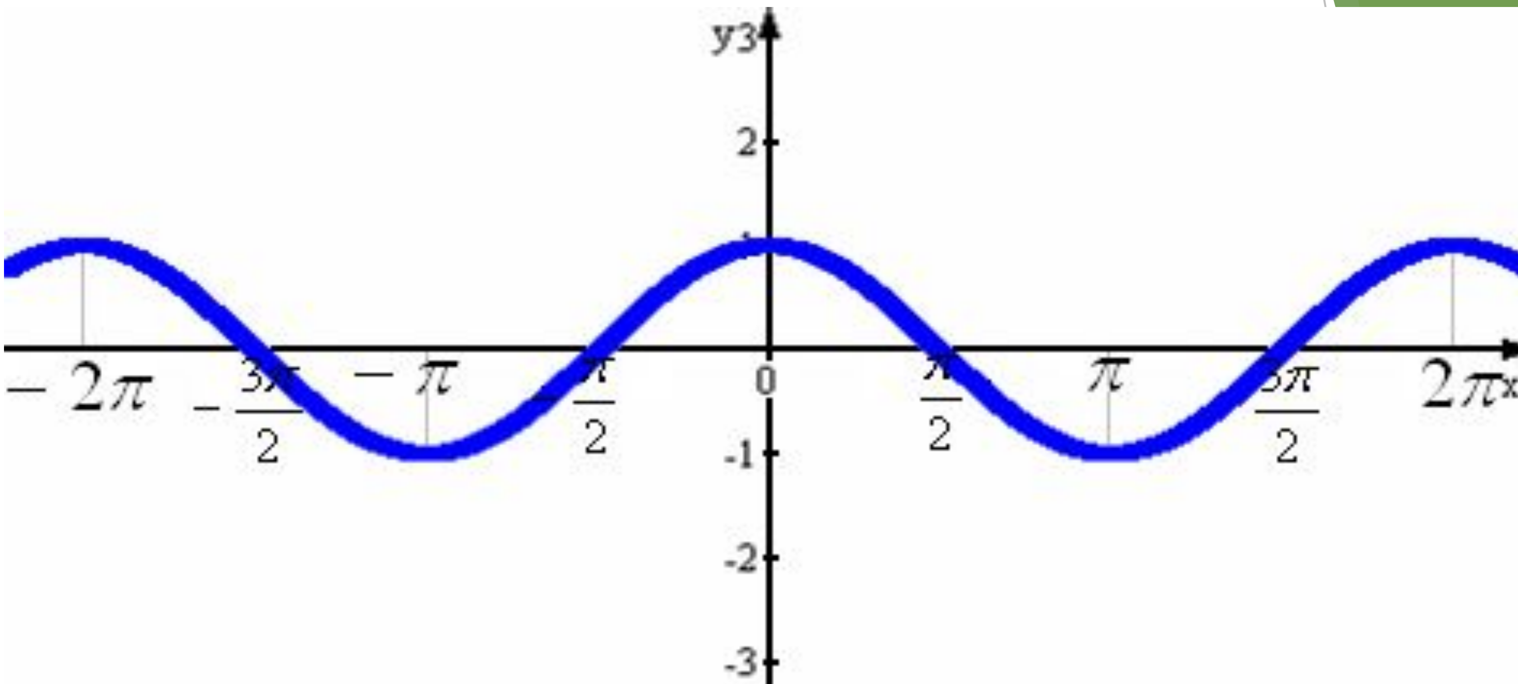
- Симметричное отражение относительно оси абсцисс.



y = cos (-x) (свойства)

- **В данном случае свойства функции не меняются, так как функция y = cos x – четная и cos (-x) = cos (x) ⇒ все свойства функции y = cos x справедливы и для функции y = cos (-x)**

y = cos | x |

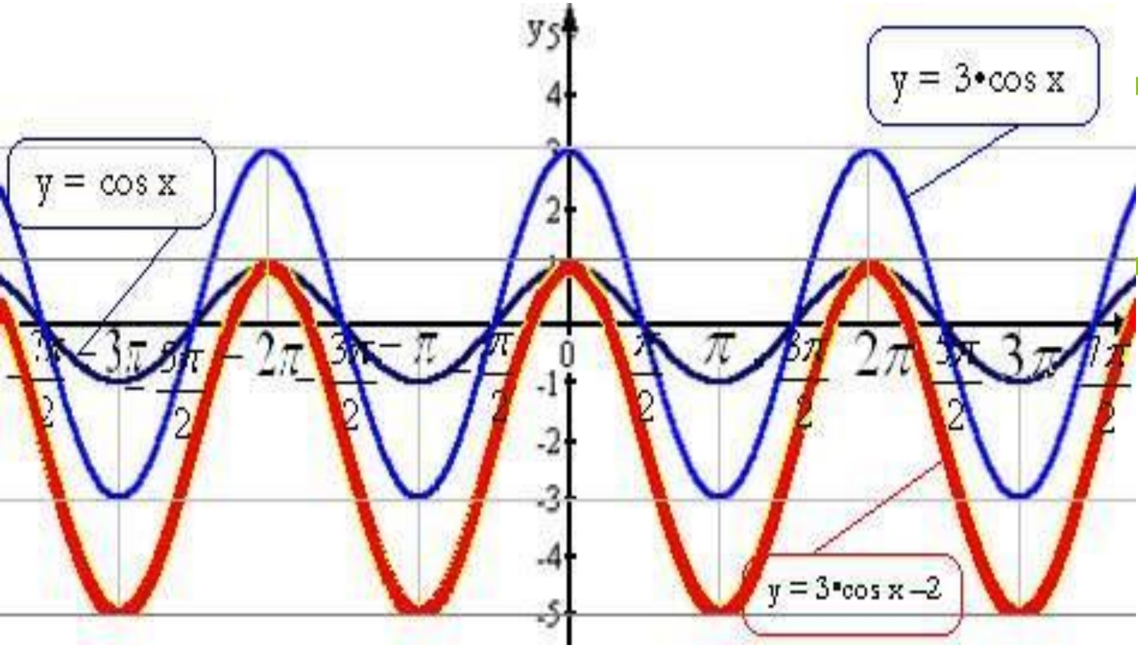


- Часть графика, расположенная в области x ≥ 0, остается без изменения, а его часть для области x ≤ 0 заменяется симметричным отображением относительно оси ординат части графика для x ≥ 0.

$y = \cos|x|$ (свойства)

- В данном случае свойства функции не меняются, так как функция $y = \cos x$ – четная и $\cos|x| = \cos(-x) = \cos(x) \Rightarrow$ все свойства функции $y = \cos x$ справедливы и для функции $y = \cos|x|$

y = 3 · cos x – 2



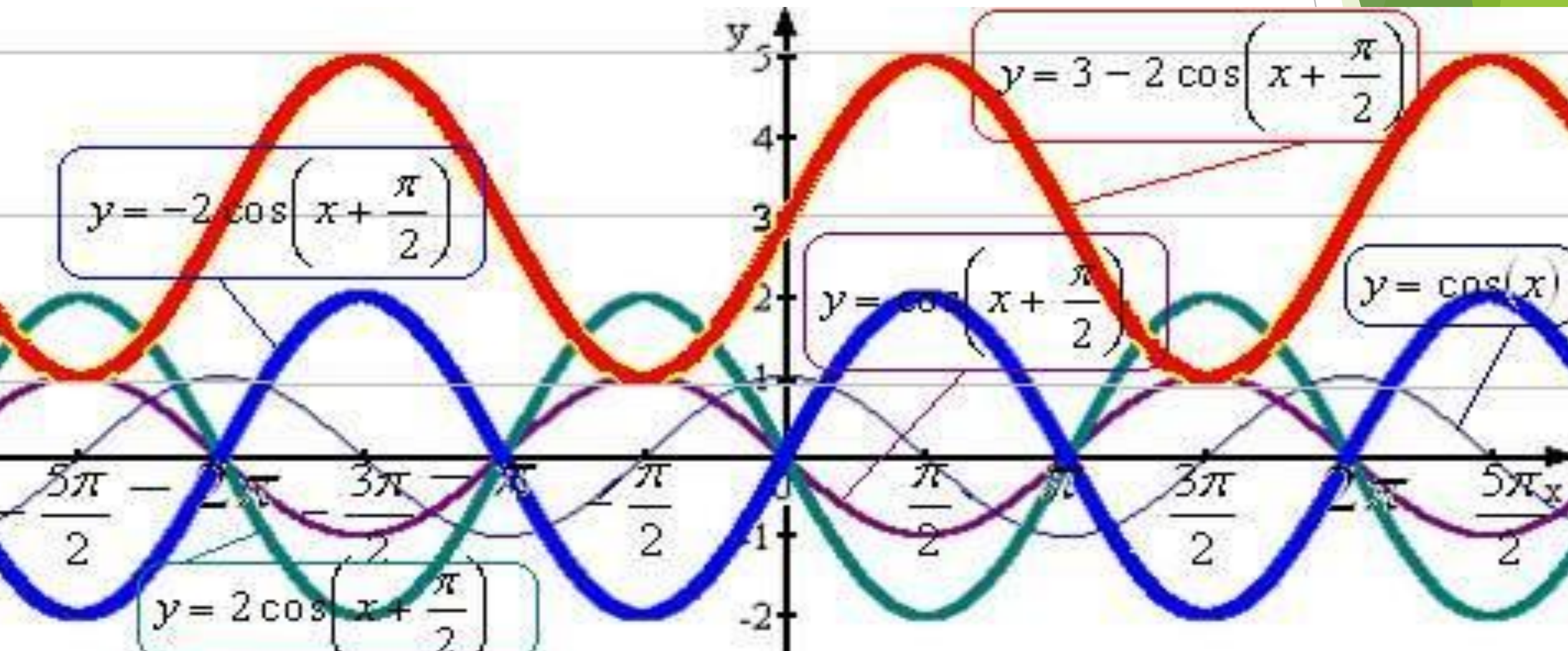
- **Построить график функции y = cos x;**
- **Построить график функции y = 3•cos x *(растяжение графика функции y = cos x вдоль оси OY в 3 раза);***
- **Построить график функции y = 3•cos x –2 *(параллельный перенос графика y = 3•cos x вдоль оси OY на 2 единицы вниз).***

Свойства функции $y = 3 \cdot \cos x - 2$

- **Область определения:** $D(f)$: $x \in R$;
- **Множество значений:** $y \in [-5; 1]$, т.к. $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos x \le 3 \Rightarrow -5 \le 3\cos x - 2 \le 1$;
- **Периодичность:** $T = 2\pi$;
- **Четность:** четная, т.к. $3\cos(-x) - 2 = 3\cos x - 2 \Rightarrow$ график функции симметричен относительно оси OY;
- **Возрастает:** на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2; \pm 3 \ldots$;
- **Убывает:** на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

$y = 3 – 2 \cdot \cos (x + \pi/2)$

- Построим график функции $y = \cos x$;
- Построим график функции $y = \cos (x + \pi/2)$(параллельный перенос графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс на $\pi/2$ единиц влево);
- Построим график функции $y = 2\cos(x + \pi/2)$(растяжение графика функции $y = \cos(x + \pi/2)$ вдоль оси OY в 2 раза);
- Построим график функции $y = - 2\cos(x + \pi/2)$(симметричное отражение графика функции $y = 2\cos (x + \pi/2)$ относительно оси OX);
- Построим график функции $y = 3 – 2\cos (x + \pi/2)$ (параллельный перенос графика функции $y = - 2\cos (x + \pi/2)$ вдоль оси OY на 3 единицы вверх).



Свойства функции $y = 3 - 2 \cdot \cos(x + \pi/2)$

- **Область определения**: $D(f)$: $x \in R$;
- **Множество значений**: $y \in [1; 5]$, т.к. $-1 \le \cos(x + \pi/2) \le 1 \Rightarrow$
  $-2 \le 2\cos(x + \pi/2) \le 2 \Rightarrow 1 \le 3 - 2\cos(x + \pi/2) \le 5$;
- **Периодичность**: $T = 2\pi$;
- **Четность**: *ни четная, ни нечетная, т.к.* $y(-x) \ne y(x) \ne -y(x)$ *(график не симметричен ни оси OY, ни началу координат)*
- **Возрастает**: *на* $[3\pi/2; 5\pi/2]$ *и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на* $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$
- **Убывает:** *на* $[\pi/2; 3\pi/2]$ *и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на* $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$
- **Функция принимает значения равные:**
  - ***нулю***: *нет (уравнение* $3 - 2\cos(x + \pi/2) = 0$ *не имеет корней т.к.* $|-3/2| > 1$*);*
  - ***положительные***: *при любом* x;
  - ***наибольшее, равное 5***: *при* $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.
  - ***наименьшее, равное 1***: *при* $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.