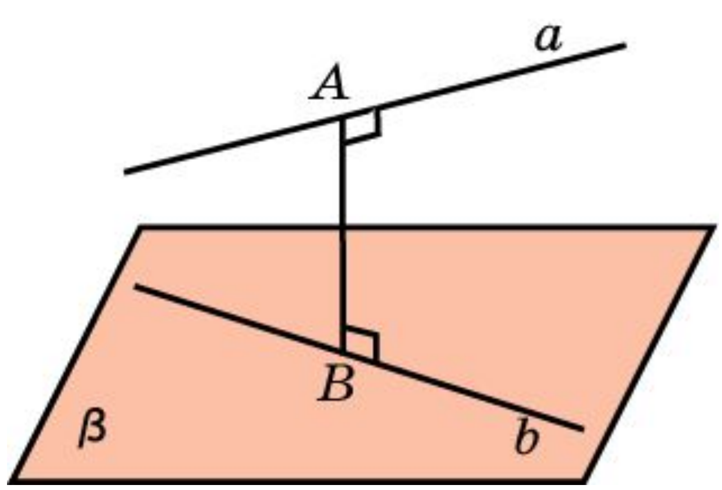
20е. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

(Куб, пирамида)

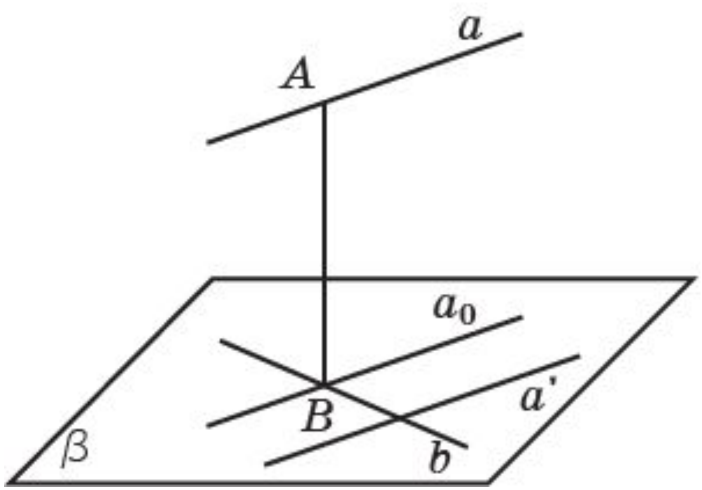
Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве называется длина общего перпендикуляра, проведенного к этим прямым.

Если одна из двух скрещивающихся прямых лежит в плоскости, а другая – параллельна этой плоскости, то расстояние между данными прямыми равно расстоянию между прямой и плоскостью.

Если две скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях, то расстояние между этими прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями.



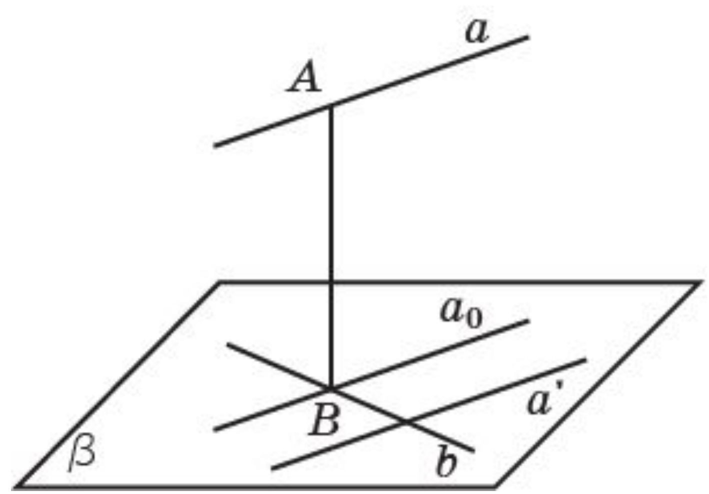
Теорема. Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым существует и единственен.



Доказательство. Пусть a, b - скрещивающиеся прямые. Через одну из них, например b, проведем плоскость β, параллельную прямой a. Это можно сделать, проведя прямую a', параллельную a и пересекающую b.

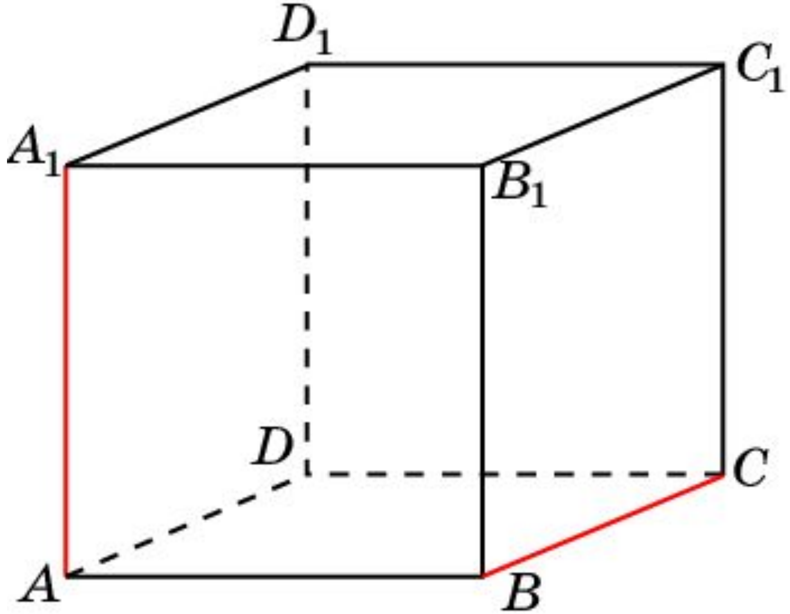
Тогда пересекающиеся прямые a', b будут определять искомую плоскость β. Рассмотрим ортогональную проекцию a_0 прямой a на плоскость β. Она будет параллельна прямой a и пересечет прямую b в некоторой точке B, которая является ортогональной проекцией некоторой точки A прямой a. Отрезок AB будет искомым. Действительно, он перпендикулярен плоскости β и, следовательно, перпендикулярен прямым b и a_0, т.е. он является общим перпендикуляром к прямым a и b.

Докажем единственность. Пусть дан общий перпендикуляр к прямым a и b. Тогда его ортогональная проекция на плоскость β должна совпадать с точкой B, а перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a должен совпадать с отрезком AB. Следовательно, данный общий перпендикуляр будет совпадать с отрезком AB.



Упражнение 1

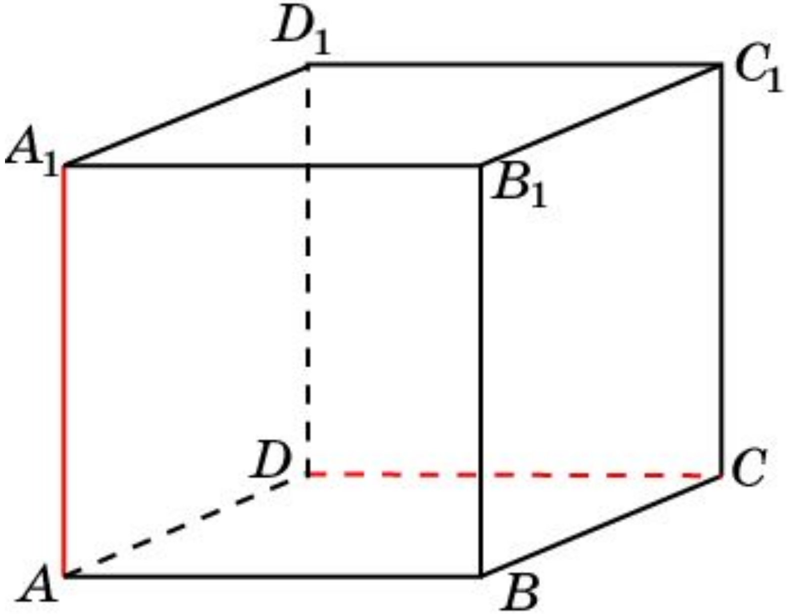
В единичном кубе $A…D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC.



Ответ: 1.

Упражнение 2

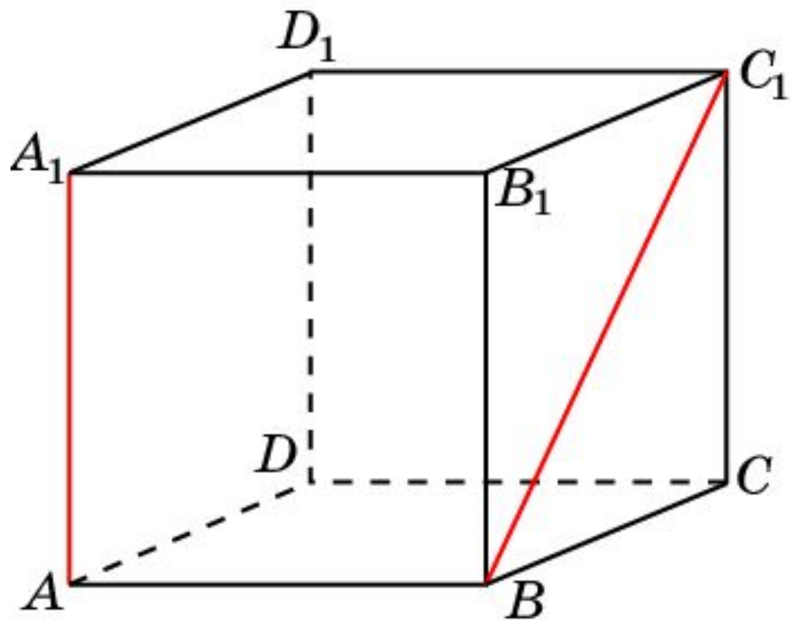
В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и CD.



Ответ: 1.

Упражнение 3

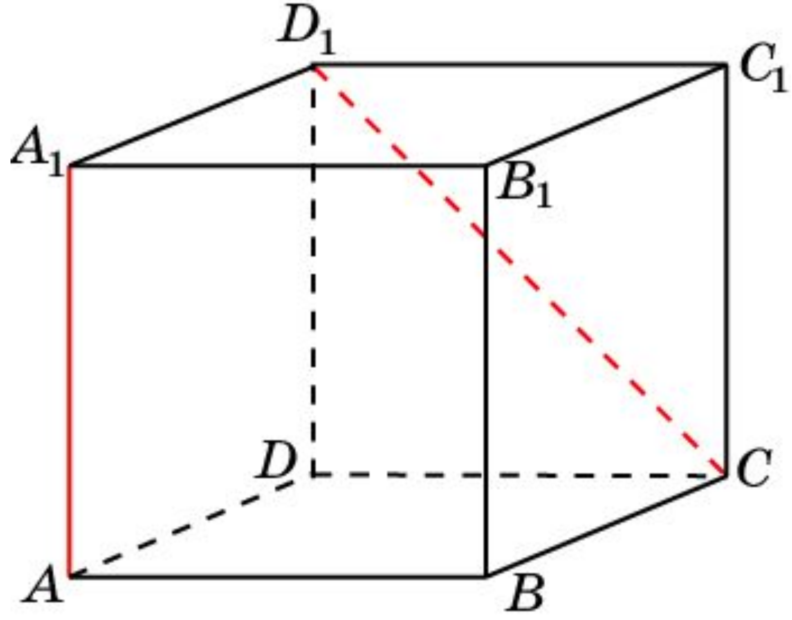
В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.



Ответ: 1.

Упражнение 4

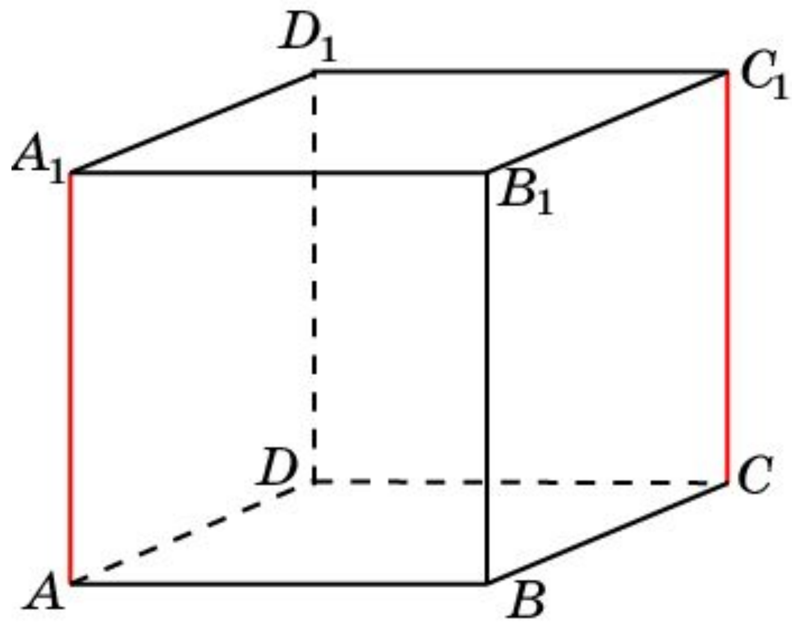
В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и CD_1.



Ответ: 1.

Упражнение 5

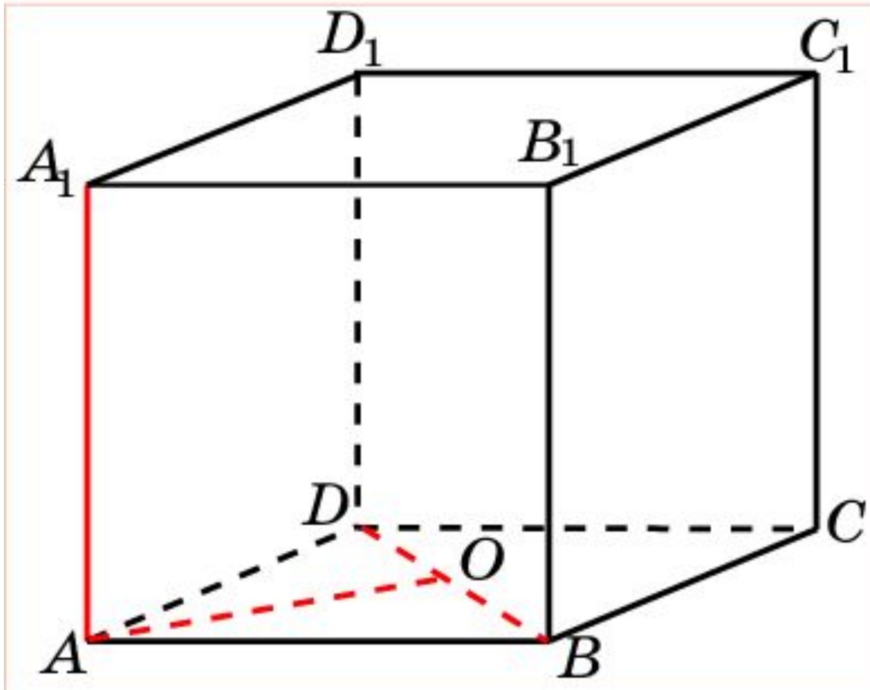
В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и CC_1.



Ответ: $\sqrt{2}$.

Упражнение 6

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD.

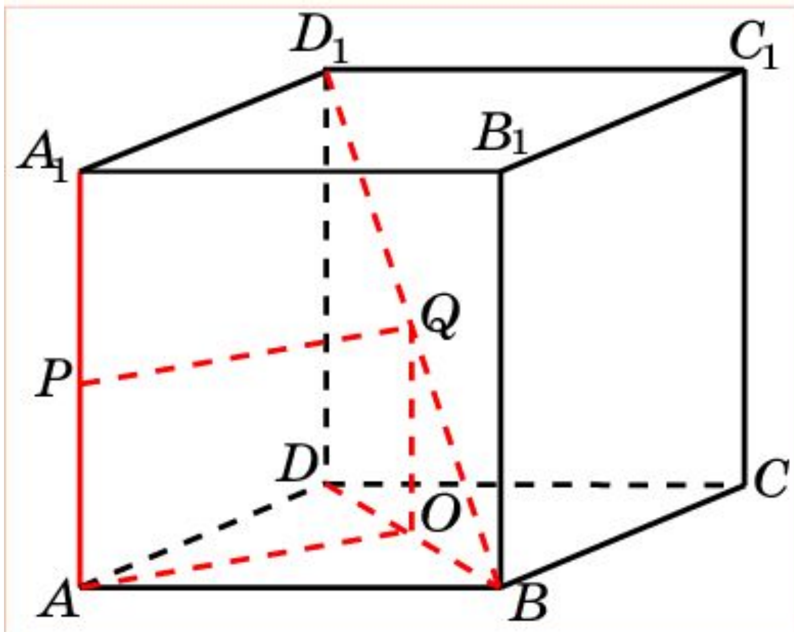


Решение. Пусть O – середина BD. Искомым расстоянием является длина отрезка AO. Она равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 7

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1.

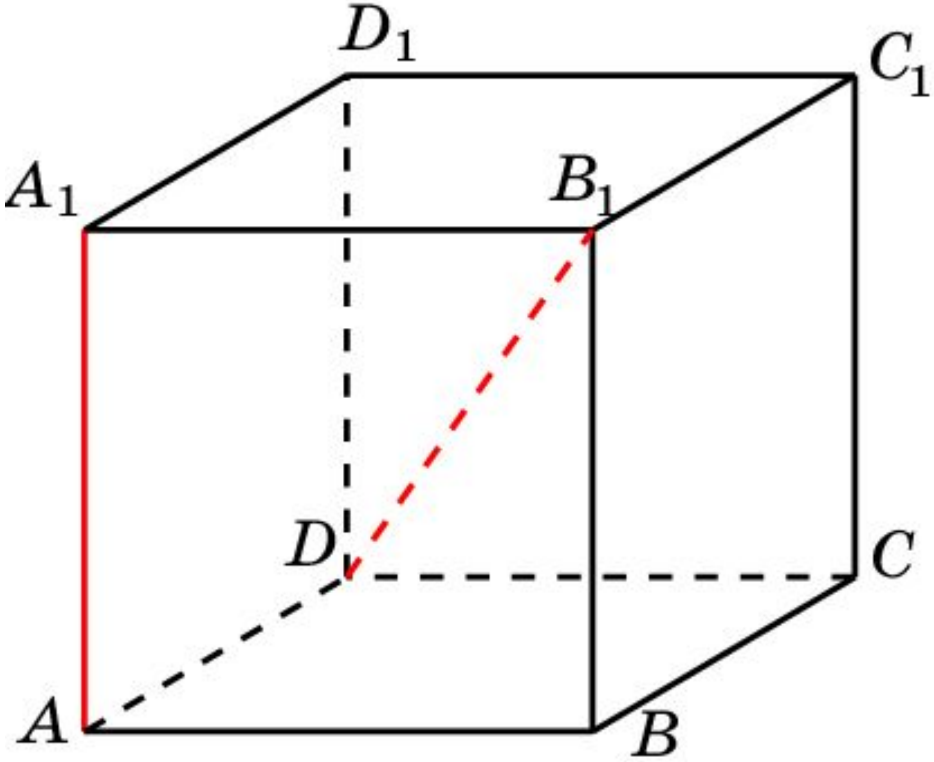


Решение. Пусть P, Q – середины AA_1, BD_1. Искомым расстоянием является длина отрезка PQ. Она равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 8

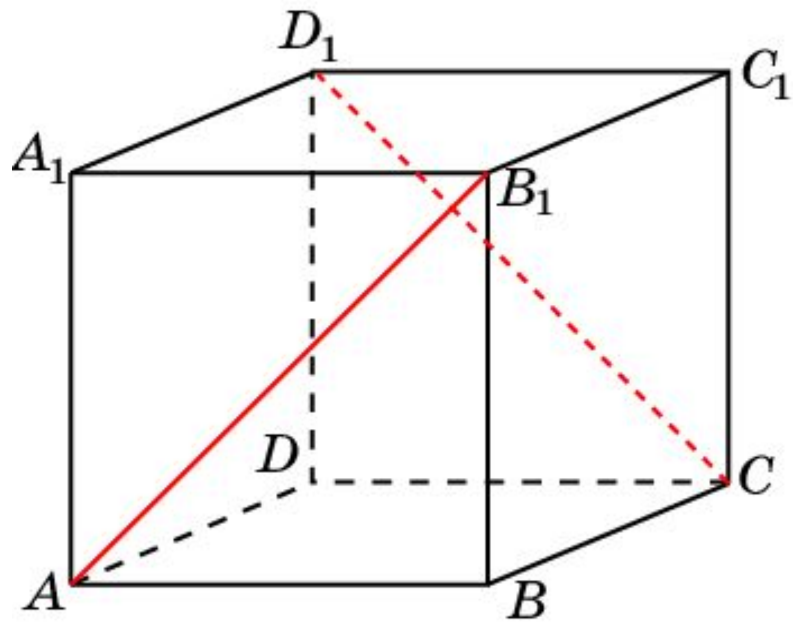
В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 9

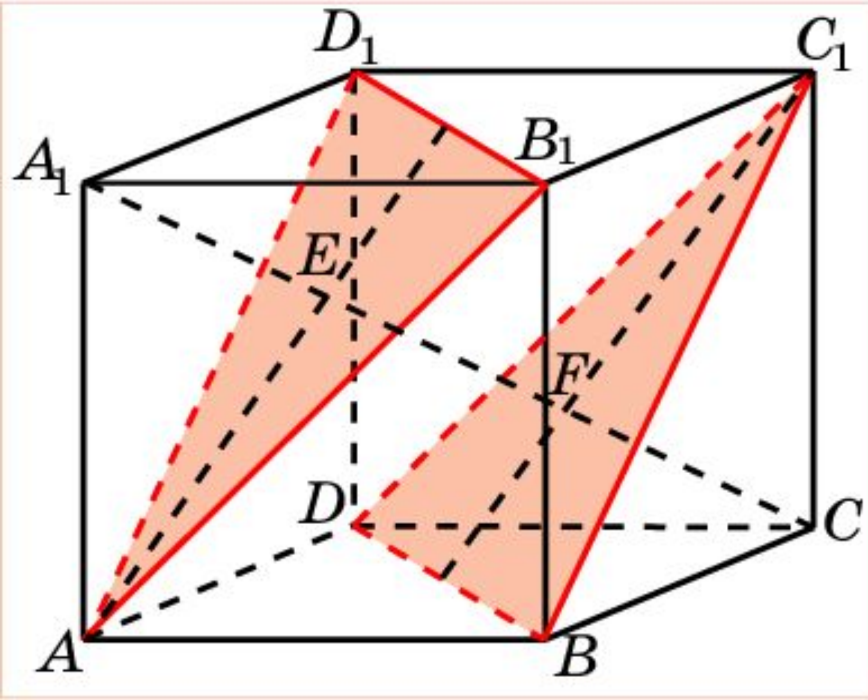
В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние прямыми AB_1 и CD_1.



Ответ: 1.

Упражнение 10

В единичном кубе $A \dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

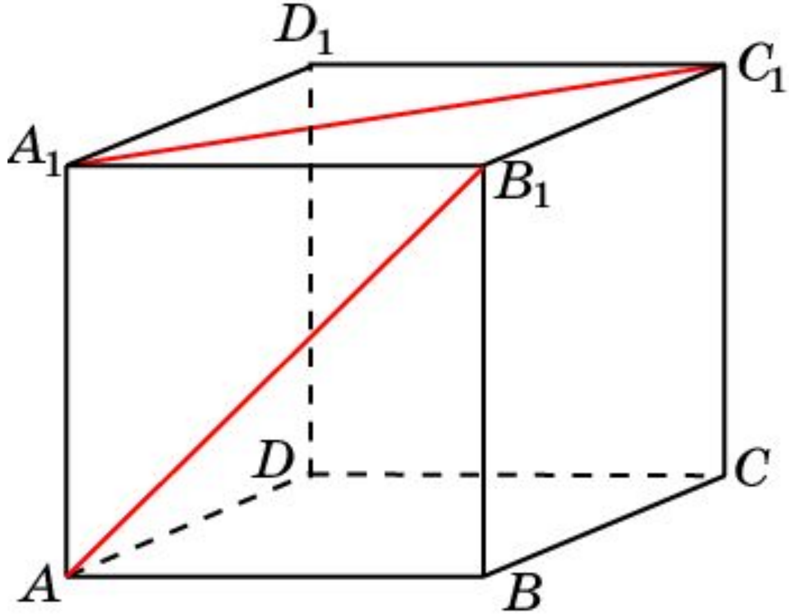


Решение. Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями AB_1D_1 и BDC_1. Диагональ A_1C перпендикулярна этим плоскостям и делится в точках пересечения на три равные части. Следовательно, искомое расстояние равно длине отрезка EF и равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Упражнение 11

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и A_1C_1.

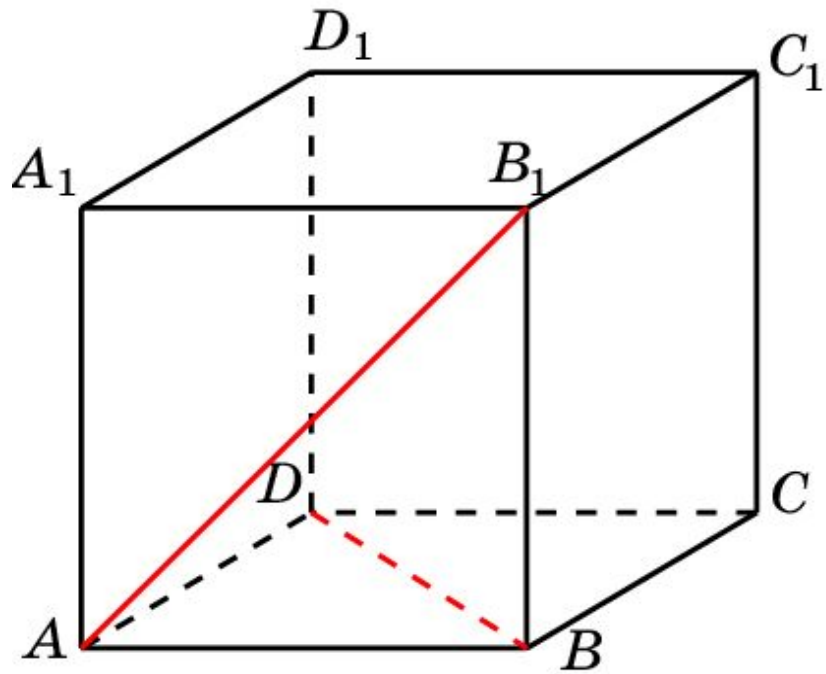


Решение аналогично предыдущему.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Упражнение 12

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD.

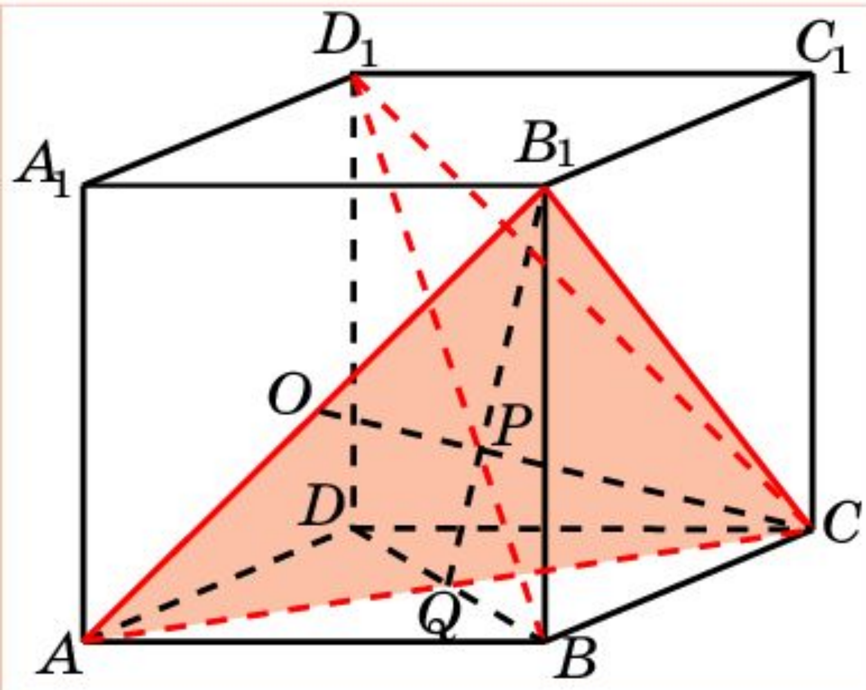


Решение аналогично предыдущему.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Упражнение 13

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние прямыми AB_1 и BD_1.



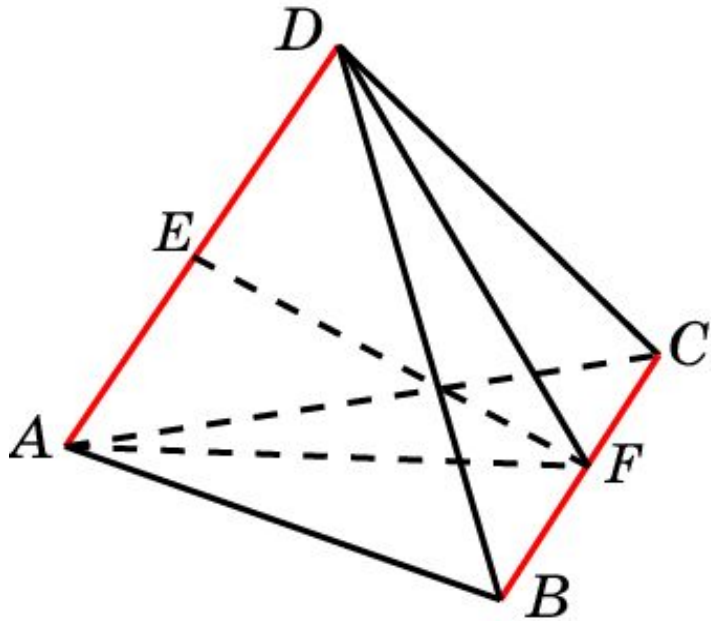
Решение. Диагональ BD_1 перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ACB_1 и пересекает его в центре P вписанной в него окружности. Искомое расстояние равно радиусу OP этой окружности.

$$OP = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Упражнение 14

В единичном тетраэдре $ABCD$ найдите расстояние между прямыми AD и BC.

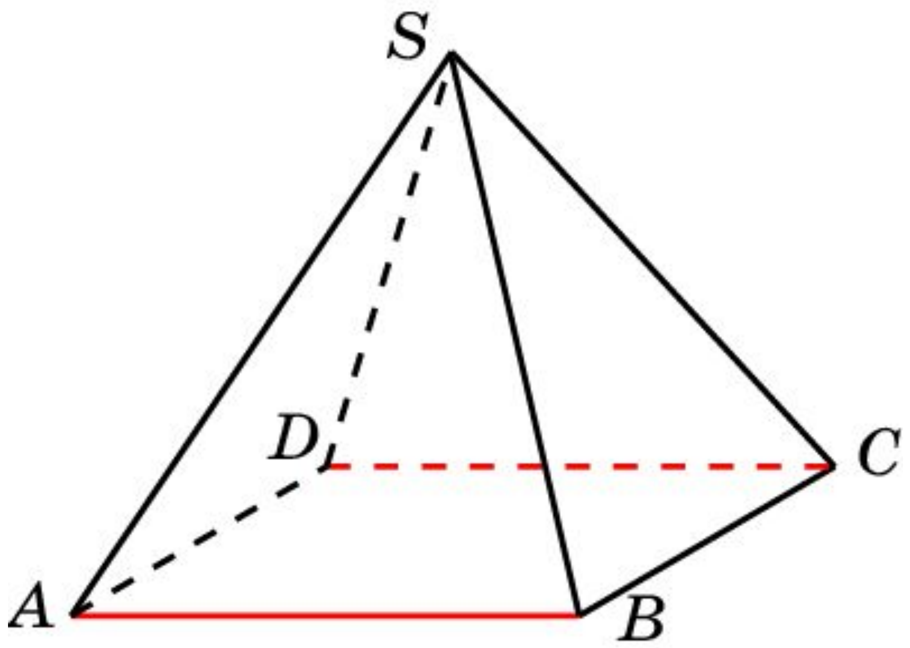


Решение. Искомое расстояние равно длине отрезка EF, где E, F – середины ребер AD, BC. В треугольнике ADF $AD = 1$, $AF = DF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $EF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 15

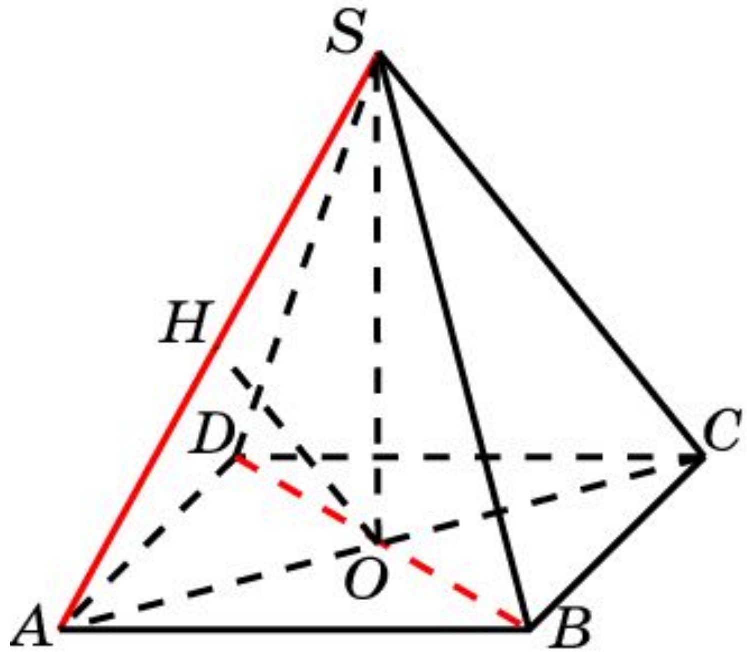
В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CD.



Ответ: 1.

Упражнение 16

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BD.

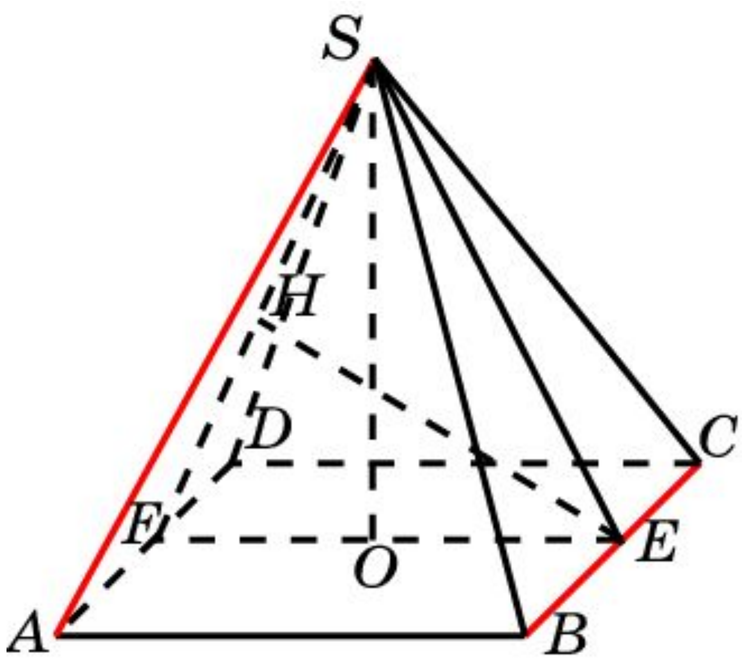


Решение. Искомое расстояние равно высоте OH треугольника SAO, где O – середина BD. В прямоугольном треугольнике SAO имеем: $SA = 1$, $AO = SO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $OH = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Упражнение 17

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC.



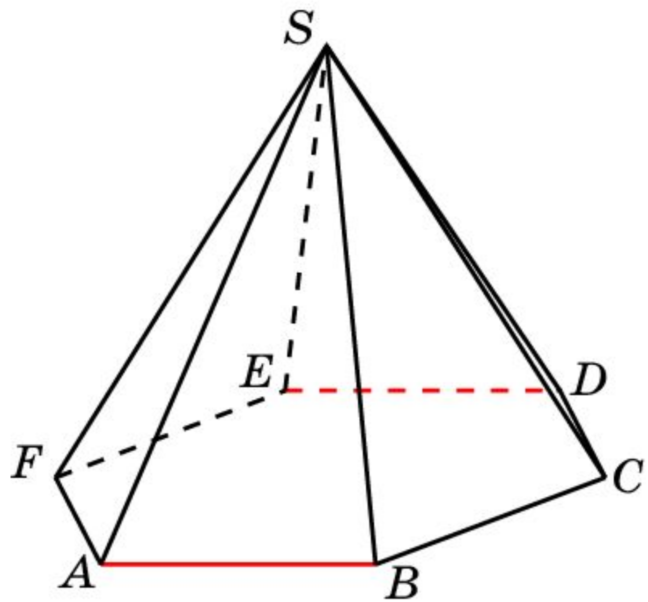
Решение. Плоскость SAD параллельна прямой BC. Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию между прямой BC и плоскостью SAD. Оно равно высоте EH треугольника SEF, где E, F – середины ребер BC, AD. В треугольнике SEF имеем:

$EF = 1$, $SE = SF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Высота SO равна $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $EH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Упражнение 18

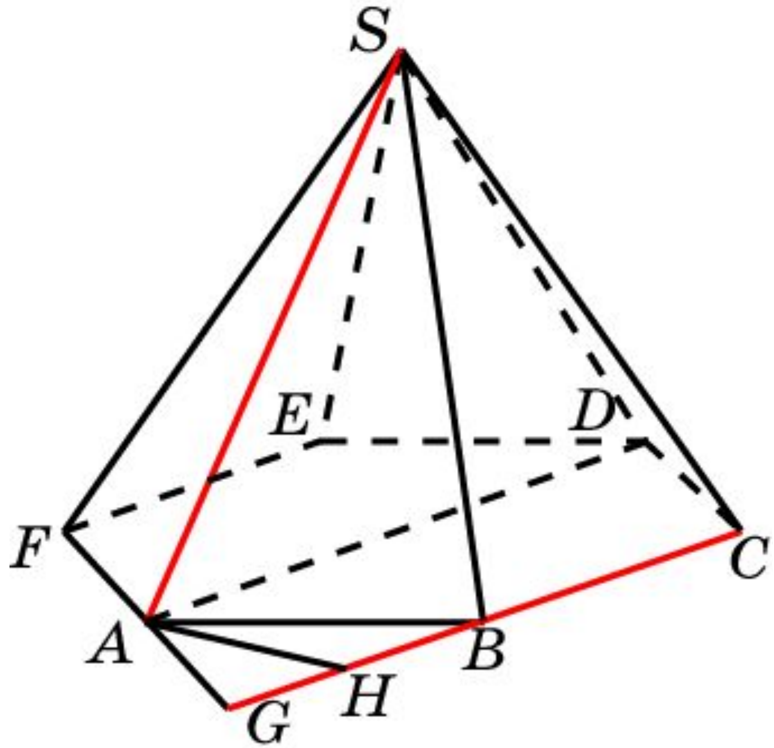
В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и DE.



Ответ: $\sqrt{3}$.

Упражнение 19

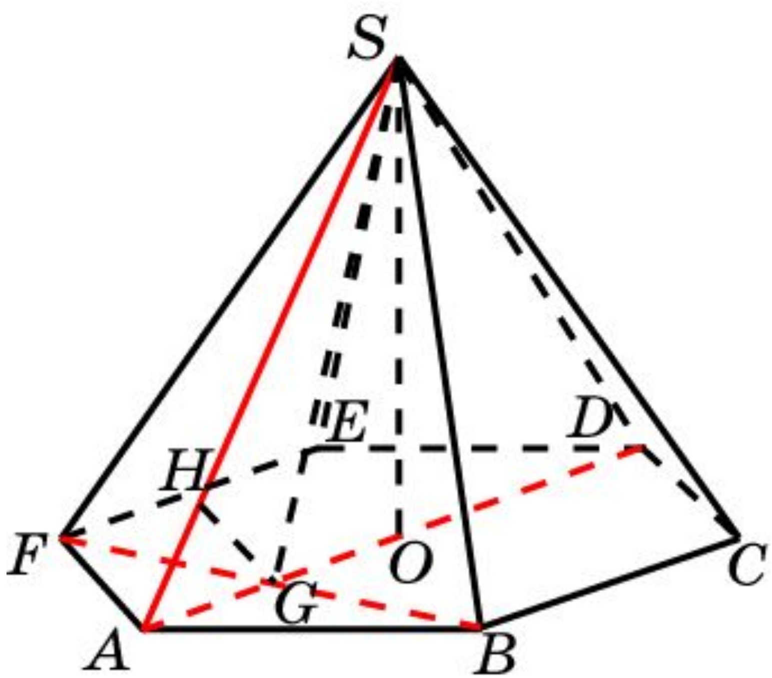
В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC.



Решение: Продолжим ребра BC и AF до пересечения в точке G. Общим перпендикуляром к SA и BC будет высота AH треугольника ABG. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 20

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите расстояние между прямыми SA и BF.



Решение: Искомым расстоянием является высота GH треугольника SAG, где G – точка пересечения BF и AD. В треугольнике SAG имеем:

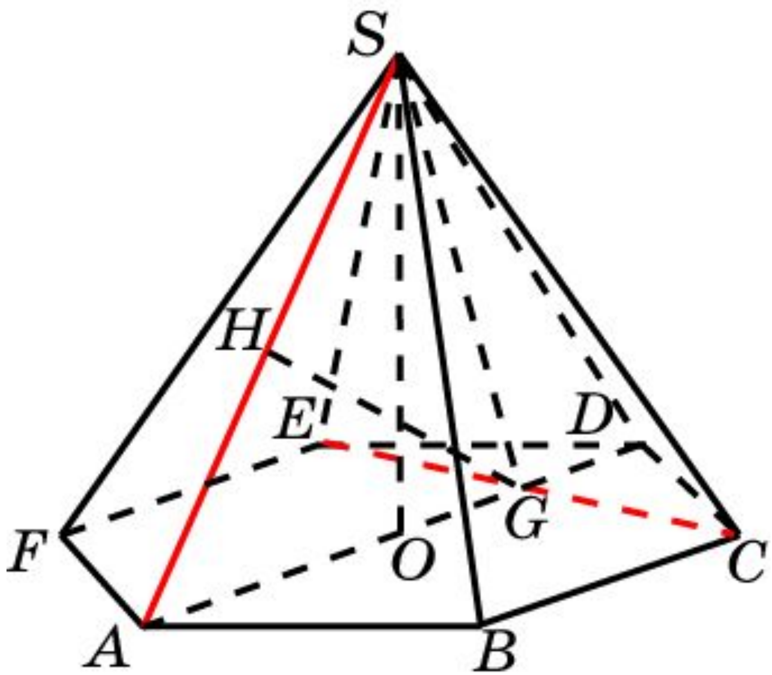
$SA = 2$, $AG = 0{,}5$, высота SO равна $\sqrt{3}$.

Отсюда находим $GH = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 21

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите расстояние между прямыми SA и CE.

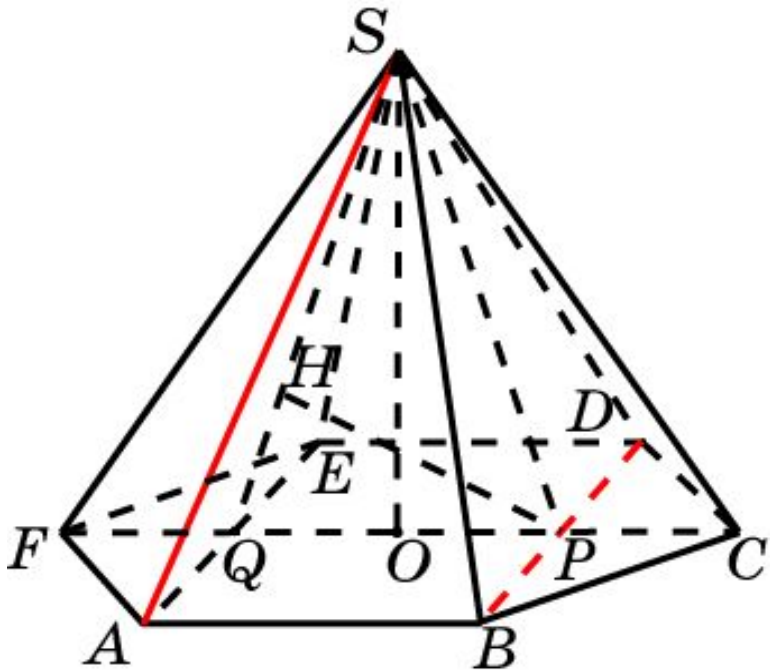


Решение: Искомым расстоянием является высота GH треугольника SAG, где G – точка пересечения CE и AD. В треугольнике SAG имеем: $SA = 2$, $AG = \dfrac{3}{2}$, высота SO равна $\sqrt{3}$. Отсюда находим $GH = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 22

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите расстояние между прямыми SA и BD.



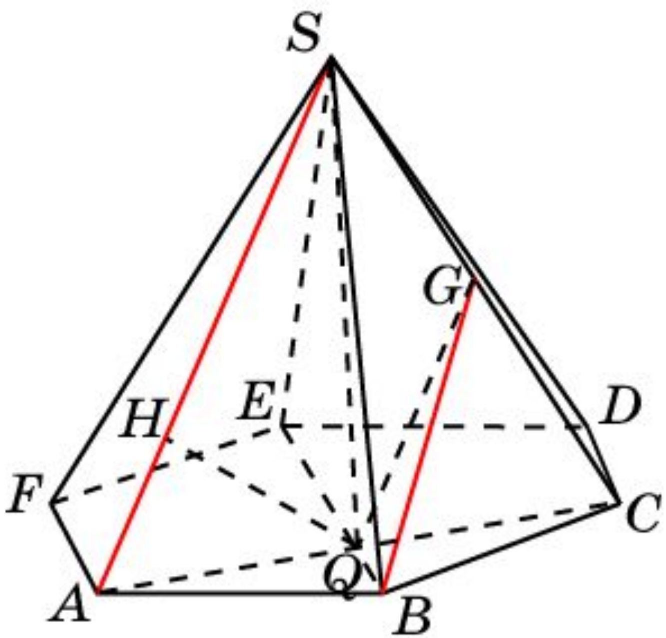
Решение: Прямая BD параллельна плоскости SAE. Искомое расстояние равно расстоянию между прямой BD и этой плоскостью и равно высоте PH треугольника SPQ. В этом треугольнике высота SO равна $\sqrt{3}$, $PQ = 1$, $SP = SQ = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Отсюда находим $PH = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

Упражнение 23

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите расстояние между прямыми SA и BG, где G – середина ребра SC.



Решение: Через точку G проведем прямую, параллельную SA. Обозначим Q точку ее пересечения с прямой AC. Искомое расстояние равно высоте QH прямоугольного треугольника ASQ, в котором

$$AS = 2,\ AQ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ SQ = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Отсюда находим

$$QH = \frac{\sqrt{39}}{8}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{39}}{8}$.