ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
УЛЬЯНОВСКИЙ ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
МИНИСТЕРСТВА ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РФ

ЦМК Общеобразовательных дисциплин

Презентация к практическому занятию № 3
по дисциплине «Математика»
для студентов 2 курса
на тему:

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Цели занятия:

- научить решать дифференциальные уравнения;
- научить применять дифференциальные уравнения к решению задач с медицинским содержанием;
- провести контроль практических умений по теме: «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Определение

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные различных порядков по x.

Общий вид дифференциального уравнения *n*-го порядка:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Порядок дифференциального уравнения

Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется **порядком** этого уравнения.

Примеры.

Первый порядок $y' = xy$

Второй порядок $y'' + 2y' + y = 0$

Третий порядок $y''' = e^{2x}$

ДУ первого порядка

Уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется **дифференциальным уравнением первого порядка**:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если уравнение **разрешено относительно производной**, то оно имеет вид:

$$y' = f(x, y)$$

Решение ДУ

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая после подстановки в уравнение обращает его в тождество относительно x.

Решить, или **проинтегрировать**, данное дифференциальное уравнение – означает найти все его решения в заданной области.

График решения называется **интегральной кривой**.

Общее и частное решение

Общим решением дифференциального уравнения называется решение, которое содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, которое получается из общего, если приписать входящим в него произвольным постоянным определенные значения.

Задача Коши

Задача нахождения решения дифференциального уравнения:

$$y' = f(x, y)$$

удовлетворяющего **начальному условию:**

$$y(x_0) = y_0$$

где x_0 и y_0 - заданные числа, называется **задачей Коши** для уравнения первого порядка.

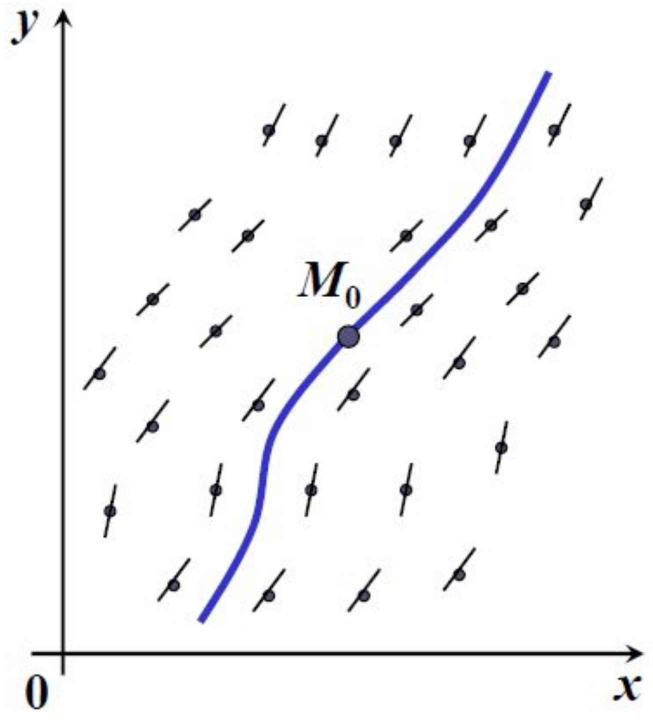
Геометрический смысл

Решить задачу Коши

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

означает **найти интегральную кривую** дифференциального уравнения, проходящую через заданную точку M_0 (x_0, y_0).



ДУ с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение, в котором путем преобразований переменные могут быть разделены, называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными**.

Его можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

Алгоритм решения ДУ

1. Уединить производную (перенести ее в левую часть равенства).
2. Заменить y' а $\frac{dy}{dx}$
3. Разделить переменные.
4. Проинтегрировать обе части уравнения.
5. По начальным условиям определить значение константы.

Пример

Решить линейное однородное уравнение:

$$y' + x^2 \cdot y = 0$$

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^3}{3} + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$$

Проверьте ответ!

Пример

Требуется найти решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y(2) = 6$$

1. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

2. Теперь интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

3. Получаем:

$$\ln|y| = \ln|x+1| + \ln|C| = \ln|C(x+1)|$$

$$y = C(x+1)$$

4. По начальному условию определяем значение константы:

$$6 = C(2+1) \Rightarrow C = 2$$

Ответ. Решение дифференциального уравнения:

$$y = 2(x+1)$$

Решение практических задач

Концентрация лекарственного вещества в крови животного уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 *мг/л*, а через 23 ч уменьшилась вдвое.

Решение

Скорость изменения концентрации и концентрация C в любой момент времени t связана соотношением:

$$-\frac{dC}{dt} = kC,$$

где k — коэффициент пропорциональности, который не зависит от времени. Знак «–» поставлен потому, что концентрация убывает с ростом времени.

Решаем это уравнение 1-го порядка методом разделения переменных:

$$\frac{dC}{C} = -kdt.$$

После интегрирования имеем:

$$\ln C = -kt + \ln C_0, \qquad C = C_0 e^{-kt}.$$

Подставляя сюда концентрацию при $t = 0$, найдем $C_0 = 0{,}2$ *мг/л*.

При $t = 23$ часа $0{,}1 = 0{,}2e^{-23k}$ или $2 = e^{23k}$.

$$k = \frac{\ln 2}{23} = \frac{0{,}69}{23} = 0{,}03\ ч^{-1}.$$

Закон изменения концентрации: $C(t) = 0{,}2e^{-0{,}03t}$ *(мг/л)*.

Решить уравнения

1. $y' = \dfrac{ye^x}{1+e^x}$

2. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$

3. $(1+y^2)dx - xydy = 0,\ y(1) = 0.$

Найти общие решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

1. $y' = y^2 \cos x$ 2. $yy' + x = 0$

Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\square' = \frac{\square}{4\square}, \square_0 = -10, \square_0 = 16$$

Популяция бактерий x(t) растет так, что скорость ее роста в момент времени t (t - часы) равна одной десятой от размера популяции. Описать этот процесс роста дифференциальным уравнением. Чему равен размер популяции спустя 10 часов, если начальное условие x(0) = 1000?

Скорость растворения лекарственного вещества в таблетках пропорциональна количеству лекарства в таблетке. Известно, что при t = 0 m = m_0. Найти закон растворения таблетки (т.е. закон изменения массы), если период полурастворения таблетки равен Т.

Домашнее задание

- Выучить определения
- Найти общие решения дифференциальных уравнений

1. $y' = 3^{x+y}$	